ACADÉMIE
DE NANTES
Liberté
Égalité
Fraternité

STAGE MATHC2+
DU 24 AU 28 OCTOBRE 2022 À ANGERS

COMPTE-RENDU

Étienne Mann et Daniel Naie ont organisé un stage de mathématiques d'initiation à la recherche sur la "théorie du chaos" du lundi 24 octobre au vendredi 28 octobre 2021 dans les locaux de l'Université d'Angers.
Ce stage s'adressait aux élèves inscrits en enseignement de spécialité mathématiques en classe de terminale et intéressés par les mathématiques, scolarisés dans les lycées publics et privés sous contrat d'Angers. Messieurs Mann et Naie se sont adressés à tous les lycées d'Angers pour motiver les candidatures. De même, l'inspection pédagogique régionale de mathématiques a relayé la tenue du stage (article sur le site académique, paragraphes dans deux lettres d'informations).
Messieurs Mann et Naie ont élaboré un site numérique pour gérer les inscriptions.

1. Organisation

Les 29 stagiaires provenaient de 10 lycées angevins : Bergson (9), Chevrollier (4), Renoir (3), David d'Angers (3), Mongazon (3), Bodin (2), Saint Aubin-La Salle (2), Joachim du Bellay (1), Mounier (1) et Saint Benoit (1).

Les élèves se sont inscrits grâce à l'information apportée soit par leur professeur de mathématiques soit par leur professeur principal.
Les stagiaires ont bénéficié de cours sur

(1) Tous les matins, les stagiaires avaient 3h de cours (soit un total de 12h sur la semaine). Pendant leur stage, ils ont bénéficié aussi d'une séance de TP et de séances de recherche de problèmes.
(2) Les après-midi étaient consacrés aux exposés de travaux de recherche en mathématiques et en informatique par des chercheurs et des chercheuses (dont une doctorante et une post-doctorante)
(3) Le mardi après-midi, Etienne Mann a présenté succintement différents parcours du supérieur : classes préparatoires aux grandes écoles, classes préparatoires intégrées, cursus de double licence, licence. Il a été rejoint pas des étudiants.

2. Programme de "taille"

Messieurs Mann et Naie se sont appuyés sur la vidéo Science étonnante pour que les élèves aient une idée visuelle de la théorie du chaos. Ils avaient tous visualisé cette vidéo avant d'assister au stage.
L'idée du stage était d'étudier l'exemple d'une suite (u_n) définie par récurrence par :
pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f_\alpha(u_n)$ où la fonction f_α est définie par : $f_\alpha(x) = \alpha x(1-x)$ avec $\alpha \in [0, 4]$.

Au début du stage, les stagiaires ont reçu une feuille avec 7 problèmes qu'ils pouvaient chercher pendant la semaine. Ils ont cherché les problèmes par petits groupes le mercredi en exposant leur solution devant les camarades le vendredi. Les problèmes sont issus de la base 2021 du stage.

À la fin du stage, Messieurs Mann et Naie ont demandé aux stagaires d'écrire leurs impressions sur chaque séance. Vous pouvez trouver les éléments de réponse des élèves à cette page.

Planning détaillé

Lundi 24 octobre

9h- 9h30 Salle I 001. Accueil

9h30- 12h20 Salle I 001.(Etienne) Nous travaillerons sur la notion de limite de suite avec des quantificateurs.

14h-16h00 Salle I 103.

(a) Renata Picciotto (post-doctorante) vous présentera un exposé en géométrie énumérative.

(b) Marie Badreau (doctorante) vous présentera un exposé en science des données.

Mardi 25 octobre

9h30 - 12h20 Salle I 001 (Daniel) Travail sur les suites récurrentes pour préparer le TP

14h - 16h Salle I 001. (Etienne + étudiants à partir de 15h20) Orientation dans le supérieur avec participation d'étudiants de double licence math-info.

Mercredi 26 octobre

9h30 - 12h20 Salle I 001. (Etienne et Daniel) Nous étudierons des problèmes géométriques et de combinatoire en petits groupes de 3/4.

