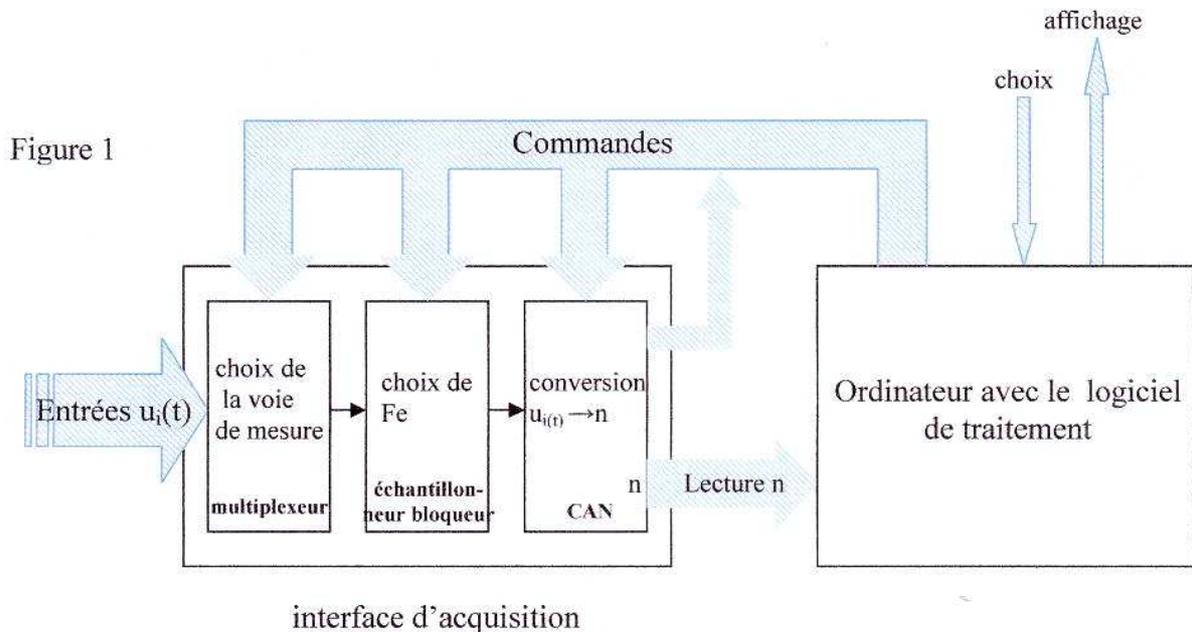


Echantillonnage d'un signal : principe et conditions à satisfaire.

I. Introduction.

L'acquisition d'une grandeur analogique par l'intermédiaire d'une carte d'acquisition possédant plusieurs entrées analogiques peut être décrite par :



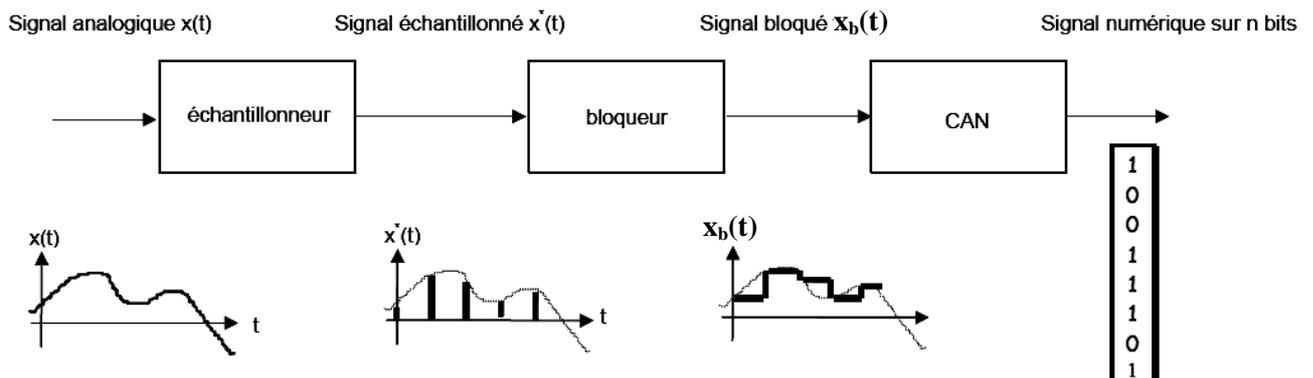
L'échantillonnage consiste à prélever des échantillons du signal présent sur la voie sélectionnée à des instants multiples entiers de la **période d'horloge (ou d'échantillonnage) T_e** .

