

L'enseignement des mathématiques en éducation prioritaire

Anne Burban

IGEN Groupe des mathématiques

7 mars 2019



Liberté • Égalité • Fraternité

RÉPUBLIQUE FRANÇAISE



igen
Inspection générale
de l'Éducation nationale

Plan de la présentation

- Brefs rappels sur les programmes de mathématiques au cycle 4 (ajustements)
- Les mathématiques dans le référentiel de l'éducation prioritaire
- L'enseignement explicite
- Le statut de l'erreur
- La métacognition

Programme du cycle 4

➤ Cinq thèmes

- nombres et calculs (introduction des nombres rationnels positifs et négatifs, de la racine carrée, **calcul littéral**)
- grandeurs et mesures
- espace et géométrie
- organisation et gestion des données (probabilités, notion de fonction)
- **algorithmique et programmation**

➤ Six compétences

➤ **Objectifs** : formation au raisonnement et initiation à la **démonstration**. Accès à **l'abstraction**.

➤ **Modalité : Résolution de problèmes** (**internes aux mathématiques**, liés à des situations issues **de la vie quotidienne ou d'autres disciplines**)

Ajustements

BOEN n° 30 du 26 juillet
2018

- **Automatismes**
- Raisonnement et démonstration
- Manipulation --> verbalisation
/représentation --> abstraction
- Trace écrite
- Pour chaque attendu de fin de cycle,
distinction claire entre les
connaissances et les **compétences**
associées

Mathématiques en éducation prioritaire

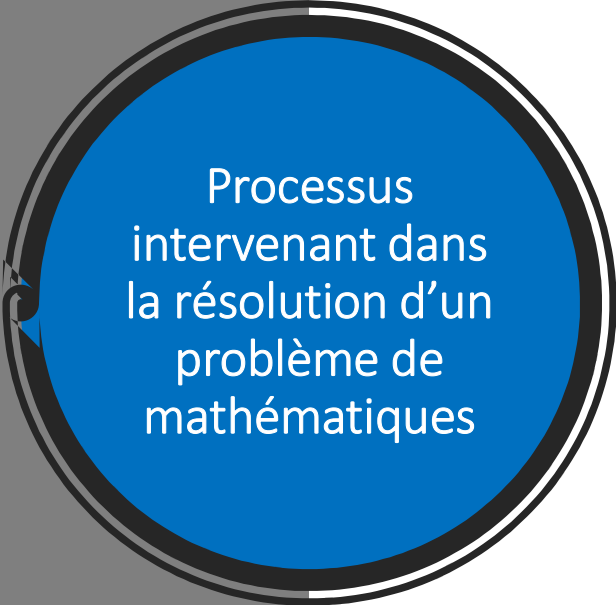
Référentiel

- Qu'est-ce qu'un enseignement **explicite** des mathématiques ?
- **L'erreur** considérée comme une étape de l'apprentissage, nécessaire et source d'enseignements pour tous.
 - Quel **statut** accorder à l'erreur en mathématiques ?
 - Comment surmonter les **obstacles épistémologiques** et ne pas générer **d'obstacles didactiques** ?
 - **L'évaluation** en mathématiques
- Le travail personnel des élèves en mathématiques
 - Recherche, mais aussi **entraînement et mémorisation**
 - Découverte, mais aussi **réinvestissement**
- **Métacognition** (mémorisation, contrôle, structuration, hiérarchisation, etc.)
- La continuité entre l'école et le collège dans l'enseignement des mathématiques.

Les savoirs mathématiques

- Les savoirs : faits numériques, tables, théorèmes de géométrie, les « règles »
- les savoir faire (opérations posées, constructions géométriques, etc.)
- les stratégies (résolution de problèmes)

Rien n'est naturel , tout doit être enseigné



Processus
intervenant dans
la résolution d'un
problème de
mathématiques

Interprétation et
représentation

Comprendre l'énoncé et la
consigne
Manipuler, **schématiser**
Rôle du contexte sémantique
(mots inducteurs d'une stratégie
ou d'une opération)

Structuration de la démarche
de résolution (choix d'une
stratégie)

Décomposer en sous-problèmes
Se référer à des problèmes de la
même **classe**

Opérationnalisation

Calculs, application de
propriétés

Communication

Produire des résultats (**langage
mathématique**) et rédiger une
solution (**langue française**)

EXERCICE 2

6 points

Léa a besoin de nouveaux cahiers. Pour les acheter au meilleur prix, elle étudie les offres promotionnelles de trois magasins. Dans ces trois magasins, le modèle de cahier dont elle a besoin a le même prix avant promotion.

