Fonctions affines

1- Définition :

Une fonction affine peut s'écrire sous la forme f : $x \to ax + b$ avec a et b deux nombres constants réels

Les fonctions suivantes sont-elles affines ? Si oui combien valent a et b ?

Fonctions	Affines ?	a =	b =
$f(x) = 5x + 3$			
$f(x) = 5x - 3$			
$f(x) = 5x$			
$f(x) = 3$			
$f(x) = 3 - 5x$			

2 Etude d'un exemple :

Les tarifs d'EDF s'établissent suivant le tableau suivant :

Puissance souscrite (kVA)	Réglage Disjoncteur (A)	Abonnement annuel TTC (Euros)	Prix du kWh TTC (Euros)
3	15	53,27	0,1403
6	30	86,48	
9	45	114,63	
12	60	176,28	

<u>2.1 Définir la fonction calculant le montant d'une facture bimestrielle à partir du nombre x de kWh pour une puissance souscrite de 6 kVA</u>

....

....

....

....

f : $x \longmapsto f(x) =$ ....

<u>2.2 Quel est le type de cette fonction ?</u>

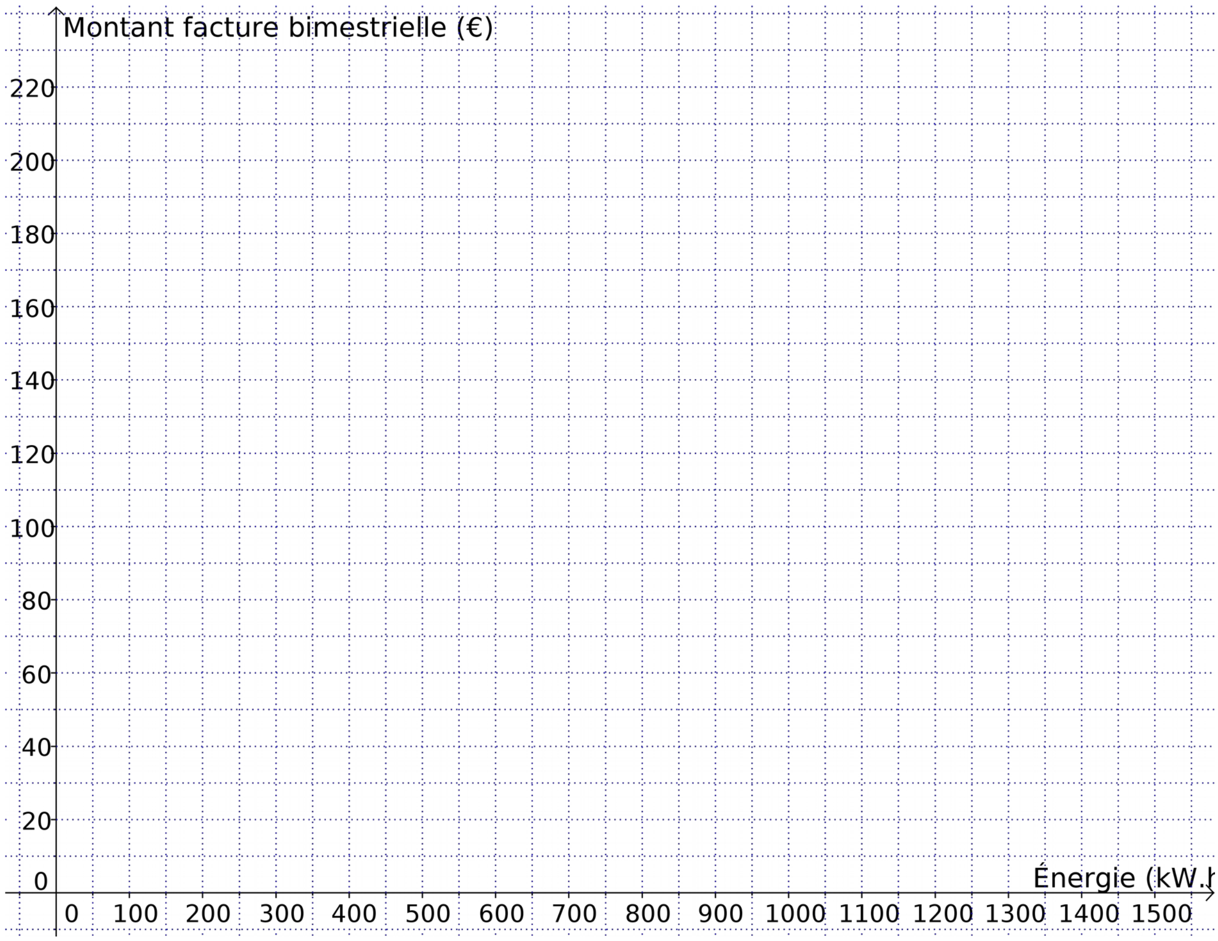
....

....