Ces échantillons, avant d'être convertis en numérique par un convertisseur analogique numérique, sont souvent maintenus constants pendant la période d'horloge. On parle de bloqueur.

On retient :

L'acquisition d'un signal analogique se décompose souvent en trois phases distinctes :

- la prise d'échantillon tous les T_e
- le maintien de la valeur de l'échantillon pendant T_e
- la conversion de la valeur en numérique



Il est évident que c'est la prise d'échantillons qui va conditionner la qualité du signal visualisé.

La visualisation d'un signal analogique avec une carte d'acquisition peut ne pas être conforme à la réalité si la fréquence d'échantillonnage a été mal choisie.

Question à résoudre :

Comment doit-on choisir la fréquence d'échantillonnage ou l'intervalle de temps séparant deux échantillons ?

En théorie :

En pratique :

Pour trouver la réponse à ces deux questions ou la justifier, deux approches sont proposées :

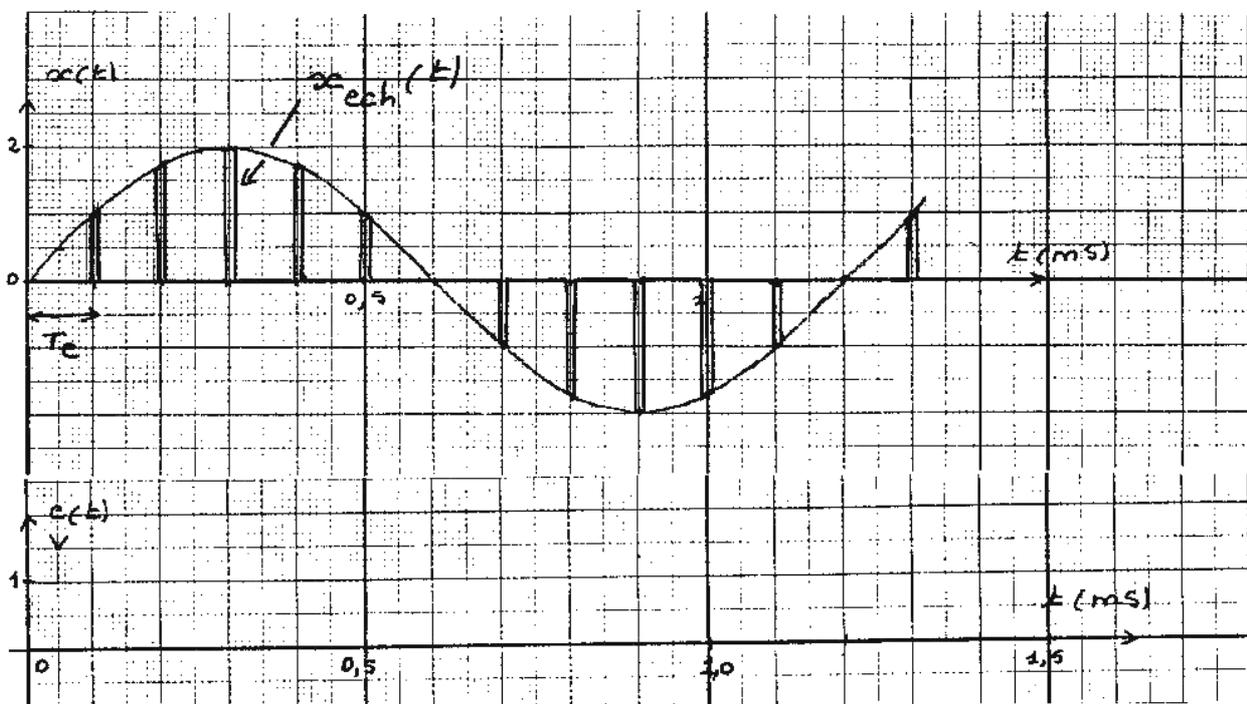
- une approche physique
- une approche plus mathématique

II. Approche « physique » : étude temporelle et fréquentielle des signaux échantillonnés.

II.1 Représentation temporelle des signaux : influence de la fréquence d'échantillonnage.