Magasin A

Cahier à l'unité ou lot de 3 cahiers pour le prix de 2.

Magasin B

Pour un cahier acheté, le deuxième à moitié prix.

Magasin C

30 % de réduction sur chaque cahier acheté.

1. Expliquer pourquoi le magasin C est plus intéressant si elle n'achète qu'un cahier.
2. Quel magasin doit-elle choisir si elle veut acheter :
 - a. deux cahiers?
 - b. trois cahiers?
3. La carte de fidélité du magasin C permet d'obtenir 10 % de réduction sur le ticket de caisse, y compris sur les articles ayant déjà bénéficié d'une première réduction.
Léa possède cette carte de fidélité, elle l'utilise pour acheter un cahier. Quel pourcentage de réduction totale va-t-elle obtenir ?

Comment expliquer les blocages et les difficultés des élèves ?

- **Absence d'initiative** face à un **implicite** (le prix d'un cahier n'est pas donné)
- Peut-être une accumulation de « tâches » éparses sur la proportionnalité, sans permettre de bien en dégager la portée et le sens.

D'où l'intérêt de travailler la **progressivité** et les **liens**.

L'enseignement explicite

- **Modèle pédagogique** émergé des recherches principalement nord-américaines sur l'efficacité de l'enseignement (Barak Rosenshine, 1982)
Enseignement **structuré et directif**, fortement **guidé par l'enseignant**
 - étapes ciblées successives, **du simple au complexe**
 - rythme de leçon soutenu
- **Principes**
 - Éviter le non-dit, l'implicite
 - Dire – montrer – guider
 - Ajuster le niveau d'étayage
 - L'apprentissage est **dirigé** avant d'être **autonome**

Expliciter les démarches d'apprentissage pour que les élèves comprennent le sens des enseignements

- Les **objectifs** du travail proposé aux élèves sont systématiquement **explicités**. Distinguer « faire » et « apprendre ».
- Les procédures **efficaces** pour apprendre sont **explicitées** et **enseignées**. Ne pas s'imaginer que les élèves vont les découvrir par eux-mêmes.
- L'enseignement est **progressif et continu** ; **la vérification de la compréhension** de tous les élèves est régulière.

Qu'est-ce qu'on explicite ?

- **Le sens du travail scolaire**

Nécessité de dégager les objectifs de l'apprentissage : dans un premier temps, on ne mélange pas la recherche d'informations, le raisonnement, le calcul, la rédaction...

- **Les apprentissages**

Concepts, liens (ancrage, prospective, interdisciplinarité), stratégies et procédures

- **La métacognition**

- Prise de conscience de **ce qu'on apprend**, **comment** on l'apprend et **pourquoi** on l'apprend
- Explicitation de **stratégies cognitives** facilitant la mémorisation à long terme et le transfert.

Les différentes phases d'un enseignement explicite

- **La présentation** (par le professeur) : montrer, dire

- Activation des **connaissances préalables**.
- Présentation des objectifs d'apprentissage pour donner du sens aux tâches à réaliser.
- Présentation des nouveaux éléments de savoirs (notionnels, procéduraux, stratégiques), **en petites unités**, de manière progressive.