14h - 15h30 Salle H 002 . Exposé de Béatrice Duval "apprentissage artificiel" en informatique.

Jeudi 27 octobre

9h30-12h20 Salle L 108. (Etienne, Daniel, Mme Bodin) TP sur la vidéo de science étonnante

14h-15h30 Salle H 002. Exposé d'Adrien Goëffon sur les " algorithmes évolutionnaires" en informatique.

Vendredi 28 octobre

9h30-12h20 Salle I 103. (Etienne et Daniel) Environ 1h de recherche de problème puis mise en commun des solutions.

Problèmes

1. En découpant le plan et l'espace

1) Quel est le nombre maximal de parties obtenues en traçant n droites dans le plan ? Même question en remplaçant les droites par des cercles.

2) Quel est le nombre maximal de parties obtenues en traçant n plans dans l'espace ? Même question en remplaçant les plans par des sphères. Par exemple, en combien de parties peut être divisé l'espace à l'aide de 5 sphères ?

2. En découpant un polygone convexe

On considère un polygone convexe à n côtés.

1) En supposant qu'il n'existe pas trois diagonales du polygone qui soient concourantes, en combien de morceaux est divisé celui-ci si on trace toutes ses diagonales ?

2) De combien de façons différentes peut-on découper un hexagone (heptagone, octogone) en triangles en utilisant des diagonales qui ne s'intersectent pas à l'intérieur du polygone ?

3) De combien de façons différentes peut-on découper un polygone à n côtés en triangles en utilisant des diagonales qui ne s'intersectent pas à l'intérieur du polygone ?

3. Des cordes et des cercles

On considère 20 points fixés sur un cercle. On dessine dix cordes qui relient tous ces points deux par deux. On appelle une telle configuration *libre* s'il n'y a pas deux cordes qui se coupent à l'intérieur du cercle. Combien de configurations libres existe-t-il ?

Résoudre le problème dans le cas général quand il y a $2n$ points et n cordes.

On pourra commencer par regarder un cas plus simple : huit points et quatre cordes, ou même plus simple encore... Y a-t-il une liaison avec le problème précédent ?

4. Le nombre de serpents de longueur 12

Soit n un entier strictement positif. On appelle *permutation* des nombres 1, 2, ..., n toute fonction bijective

$$f : \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}.$$

On remarque que les valeurs de la fonction sont les mêmes nombres lus dans un ordre différent. Par exemple, la permutation

$$\{1, 2, 3, 4, 5\} \longrightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

définie par

$$1 \mapsto 3, \quad 2 \mapsto 5, \quad 3 \mapsto 2, \quad 4 \mapsto 4, \quad 5 \mapsto 1$$

est notée par

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les “ nombres lus dans un ordre différent ” apparaissent sur la deuxième ligne du tableau représentant la permutation.

Une permutation f est appelée un *serpent* si $f(1) < f(2) > f(3) < f(4) > \cdots$. Par exemple la permutation des nombres $\{1, \ldots, 5\}$ ci-dessus est un serpent. Mais

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

ne le sont pas. On se propose de trouver le nombre de serpents de longueur 12.

5. L'empilement

On dispose d'un nombre infini de planchettes en bois (parallélépipèdes rectangulaires) ayant toutes les mêmes dimensions ; on supposera que la longueur vaut un (décimètre), $L = 1$. La largeur et l'épaisseur ne joueront aucun rôle par la suite.

Pour chaque nombre naturel n, on réalise des empilements formés de $n+1$ planchettes, P_0, P_1, $\ldots$, P_n. Chaque planchette P_k dépasse l'extrémité droite de P_{k-1}, la planchette précédente, de x_k (décimètres). Voir Fig. 1.

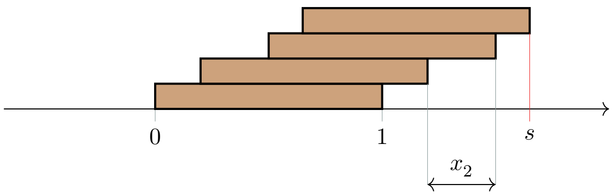

Figure 1: Un empilement avec quatre planchettes, c'est-à-dire pour $n = 3$.