Partons d'un signal sinusoïdal $x(t)$ sinusoïdal, d'amplitude $X = 2$ V et de fréquence $f = 833$ Hz.

Si on prend des échantillons de ce signal tous les $0,1$ ms, on aboutit au signal $x_{ech}(t)$.

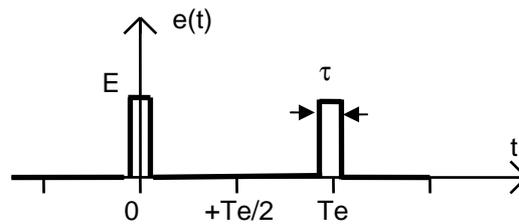


On peut dire que le signal $x_{ech}(t)$ est obtenu à partir de $x(t)$ en le multipliant par un autre signal $e(t)$

$$x_{ech}(t) = K \cdot x(t) \cdot e(t) \text{ avec } K = 1V^{-1}$$

Dessiner $e(t)$ sur le graphe précédent.

$e(t)$ est le **signal d'échantillonnage** de période $T_e = 1/F_e$
Il est défini par :

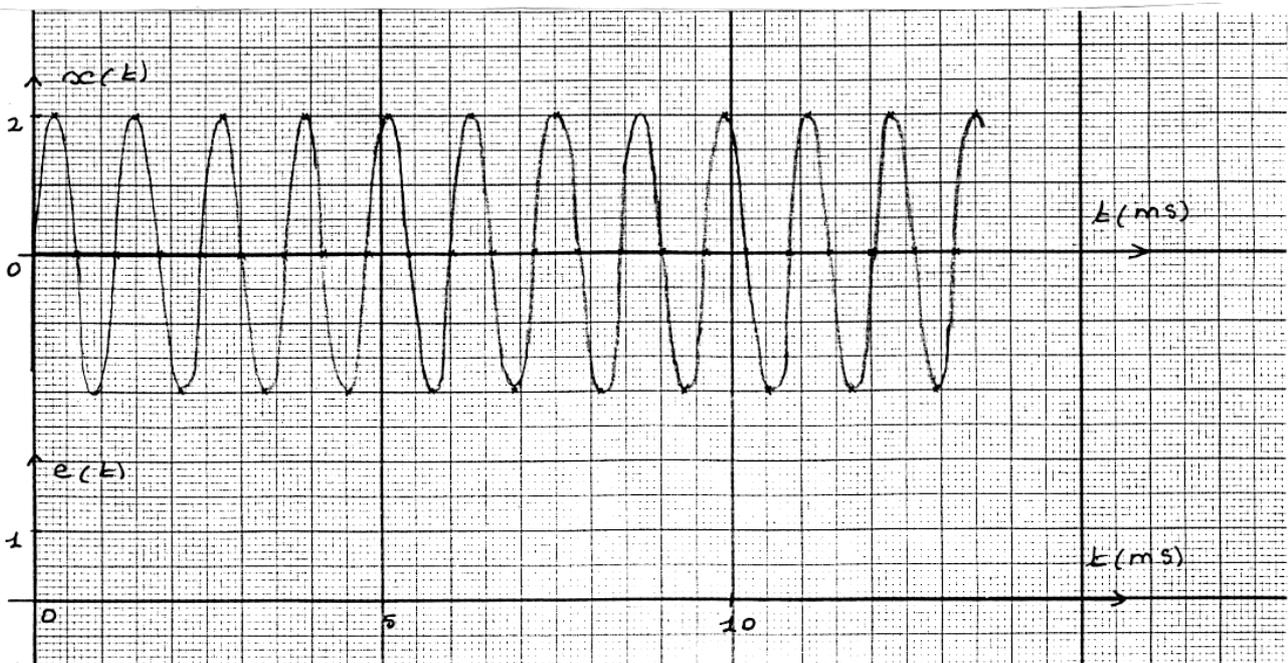


On note τ l'intervalle de temps dans lequel $e(t) = E$.

$$E = 1V \text{ et } \frac{\tau}{T_e} \text{ a une valeur faible (on prendra dans la suite } \frac{\tau}{T_e} = 0,1 \text{)}$$

On garde le même signal $x(t)$ que précédemment mais la fréquence d'échantillonnage est maintenant de $F_e = 1000 \text{ Hz}$.