- **Pratique guidée** (les élèves accompagnés par le professeur)

- Questionnement et rétroaction pour s'assurer de façon continue de la bonne compréhension. Travail sur l'erreur, **reformulations**.
- Exemples et contre-exemples

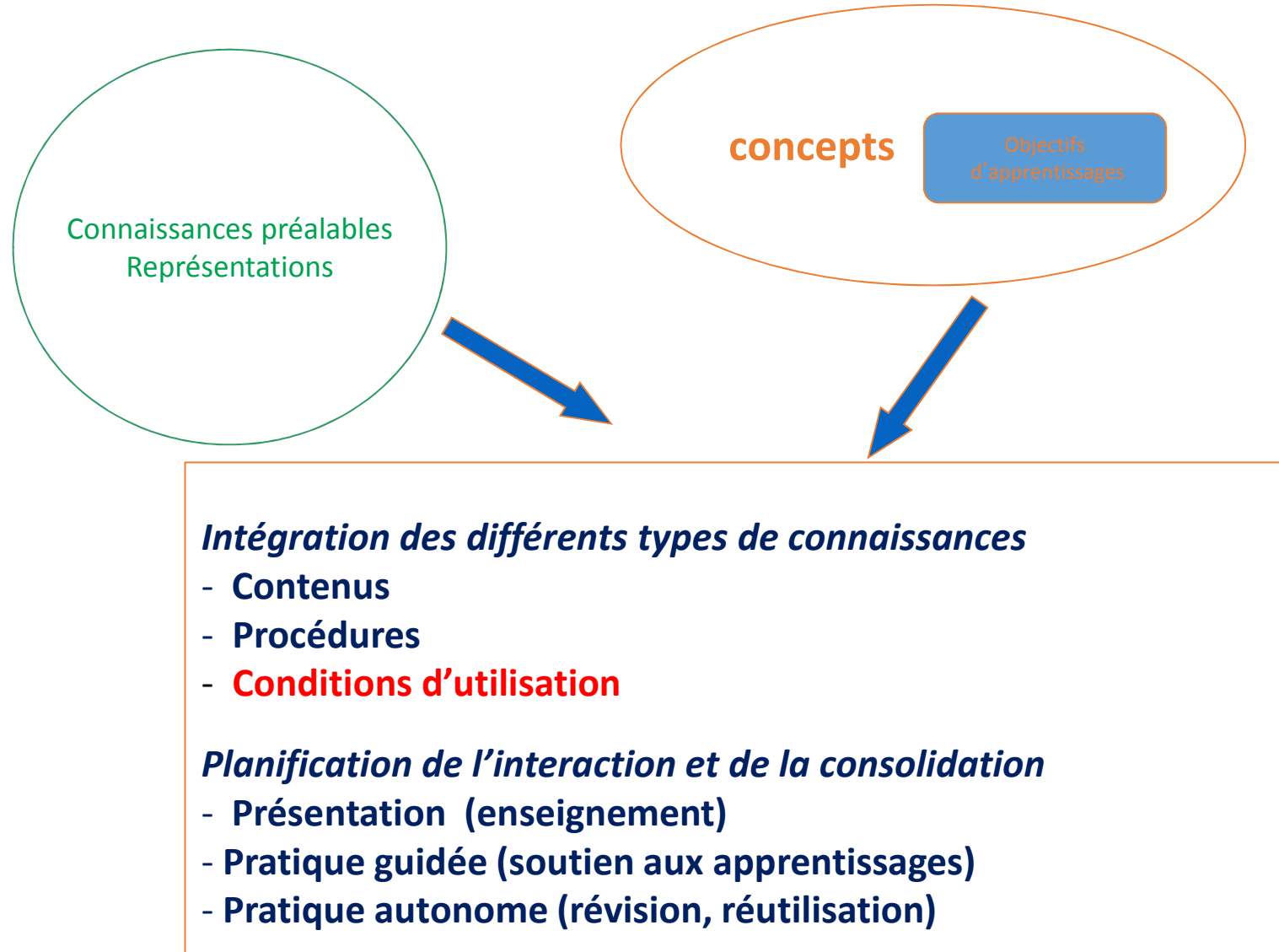
- **Pratique autonome** (par les élèves, en direct ou en différé (révisions))

- Consolidation, changement de contextes
- Sur-apprentissage et automatisation  mémorisation et transferts