2.3 Représenter graphiquement cette fonction entre 0 et 1 500 kWh

Energie (kW.h)	0	150	300	450	600	750
Prix (€)						

Energie (kWh)	900	1050	1200	1350	1500
Prix (€)					



2.4 Quel est la forme de la courbe obtenue ?

....

....

....

2.5 Quelle est l'ordonnée du point d'intersection de cette courbe avec l'axe des ordonnées ?

....

....

....

....

La droite représentative d'une fonction affine coupe l'axe des ordonnées au point (0 ; b). Le nombre b est appelé ordonnée à l'origine de la droite.

2.6. Etude du coefficient directeur de la droite :

2.6.1 Relever les coordonnées de deux points A et B distincts de la droite

....

....

2.6.2 Calculer la différence de leurs ordonnées : $y_B - y_A$

....

....

2.6.3. Calculer la différence de leurs abscisses : $x_B - x_A$

....

....

2.6.4. Calculer le rapport entre la différence des ordonnées et la différence des abscisses. Ce rapport change-t-il si on prend deux autres points de la droite ?

....

....

....

....

....

....

La pente de la droite est :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\text{différence des ordonnées}}{\text{différence des abscisses}} = \frac{\text{hauteur entre les points}}{\text{largeur entre les points}}$$

Ce nombre a est aussi appelé coefficient directeur de la droite.

Si a est positif , la droite "monte". Si x augmente, alors f(x) augmente aussi. On dit que la fonction est **croissante**

Si a est négatif, la droite "descend". Si x augmente, alors f(x) diminue. On dit que la fonction est **décroissante**

Fonctions affines

1- Définition :

Une fonction affine peut s'écrire sous la forme f : $x \rightarrow ax + b$ avec a et b deux nombres constants réels

Les fonctions suivantes sont-elles affines ? Si oui combien valent a et b ?

Fonctions	Affines ?	a =	b =
f(x) = 5x + 3	oui	a = 5	b = 3
f(x) = 5x - 3	oui : f(x) = 5x + (-3)	a = 5	b = -3
f(x) = 5x	oui : f(x) = 5x + 0	a = 5	b = 0
f(x) = 3	oui : f(x) = 0x + 3	a = 0	b = 5
f(x) = 3 - 5x	oui : f(x) = -5x + 3	a = -5	b = 3

2- Etude d'un exemple :

Les tarifs d'EDF s'établissent suivant le tableau suivant (1/11/2014) :

Puissance souscrite (kVA)	Réglage Disjoncteur (A)	Abonnement annuel TTC (Euros)	Prix du kWh TTC (Euros)
3	15	53,27	0,1403
6	30	86,48	
9	45	114,63	
12	60	176,28	

2.1 Définir la fonction calculant le montant d'une facture bimestrielle (sur 2 mois) à partir du nombre x de kWh pour une puissance souscrite de 6 kVA

Abonnement bimestriel : $\frac{86,48}{12} \times 2 = 14,41€$

f : $x \rightarrow$ 14,41 + 0,1403 x $\Rightarrow$ **f(x) = 0,1403 x + 14,41**

2.2 Quel est le type de cette fonction ?

Cette fonction est une fonction affine du type f : $x \longmapsto f(x) = ax + b$ avec a = 0,1403 et b = 14,41