Représenter $e(t)$ d'une part et $x_{ech}(t)$ d'autre part sur le même graphe que $x(t)$.



On définit un signal analogique sinusoïdal $y_a(t)$ passant par les échantillons constituant le signal $x_{ech}(t)$.
Représenter $y_a(t)$. Donner la fréquence notée f_a de ce signal.
Commenter.

Conclusion.

II.2 Etude fréquentielle des signaux : influence de la fréquence d'échantillonnage.

II.2.1 Etude fréquentielle du signal d'échantillonnage $e(t)$.

Justifier de façon qualitative l'expression suivante de $e(t)$.

$$e(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \cos(n \omega_e t) \quad \text{en notant } \omega_e = \frac{2\pi}{T_e}$$

Donner l'expression littérale de E_0 puis calculer sa valeur numérique.

On donne : $A_n = \frac{2E}{n\pi} \sin\left(n\pi \frac{\tau}{T_e}\right)$

Avec $E = 1\text{V}$ et $\frac{\tau}{T_e} = 0,1$, compléter le tableau ci-dessous :

n	1	2	3
$A_n(\text{V})$			

II.2.2 Etude fréquentielle du signal échantillonné $x_{\text{ech}}(t)$.

En exploitant la décomposition en série de Fourier de $e(t)$, exprimer $x_{\text{ech}}(t)$ sous forme d'une somme de fonctions sinusoidales.

On exploitera $x_{\text{ech}}(t) = K.e(t).x(t)$ avec $K = 1\text{V}^{-1}$ et

- $x(t) = X \sin(\omega t)$
- $e(t) = E_0 + A_1 \cos(\omega_e t) + A_2 \cos(2\omega_e t) + \dots$

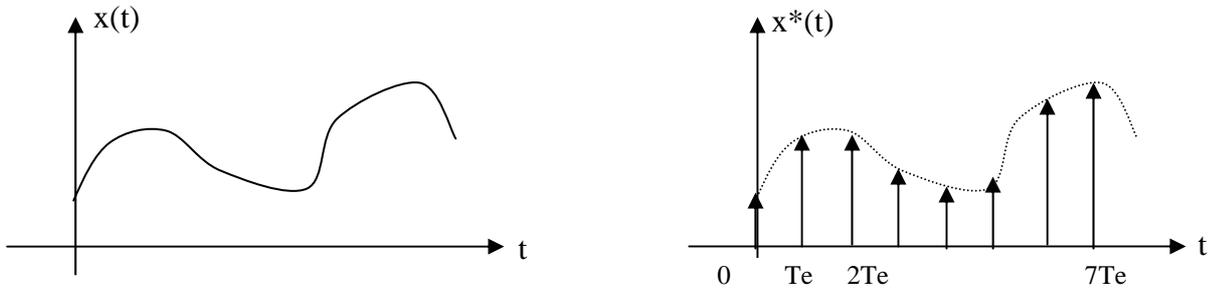
On rappelle la relation suivante : $\sin a \cos b = 0,5 (\sin(a+b) + \sin(a-b))$

On se limitera aux 5 premières composantes sinusoidales et on donnera les expressions littérales des fréquences introduites et des amplitudes correspondantes.

III. Approche mathématique et généralisation.

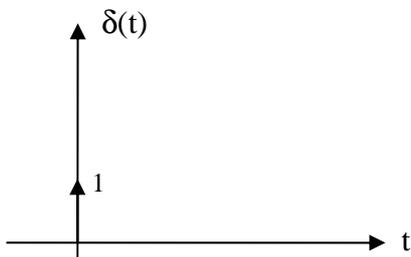
III.1. Expression mathématique d'un signal échantillonné idéal.

L'échantillonnage idéal consiste à remplacer un signal analogique $x(t)$ en une suite de valeurs analogiques $x(0)$, $x(T_e)$, $x(2T_e)$.. $x(nT_e)$.. présentes uniquement à des instants multiples de T_e .



La présence d'une valeur à un instant donné est modélisée mathématiquement par une impulsion de Dirac.