L'enseignement explicite

Préparation – Interaction – Consolidation

Préparation



L'enseignement explicite

Préparation – **Interaction** – Consolidation

Interaction avec la classe

- **Ouvrir la séance**
 - objectifs d'apprentissage
 - attendus (en termes de connaissances et de compétences)
 - réactivation des connaissances préalables
- **Conduire la séance**
 - le cours (Quoi ? Pourquoi ? Quand ? Comment ?)
 - pratique guidée
 - pratique autonome
- **Clore la séance**
 - Objectivation, structuration
 - Synthèse écrite, métacognition

L'enseignement explicite : le modèle PIC

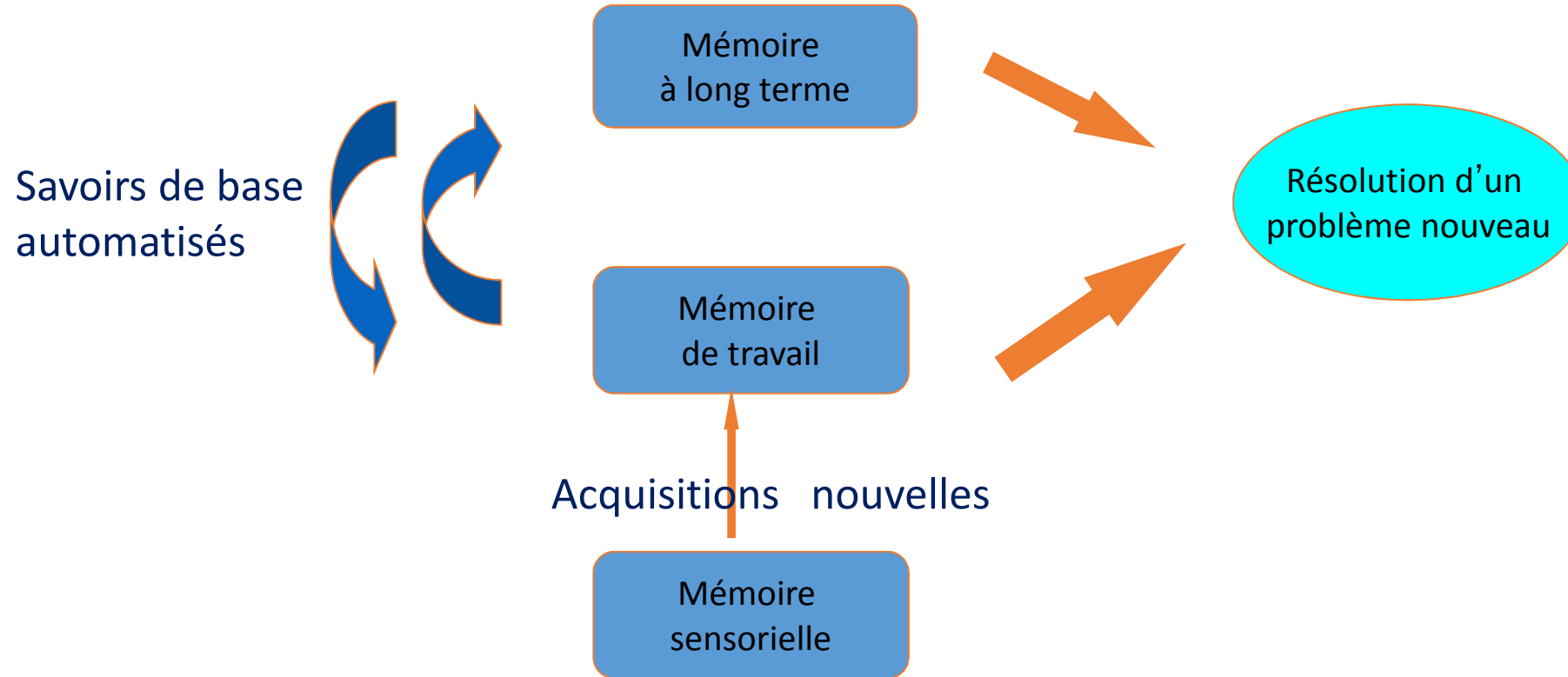
Préparation – Interaction – **Consolidation**

Consolidation

- Apprentissage des leçons, exercices d'application
- Devoirs à la maison (tâches simples, intermédiaires, complexes)
- **Révisions** quotidiennes, hebdomadaires, mensuelles
- Evaluations formatives avec rétroaction immédiate
- Evaluations sommatives

Pourquoi enseigner explicitement ?

