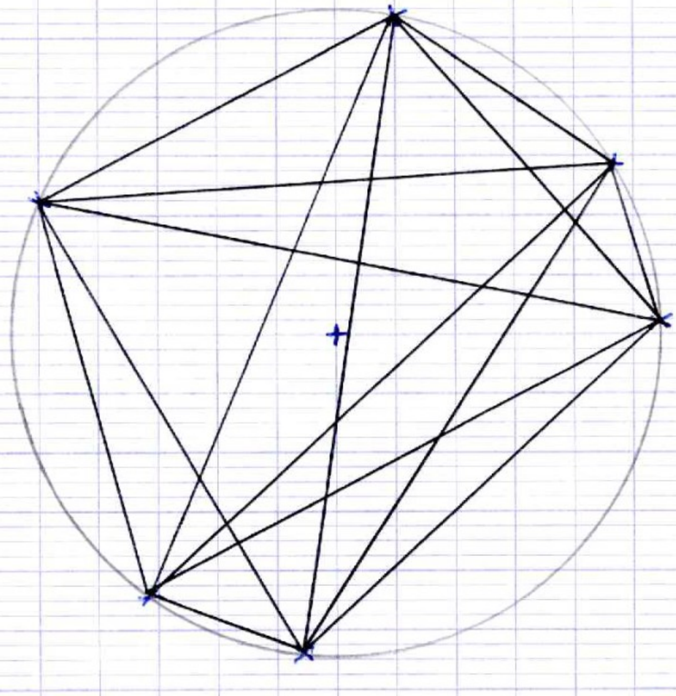
Secteurs de disques et suites.

Rappel de la situation

Sur un disque, on place n points sur son bord, puis on relie l'ensemble des points, sachant qu'aucun des points ne doivent être diamétralement opposés



On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$ représentant le nombre de points placés, le nombre s_n correspondant au nombre de secteurs de disque correspondant.

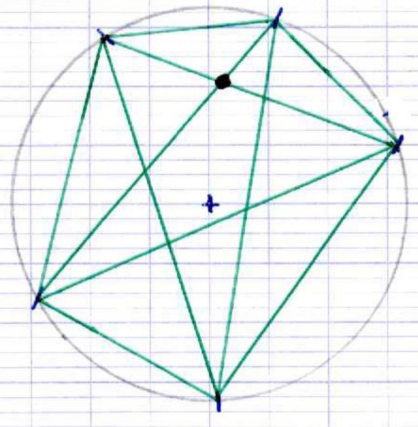
Cela définit donc une suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

Par l'expérimentation, on obtient successivement :
$s_1 = 1$ $s_2 = 2$ $s_3 = 4$ $s_4 = 8$ $s_5 = 16$.

Une conjecture immédiate est la suivante :
$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad s_n = 2^{n-1}$.

Cependant, pour $n = 6$, $s_6 = 31 \neq 2^5$.
Les élèves sont dubitatifs sur leur comptage.

Démonstration. $s_n = 2^{n-1} \Leftrightarrow n \in [\![1 ; 5]\!]$.



Lemme Issu de la formule d'Euler.

En notant s le nombre de secteurs, c le nombre de côtés (incluant les arcs de cercle), et p le nombre de points, $s = c - p + 1$.

On a $s_n = c_n - p_n + 1$, et ce $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

① Notons P l'ensemble des points du cercle, et P' l'ensemble des points à l'intérieur du disque.

$\# P = n$ et $\# P' = \binom{n}{4}$ car les points du cercle n'étant pas diamétralement opposés, ils sont reliés à 4 points du cercle.

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \# P + \# P'$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{p_n = n + \binom{n}{4}}$.

② De chaque point du cercle partent $(n-1)$ segments et 2 arcs de cercles. Il y a donc $(n+1)$ départs pour n points du cercle.
De chaque point de l'intérieur du disque partent 4 segments. Il y a $\binom{n}{4}$ points de ce type.

Or, dans cette situation, chaque côté est compté 2 fois (partant d'une extrémité et de l'autre).

On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad c_n = \dfrac{n(n+1)}{2} + \dfrac{4\binom{n}{4}}{2}$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad c_n = \frac{n(n+1)}{2} + 2\binom{n}{4}.}$$

③ $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad s_n = c_n - p_n + 1$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad s_n = \frac{n(n+1)}{2} + 2\binom{n}{4} - n - \binom{n}{4} + 1$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} - n + \binom{n}{4} + 1$$

$$= \frac{n(n-1)}{2} + \binom{n}{4} + 1.$$

$$= \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{0}.$$

$$= \binom{n}{4} + \binom{n}{2} + \binom{n}{0}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} + \frac{n(n-1)}{2} + 1.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad s_n = \frac{n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24}{24}.}$$

A utiliser sur un logiciel de calcul formel.

④ $\dfrac{n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24}{24} = 2^{n-1} \iff n \in [\![1 ; 5]\!]$.

à vérifier à la calculatrice dans le menu fonction.