On rappelle que l'**impulsion de Dirac** est mathématiquement définie par :



$$\delta(t) = 0 \text{ sauf en } t = 0$$

$$\int_{t=0^-}^{t=0^+} \delta(t) dt = 1$$

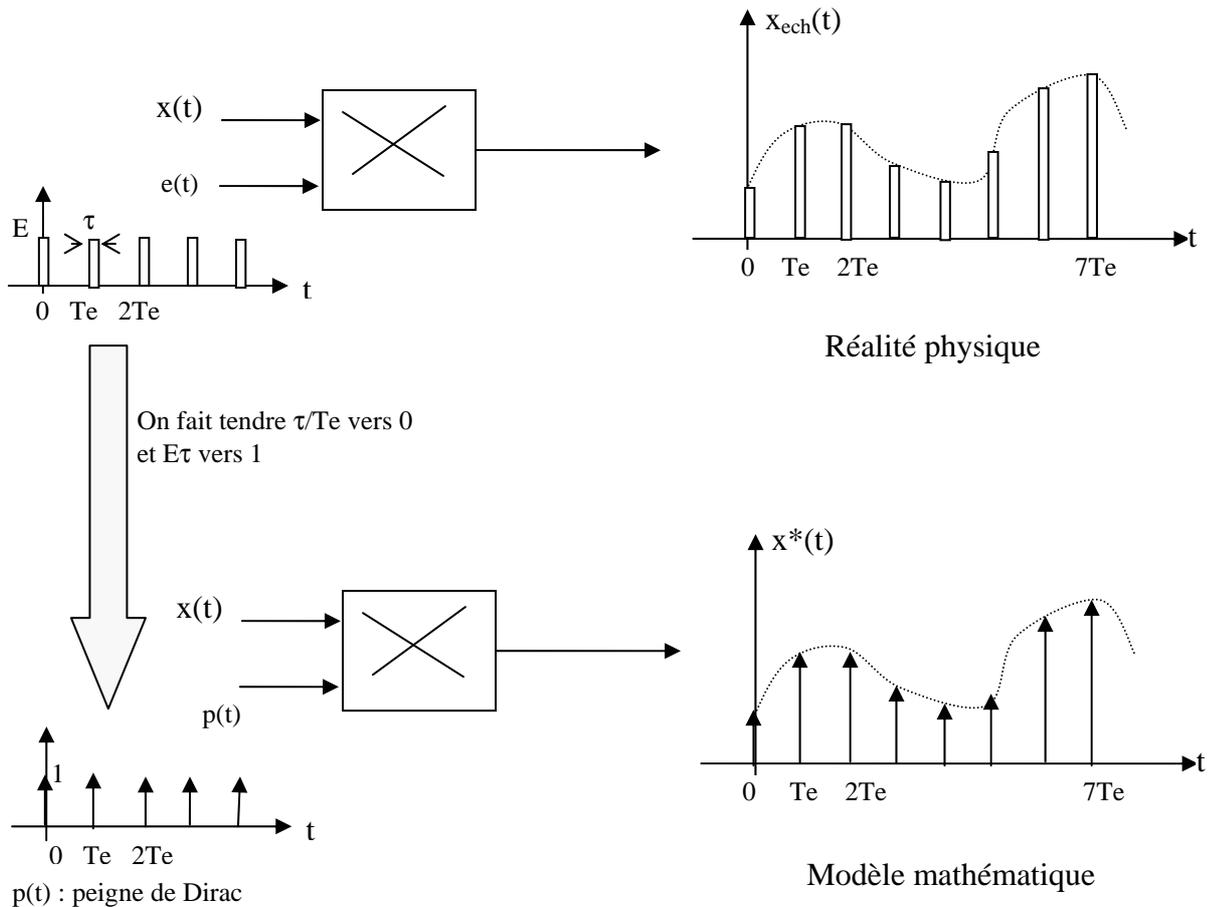
On la représente par une flèche dont la longueur est proportionnelle à l'intensité de l'impulsion.

L'introduction de cette fonction permet de donner une expression instantanée du signal $x^*(t)$ sous la forme :

$x^*(t)$ n'a aucune réalité physique ; ce signal ne pourra jamais être observé sur un oscilloscope mais cette modélisation mathématique est à la base de tous les traitements numériques des signaux (effet d'un algorithme de filtre numérique ...)