L'architecture cognitive



Exemple : la proportionnalité

- **Activation des connaissances préalables**

Si 2 pots de miels pèsent 3kg, combien pèsent 4 pots de miel, 5 pots, $\frac{1}{2}$ pot ?

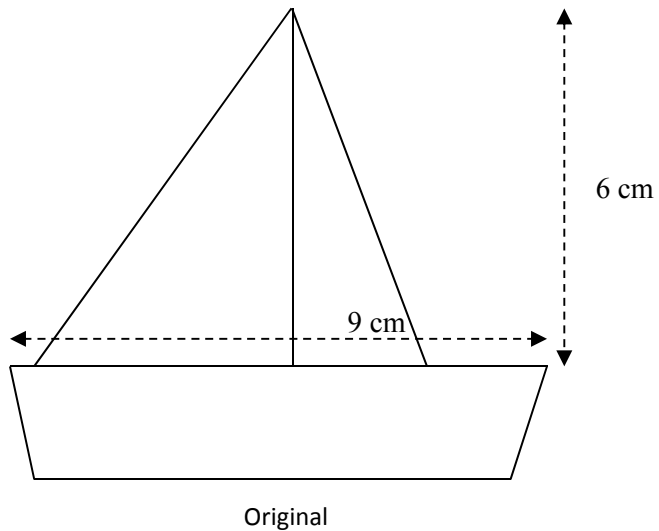
- **Objectifs d'apprentissage** : reconnaître une situation de proportionnalité, calculer une quatrième proportionnelle
- **Présentation** sur quelques situations de proportionnalité (prix/quantité, mélanges et proportions, agrandissement/réduction), du plus simple au plus complexe (choix des variables didactiques)

- **Pratique guidée** sur des tâches similaires. Questions flash pour automatiser des connaissances, des procédures, des stratégies
- **Pratique autonome**

Tâches intermédiaires complexes dans une grande variété de contextes problèmes de proportion, de mélange, de fréquence, d'agrandissement-réduction...

- **Objectivation** Expliciter différentes procédures permettant de calculer une quatrième proportionnelle (retour à l'unité, linéarité).
 - Le théorème de Thalès, les triangles semblables et les homothéties.
 - Le coefficient de proportionnalité, l'application linéaire sous-jacente.

Transfert



Voici le dessin d'un voilier. La hauteur du mât est de 6 cm et la longueur du pont est de 9 cm.

Ce dessin a été agrandi à la photocopieuse. La hauteur du mât sur la photocopie est de 15 cm.

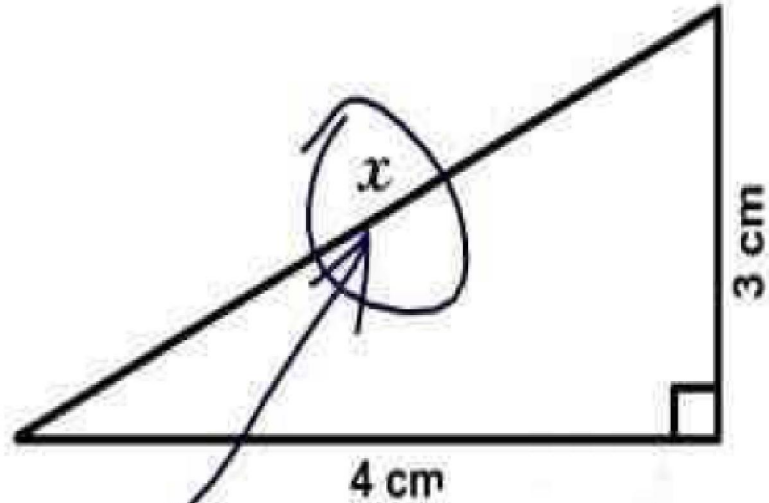
Quelle est la longueur du pont du voilier sur la photocopie ?

Mais ne pas commencer par....

[prix du pétrole](#)

Les difficultés et les erreurs

Trouver X.