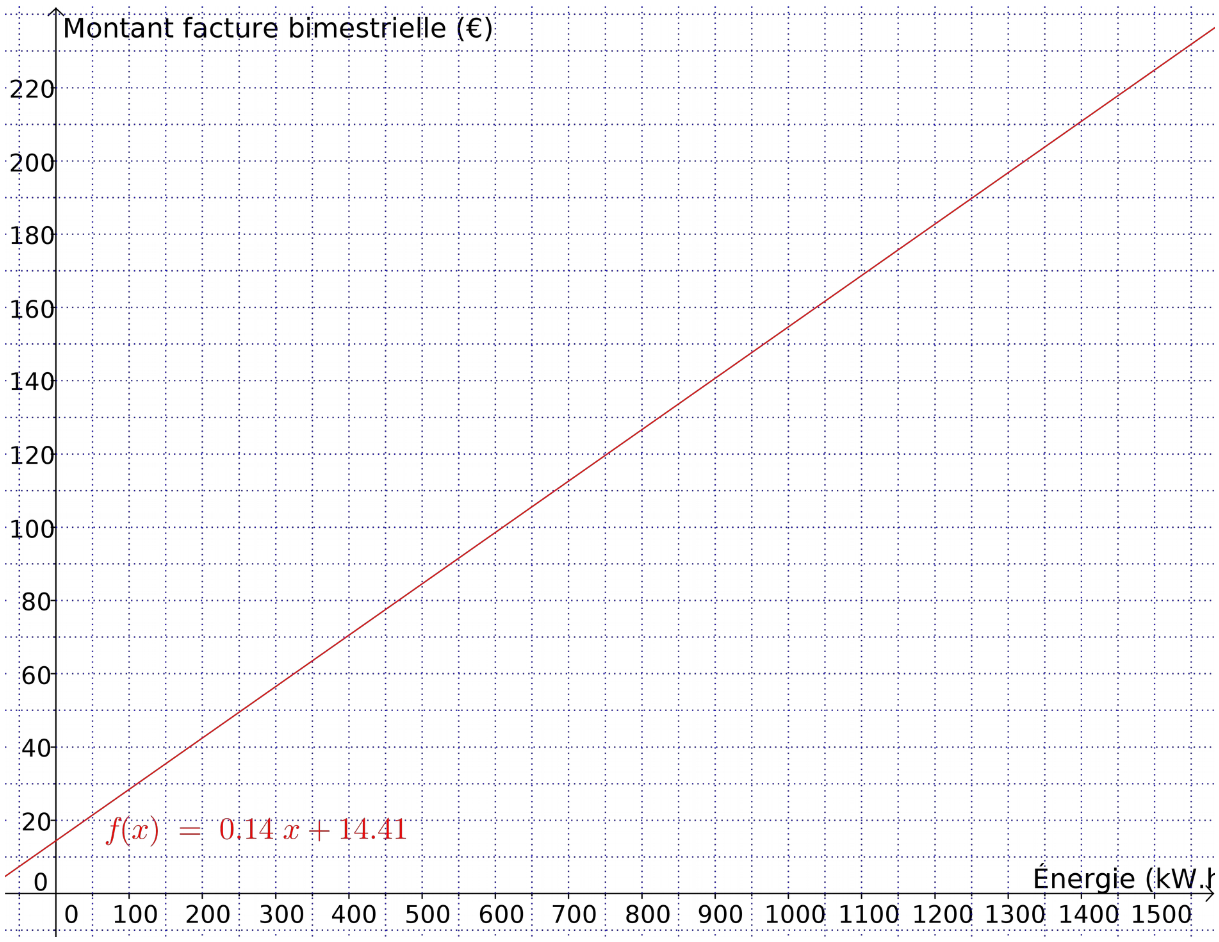
2.3 Représenter graphiquement cette fonction entre 0 et 1 500 kWh

Énergie (kWh)	0	150	300	450	600	750	900	1050	1200	1350	1500
Prix (€)	14,41	35,455	56,5	77,545	98,59	119,635	140,68	161,725	182,77	203,815	224,86

2.4 Quel est la forme de la courbe obtenue ?

La courbe obtenue est une droite

La courbe représentative d'une fonction affine est une droite.



2.5 Quelle est l'ordonnée du point d'intersection de cette courbe avec l'axe des ordonnées ?

La droite coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 14,41. Or 14,41 = b
Démonstration : le point de la droite dont l'ascisse x = 0 a pour ordonnée :
y ax + b = a × 0 + b = b, donc les coordonnées de ce point sont (0 ; b)
La droite représentative d'une fonction affine coupe l'axe des ordonnées au point (0 ; b)

2.6. Etude du coefficient directeur de la droite :

2.6.1 Relever les coordonnées de deux points A et B distincts de la droite
A(300 ; 56,5) et B(1200 ; 182,77)
2.6.2 Calculer la différence de leurs ordonnées : $y_B - y_A$
$y_B - y_A = 182{,}77 - 56{,}5 = 126{,}27$
2.6.3. Calculer la différence de leurs abscisses : $x_B - x_A$
$x_B - x_A = 1200 - 300 = 900$
2.6.4. Calculer le rapport . Ce rapport change-t-il si on prend deux autres points de la droite ?

$$\frac{126{,}27}{900} = 0{,}1403$$

Quels que soient les deux points distincts choisis sur la droite ce rapport reste le même.
Ce rapport est le coefficient directeur de la droite, c'est le nombre a de la fonction affine.
Démonstration :

Soit deux points A et B de la droite. Leurs coordonnées sont :
$A(x_A ; y_A = ax_A + b)$ et $B(x_B ; y_B = ax_B + b)$
$y_B - y_A = ax_B + b - (ax_A + b) = ax_B + b - ax_A - b = ax_B - ax_B = a(x_B - x_A)$
$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{a(x_B - x_A)}{x_B - x_A} = a$ (si $x_B \neq x_A$).

Le coefficient directeur de la droite est le rapport

$$\mathbf{a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\text{différence des ordonnées}}{\text{différence des abscisses}} = \frac{\text{hauteur entre les points}}{\text{largeur entre les points}}}$$

Ce rapport correspond à la "vitesse de montée" d'un point le long d'une droite en unité d'ordonnée par unité d'abscisse. Par exemple si a = 1,057, un point se déplaçant le long de cette droite monterait de 1,057 unité d'ordonnée pour un déplacement horizontal d'une unité d'abscisse.

Si a est positif , la courbe "monte". Dans ce cas si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) < f(x_2)$. On dit que la fonction est **croissante**

Si a est négatif, la courbe "descend". Dans ce cas si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) > f(x_2)$
On dit que la fonction est décroissante