III.2 Etude du spectre de $x^*(t)$

III.2.1 Modélisation de la fonction échantillonnage.



Repartons de la décomposition en séries de Fourier de $e(t)$.

$$e(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \cos(n \omega_c t) \quad \text{avec} \quad A_n = \frac{2E}{n\pi} \sin\left(n\pi \frac{\tau}{Te}\right) = \frac{2E\tau}{Te} \frac{\sin\left(n\pi \frac{\tau}{Te}\right)}{n\pi \frac{\tau}{Te}} \quad \text{et} \quad E_0 = \frac{E\tau}{Te}$$

On passe de $e(t)$ (signal d'échantillonnage réel) à $p(t)$ (signal d'échantillonnage idéal appelé aussi peigne de Dirac) en faisant tendre τ/Te vers 0 et $E\tau$ vers 1.

On déduit la décomposition en séries de Fourier de $p(t)$ et le spectre d'amplitude de $p(t)$.

III.2.2 Conséquence: spectre de $x^*(t)$.

$x(t)$ est un signal sinusoïdal de fréquence f .

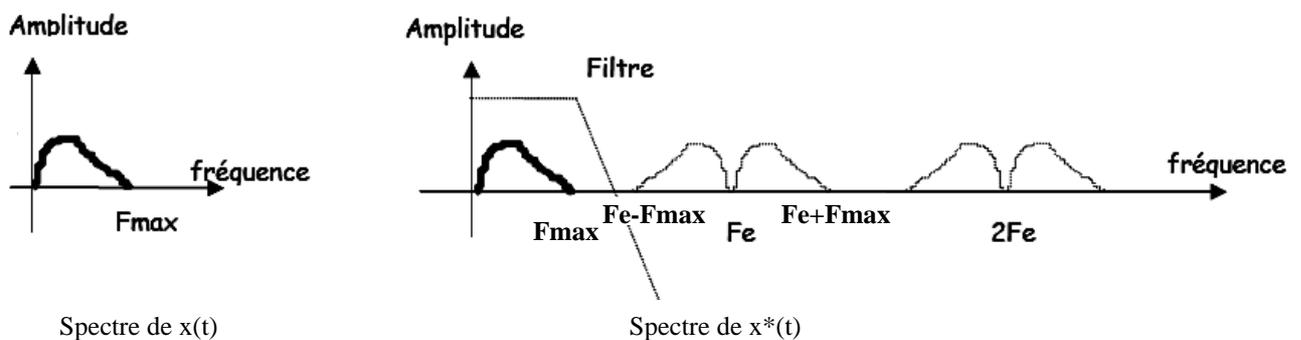
$x(t)$ est un signal quelconque de spectre borné.

III.3 Bilan : condition à respecter pour réaliser un « bon » échantillonnage.

L'opération d'échantillonnage ne doit pas amener une perte d'informations.

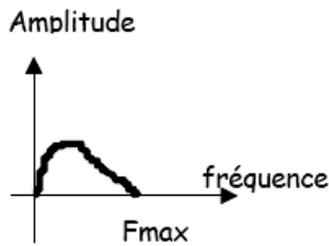
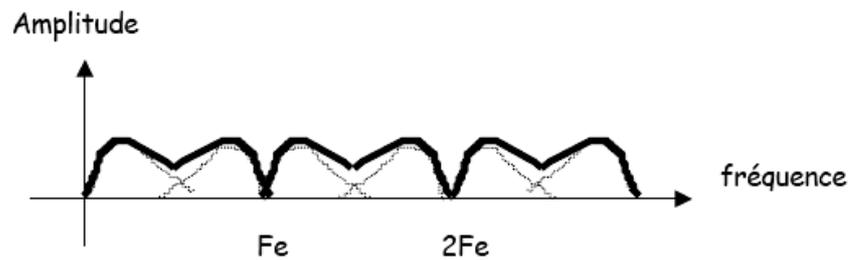
Autrement dit, à partir des échantillons donc du signal $x^*(t)$, on doit être capable de reconstituer le signal $x(t)$ d'origine.

La figure ci dessous montre qu'avec un filtre passe-bas, on est capable d'isoler toutes les raies contenues dans le signal d'origine $x(t)$.



Ce filtrage n'est possible que si $F_{max} < F_e - F_{max}$.