Il est là



- y - y est égal à y^2
car moins et moins font plus et
deux y font y^2 !!!



Obstacles épistémologiques et didactiques en algèbre

Le mélange de **lettres** et de **nombres** dans une expression

Les **différents statuts** de la lettre (variable, inconnue, indéterminée)

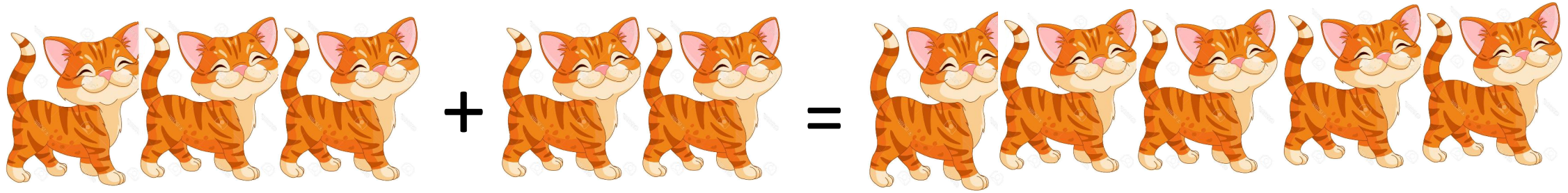
L'emploi de « règles » non comprises, car parfois non justifiées

Le passage d'un membre à l'autre d'une équation

La règle des signes, à l'appui de la métaphore des amis et des ennemis

L'absence de stratégie de calcul (anticipation, organisation, contrôle)

Un exemple d'obstacle didactique



D'où

$$3x + 2x = 5x$$

Mais qu'en est-il de l'équation $5x - 8 = 7 + 2x$

ou de l'identité

$$(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1 ?$$

Les justifications existent, mais elle sont **internes** aux mathématiques.

La manière de conduire la classe (la pédagogie)

- Programmation des séquences (a priori, a posteriori)
- Préparation des séances (régulation)
- Organisation du travail **dans la classe** :
 - Travail individuel ou par groupes (leviers, risques) ; travail écrit, travail oral
 - Temps de recherche/ temps d'entraînement (leviers, risques)
 - Dévolution/Institutionnalisation
 - Les outils : cahiers du jour, cahier de recherche, cahier des références, outils numériques
 - La différenciation (leviers, risques)
 - L'évaluation (travail sur les erreurs)
- Organisation du travail **hors la classe**
 - Apprentissage des leçons (tables, définitions, théorèmes)
 - Exercices d'application, d'entraînement, de révision, devoirs.

Les gestes professionnels

- Différentes postures de l'enseignant (Dominique Bucheton)
 - Posture de **transmission ou d'institutionnalisation**
 - Posture d'**accompagnement** (étayage : leviers et risques)
 - Posture de **lâcher-prise** (laisser les élèves chercher, se tromper, tâtonner)
- Gestion des imprévus
 - accepter des démarches et des solutions **autres** que celle du fichier ou du manuel (ou les siennes propres)
 - Être en capacité de **hiérarchiser** les différentes solutions ou démarches.

Mathématiques et maîtrise de la langue

- **Dire** et **écrire** des mathématiques

Trois plus quatre égale sept plus trois égale dix --> $3+4=7+3=10$

« cinq sur dix plus six sur dix égale onze sur vingt » --> $\frac{5}{10} + \frac{6}{10} = \frac{11}{20}$

- **Comprendre** et **produire** des mathématiques à **l'écrit** et à **l'oral**.

Les nombres décimaux perçus comme des nombres à virgule

- Comprendre que deux expressions différentes peuvent néanmoins être égales :

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

$$(x + 1)(x - 1) = x^2 - 1$$

- Soit un triangle ABC, ...

Métacognition

Apprendre à apprendre

- Apprendre à apprendre une leçon de mathématiques
- Identifier et traiter ses erreurs

- Apprendre à faire des bilans de ses connaissances
- Apprendre à hiérarchiser ses connaissances, à les mettre en liens

- Apprendre à mémoriser ses connaissances et à automatiser des procédures et des stratégies
- Apprendre à s'entraîner, à chercher
- Apprendre à s'auto-évaluer

- Apprendre à organiser son travail, à le planifier
- Installer la confiance en soi et le plaisir d'apprendre

Fiches-bilan



Des outils d'aide

La Proportionnalité

C'est quoi?
C'est lorsqu'on obtient une valeur à partir d'une autre en la multipliant par un même nombre.