On veut savoir si les différentes valeurs possibles de $s = s_n$ (voir Fig. 1), quand n varie en considérant tous les empilements possibles, sont bornées supérieurement ?

La question porte sur tout nombre de planchettes et sur tout empilement réalisé avec ce nombre de planchettes.

6 − ε. Suites arithmétiques

Soit $\alpha > 0$. On considère la suite arithmétique $(n\alpha)_{n\geq 0}$. On veut comprendre l'évolution des parties fractionnaires de ses termes, c'est-à-dire on pose, pour tout $n > 0$,

$$x_n = \{n\alpha\}.$$

Que peut-on dire des images de cette suite ? Représentent-elles un ensemble fini ou infini ? S'il est infini, est-il dense dans $[0, 1]$?

6. Les puissances de 2

On considère la suite $a_n = 2a_{n-1}$ avec $a_0 = 1$. Montrer que pour tout entier $M = d_r \dots d_1 d_0$ (avec d_j, $0 \leq j \leq r$, ses chiffres en écriture décimales), il existe un terme de la suite qui commence avec tous les chiffres de M.

Par exemple, si $M = 102$, alors $a_{10} = 2^{10} = \underline{102}4$.

7. Périmètre et aire

Est-il possible de construire une forme géométrique au périmètre infini et à l'aire finie ? Pourrait-on, à partir d'une figure, transformer ses côtés de manière à augmenter son périmètre sans augmenter son aire (voire sans la modifier) ?

8. La série $\sum_{n>0} \frac{1}{n^2}$

On se propose de comprendre le comportement de la suite $(x_n)_{n>0}$ définie par

$$x_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

On veut montrer d'abord que cette suite converge et, par la suite, calculer explicitement sa limite.

Par définition,

$$\sum_{n>0} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \right).$$

Quelques suggestions

1) Étudier la monotonie et montrer que $(x_n)_n$ est bornée.
2) Pour le calcul explicite de la limite :
   - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $(\cos\alpha + i \sin\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)$.
   - Utiliser le binôme de Newton et les nombres complexes pour en déduire l'identité

$$\begin{aligned}\sin(n\alpha) &= \sum_{k\geq 0} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \sin^{2k+1}\alpha \, \cos^{n-2k-1}\alpha \\ &= \sin^n \alpha \sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \operatorname{cotan}^{n-2k-1} \alpha.\end{aligned}$$

   - Pour $n = 2m+1$, en déduire que les racines de l'équation

$$\binom{2m+1}{1} x^m - \binom{2m+1}{3} x^{m-1} + \binom{2m+1}{5} x^{m-2} - \cdots = 0$$

sont

$$\operatorname{cotan}^2 \frac{\pi}{2m+1}, \quad \operatorname{cotan}^2 \frac{2\pi}{2m+1}, \quad \operatorname{cotan}^2 \frac{3\pi}{2m+1}, \quad \dots, \quad \operatorname{cotan}^2 \frac{m\pi}{2m+1}.$$

- En utilisant la relation entre la somme des racines et les coefficients d'un polynôme, obtenir la somme ci-dessous.

$$\operatorname{cotan}^2 \frac{\pi}{2m+1} + \operatorname{cotan}^2 \frac{2\pi}{2m+1} + \operatorname{cotan}^2 \frac{3\pi}{2m+1} + \cdots + \operatorname{cotan}^2 \frac{m\pi}{2m+1} = \ldots$$

  De plus, comme $\sec^2 \alpha = 1 + \operatorname{cotan}^2 \alpha$, où $\sec \alpha = 1/\sin \alpha$, on a

$$\sec^2 \frac{\pi}{2m+1} + \sec^2 \frac{2\pi}{2m+1} + \sec^2 \frac{3\pi}{2m+1} + \cdots + \sec^2 \frac{m\pi}{2m+1} = \ldots$$

- Justifier l'inégalité $\sin x < x < \tan x$ pour tout $0 < x < \frac{\pi}{2}$ et conclure.