Si cette condition n'est pas respectée, on aboutit à la situation ci-dessous : il y a « recouvrement » des paquets spectraux

Spectre de $x(t)$ Spectre de $x^*(t)$

On retient donc :

Si on ne veut pas perdre d'information lors de l'opération d'échantillonnage, il faut que $F_{\max} < F_e - F_{\max}$.

On retrouve la relation de Shannon : $F_e \geq 2F_{\max}$

Remarque : Exemples de fréquence d'échantillonnage

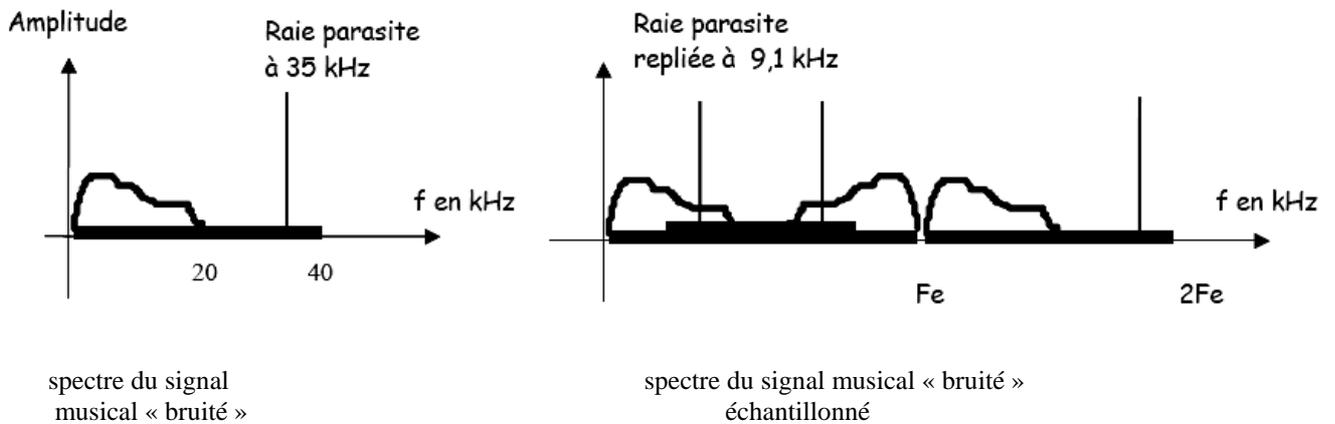
- *En téléphonie, on se contente d'une qualité moyenne, avec des fréquences vocales limitées à la bande de 300 Hz à $F_{\max} = 3400$ Hz.
Dans le cadre du réseau téléphonique numérique, la fréquence d'échantillonnage standard est de $F_e = 8000$ Hz.*
- *La musique nécessite une bande allant de 20 Hz jusqu'à $F_{\max} = 20$ kHz pour une qualité optimale.
Dans le cas du disque CD (Compact Disc) la fréquence d'échantillonnage standard est de $F_e = 44,1$ kHz.
Pour les magnétophones numériques DAT, la fréquence d'échantillonnage est de $F_e = 48$ kHz.
Pour le matériel audio professionnel, la fréquence standard est de $F_e = 96$ kHz.*
- *Un signal vidéo de télévision a une spectre qui s'étend pratiquement du continu jusqu'à $F_{\max} = 5$ ou 6 MHz selon la qualité de l'image.
Dans le cas de la vidéo numérique, la fréquence d'échantillonnage standard est de $F_e = 13,5$ MHz.*

En pratique, un signal provenant d'un capteur est souvent bruité ; des raies parasites « hautes fréquences » se superposent aux raies utiles.

Prenons l'exemple d'un microphone qui fournit un signal électrique composé :

- de la musique dans la bande audible 20 Hz-20 kHz
- d'un bruit électrique à densité spectrale constante dans la bande 0-40 kHz (bruit de fond)
- d'un signal parasite à 35 kHz

L'ingénieur du son qui choisit la fréquence d'échantillonnage à $F_e = 44,1$ kHz respecte la règle de Shannon pour la musique, mais pas pour le bruit, ni pour le signal parasite.