Les différentes façons de l'utiliser

- Les produits en croix
- Le retour à l'unité
- Le coefficient de proportionnalité
- La linéarité

On utilise dans la vie pour:

- Thalès
- la cuisine
- les échelles (pour simplifier)
- calculer un prix par kg
- le partage équitable

Pour qu'un graphique soit proportionnel, il doit être comme ceci:

LA PROPORTIONNALITE:

nombre d'unités	3	16	10	5
nombre d'œufs	6	2	20	10

Annotations on the table:
 - Above the first row: $\times 2$ (with arrow from 3 to 6), $\times 2$ (with arrow from 16 to 32), $\times 2$ (with arrow from 10 to 20), $\times 2$ (with arrow from 5 to 10).
 - Above the second row: $\times 2$ (with arrow from 6 to 12), $\times 2$ (with arrow from 2 to 4), $\times 2$ (with arrow from 20 to 40), $\times 2$ (with arrow from 10 to 20).
 - A green box labeled 'Proportionnalité' is above the 10 in the first row.
 - A green box labeled 'linéarité' is below the 20 in the second row.
 - A note says 'Coefficient $\times 2$ de proportionnalité' with an arrow pointing to the 10 in the first row.

SIMPLE PRATIQUE
RETOUR EFFICACE
L'UNITÉ

Fabrication d'anti sèches

Des outils
d'aide

règles n°1: Quand un calcul comporte des parenthèses, on commence par le calcul entre parenthèses.

règles n°2: lorsqu'il n'y a pas de parenthèse dans un calcul on effectue d'abord les multiplications et les divisions, puis les additions et les soustractions.

règles n°3: Dans un calcul sans parenthèses, s'il n'y a que des divisions et des multiplications, j'effectue les calculs dans l'ordre où ils se présentent de gauche à droite.

règle n°4: Dans un calcul sans parenthèse s'il n'y a que des soustractions et des additions, j'effectue les calculs dans l'ordre où ils se présentent.

Dans l'écriture en ligne d'un quotient, les parenthèses sont obligatoires autour du numérateur et du dénominateur.

Fabrication d'anti sèches

Règles de calculs.

$$\underline{2 \times [10 - (3 \times 2) + 5]} - 1 = \text{1}^{\text{er}}, \text{2}^{\text{eme}}, \text{3}^{\text{eme}}, \text{4}^{\text{eme}}$$

Priorité des Opérations

$() ; [] ; \times \div + -$

Si que \times et \div calcul de gauche à droite
 $+$ $-$

Des outils
d'aide

PYTHAGORE Tu sais!
THALES

Journal d'erreurs et de progrès

JEP - Tableau de correction.

Date	Je décris l'erreur.	J'écris comment faire mieux.
26/03	erreurs de calcul: pas d'argumentation	Je devrais ^{argumenter} argumenter en partant des données, des théorèmes puis des calculs
26/03	erreurs de raisonnement	Je devrais souligner les résultats et les conclusions.
26/03	erreurs de calculs	Je devrais écrire les deux calculs.
15/04	erreurs de théorie	Je n'ai pas utilisé le théorème de Pythagore.
15/04	erreurs de raisonnement	Je ne l'ai pas utilisé.
15/04	erreurs de calcul	Je n'ai pas calculer correctement le P.G.C.D.
15/04	erreurs de calcul	Je n'ai pas utilisé le calcul littéral.
15/04	inversement	J'ai inversé abscisses et ordonnées.
15/04	Je n'ai pas appris	La définition d'une fonction.

Je vous remercie de votre attention

Anne Burban
IGEN
Groupe des mathématiques
anne.burban@education.gouv.fr



Liberté • Égalité • Fraternité

RÉPUBLIQUE FRANÇAISE



MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE

igen
Inspection générale
de l'Éducation nationale