On constate l'apparition dans la bande audio, par repliement de spectre,

- d'un signal parasite de fréquence $44,1 - 35 = 9,1$ kHz qui est devenu audible
- d'une augmentation du bruit provenant du bruit au delà de 20 kHz replié vers les basses fréquences

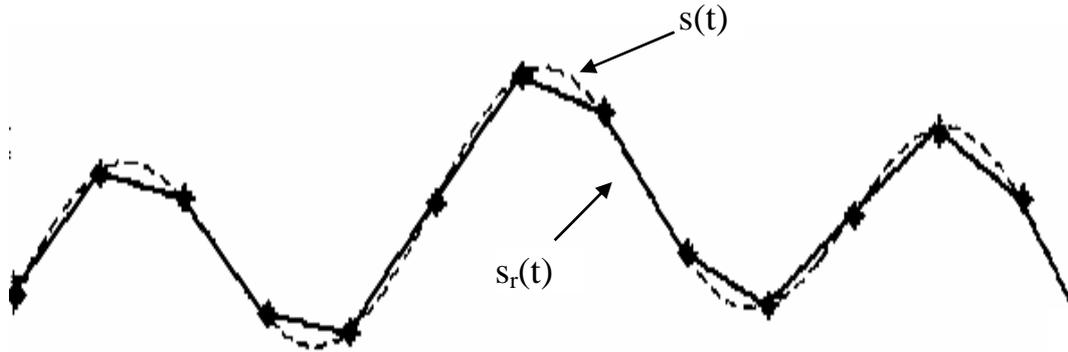
La meilleure façon d'éviter ces problèmes est de placer avant l'échantillonneur un filtre passe-bas atténuant très fortement tous les signaux parasites de fréquences supérieures à $F_e/2$. C'est le filtre anti-repliement.

Restitution du signal analogique

Hypothèse de départ : on dispose d'un signal échantillonné $s^*(t)$ avec la relation de Shannon satisfaite et on désire obtenir un signal $s_r(t)$ reproduisant le plus fidèlement possible le signal $s(t)$ d'origine. Il est nécessaire de faire une interpolation entre deux instants d'échantillonnage.

1. Interpolation linéaire.

On relie les échantillons par une droite (opération identique quand on joint des points expérimentaux pour obtenir un graphe continu)



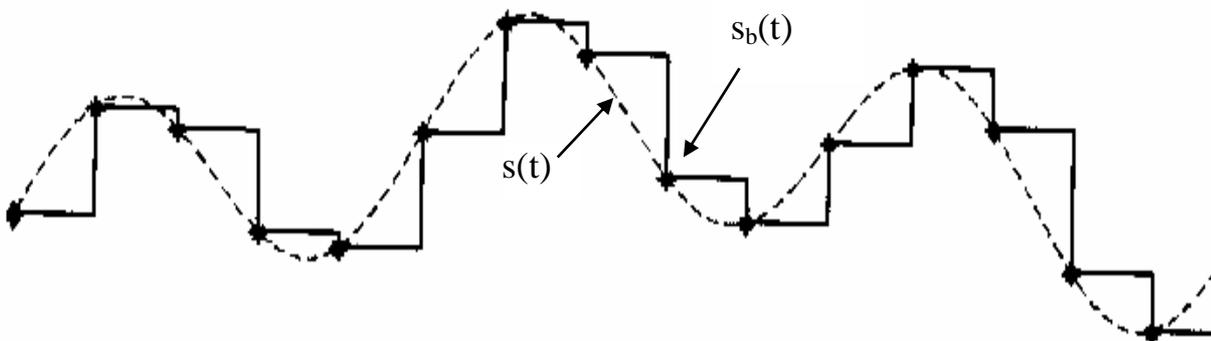
Pour avoir une qualité de reconstitution correcte, il faut utiliser une fréquence d'échantillonnage dix fois supérieure à la limite de Shannon.

Choix pratique : $F_e \geq 10 f_{\max}$

2. Reconstitution par bloqueur suivi d'un filtre passe-bas.

L'échantillon est maintenu constant avant l'arrivée du suivant ; c'est ce qui se produit en sortie d'un convertisseur numérique analogique.

On introduit alors le signal $s_b(t)$ conforme à la représentation donnée ci-dessous.



Un filtre passe-bas appliqué au signal $s_b(t)$ permet de reproduire fidèlement $s(t)$ à condition de choisir :

$F_e \geq 5 f_{\max}$

(voir document annexe)