Stéphane PERCOT – Lycée Rosa Parks – La Roche-sur-Yon

ACADÉMIE DE NANTES
Liberté Égalité Fraternité

Expérimentation pédagogique sur le thème :
Développer l'esprit critique en mathématiques

Autour de la notion de preuve

ou

de l'art de convaincre en mathématiques

Résumé de la ressource
Exemples de situations à faire vivre au lycée pour développer la notion de preuve, l'intérêt de la démonstration et l'esprit critique des élèves.

Expérimentation testée en classe de 2nde GT au lycée Rosa Parks de La Roche-sur-Yon lors d'une séance de 2 heures

Temps 1 : Des exemples de questions « rapides » étudiées par les élèves

Temps 2 : Des exemples de situation qui peuvent laisser à penser que tout est vrai (car un grand nombre de situations sont vraies) mais pour lesquelles un contre-exemple (un peu dur à trouver) prouve que ça ne va pas…

Temps 3 : De l'intérêt de la démonstration

Temps 4 : De la notion de conjecture ou quand les mathématiques vivent (et que l'on n'a pas encore prouvé…)

1) Exemples de situation à faire vivre en classe

(recherche / décision / argumentation / rédaction / interaction / prise de parole orale)

Situation / mise en oeuvre :

- Chaque élève tire au sort une des 7 affirmations ci-dessous et a pour mission de trouver si elle est vraie ou fausse.
- Les élèves doivent s'emparer de l'affirmation, réfléchir à une réponse et préparer/rédiger une argumentation pour convaincre un autre élève (qui travaille sur une autre affirmation).
- Un temps d'échange oral par binôme d'élève est organisé (chaque élève présente l'affirmation qu'il a eu à étudier et essaye de convaincre son interlocuteur de sa réponse « vrai » ou « faux »)

Liste des affirmations proposées

« La somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3 »
« Les nombres premiers sont tous impairs »
« Les nombres entiers ont tous un nombre pair de diviseurs »
« Pour tous nombres réels positifs ou nuls a et b, on a $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$ »
« Le carré d'un nombre impair est un nombre impair »
« Pour tous nombres réels a et b, on a : $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ »
« Pour tous nombres réels a, b et c, on a : $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2abc$ »

Exemples de production d'élèves

Voici quelques traces des travaux d'élèves (qui avaient pour mission de préparer un échange oral avec leur camarade) :

"Pour tous nombres réels a et b, on a $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$"

$a = 4 \quad b = 4$

$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{4} + \sqrt{4} = 4$

$\sqrt{a+b} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} \approx 2{,}83$

$4 \neq 2{,}83$

donc $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$

"Les nombres entiers ont tous un nombre pair de diviseurs"

ex : $36 = 3\times12 = 6\times6 = 1\times36 = 2\times18 = 9\times4$ → 9 diviseurs : impair

36 est un carré parfait, donc un contre exemple. Cette affirmation est donc fausse.

Pour tous nombres réels a, b et c, on a :
« $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2abc$ »

compréhension → la somme de 3 nombre réels au carré est égal a la somme du carré de ces 3 mêmes nombres et au double du produit des 3.

$(1+2+3)^2 = 1^2+2^2+3^2+2(1\times 2\times 3)$

$36 = 14+12$

$36 \neq 26$

Si on remplace a, b et c par les nombres réels 1, 2 et 3 on obtient un contre exemple donc la propriété est fausse.

« Pour tous nombres réels a, b et c on a :
$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2abc$ »

ex

$(1+2+3)^2 \neq 1^2+2^2+3^2+2\times 1+2+3$

$(6)^2 \qquad 1+4+9+2\times 6$

$36 \qquad 1+4+9+12$

26

donc cette propriété est fausse.

"Les nombres premiers sont tous impairs"

Carla

un nombre premier est divisible par un et lui-même dont 5, 7, 13 ; ils sont donc impairs

mais 2 est aussi premier, il est divisible que par un et lui-même et il est pair, c'est un contre exemple.

c'est donc FAUX

Le carré d'un nombre impair est un nombre impair :

$1^2 = 1$ | $7^2 = 49$
$3^2 = 9$ | $9^2 = 81$
$5^2 = 25$ | $11^2 = 121$

A chaque fois que on multiplie un nombre impair par lui même cela se termine toujours par 1, 5, ou 9.

Donc l'affirmation est vrai.

55

Pour tous nombres réels a et b, on a :

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ »

C'est une identité remarquable que l'on connait déjà, on l'a vu en cours et on l'utilise donc l'affirmation est vraie.

ex : $(8+6)^2 = 14^2 = 196$

$(8+6)^2 = 8^2 + 6^2 + 2 \times 8 \times 6 = 64 + 36 + 96 = 196$

"La somme de trois entiers consécutif est un multiple de 3"

~~La propiété est fausse.~~
~~Car~~

Je pense que la propiété est vrai

Exemple

$10 + (10+1) + (10+2) = 3 \times 10 + 3 = 3(10+1)$

$10 + 11 + 12 = 30 + 3 = 30 + 3$

$1+2+3=9$ $\quad$ $10+11+12=33$

$3+4+5=12$ $\quad$ $11+12+13=36$

$5+6+7=18$ $\quad$ $12+13+14=39$

$6+7+8=20$ $\quad$ $13+14+15=42$

$7+8+9=24$ $\quad$ $14+15+16=45$

$8+9+10=27$ $\quad$ $15+16+17=$

$9+10+11=30$

$n_1 + n_2 + n_3$

mes recherche

Conclusion et bénéfices didactiques du temps 1

a) La notion de contre-exemple semble convaincre les élèves et apparait comme opérante pour convaincre qu'une propriété est fausse. Ainsi, lors de la mise en commun qui fait suite aux échanges entre élèves, il apparait que les propriétés :

« Les nombres premiers sont tous impairs »

« Les nombres entiers ont tous un nombre pair de diviseurs »

« Pour tous nombres réels positifs ou nuls a et b, on a $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$ »

« Pour tous nombres réels a, b et c, on a : $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2abc$ »

sont fausses car les élèves ont facilement trouvé un cas qui contredit l'affirmation.

b) Pour les propriétés envisagées comme « vraie » (les trois autres), les arguments sont, à cet instant, variés :

- Multiplicité d'exemples… : le carré de 7 c'est 49 c'est impair… le carré de 13 c'est 169 c'est impair…
- Tentative de disjonction des cas (« le carré d'un nombre finissant par un 1 finit par un 1, le carré d'un nombre finissant par un 3 finit par un 9…)
- Argument type « c'est une propriété du cours donc c'est vrai…. ». « On l'a écrit dans le cours et le prof de maths l'a dit donc c'est vrai… »

2) Des situations « piège »

(recherche / décision / argumentation / rédaction / interaction / prise de parole orale)

Situation / mise en œuvre :

On réitère le procédé en faisant tirer aux élèves une situation parmi les 4 suivantes, avec la même consigne : l'affirmation est-elle vraie ou fausse ? Trouver des arguments pour convaincre votre entourage.

Note : Ces situations paraissent vraies (les premiers essais des élèves peuvent laisser à croire ceci) mais elles sont fausses pour des cas « peu facile à trouver »….

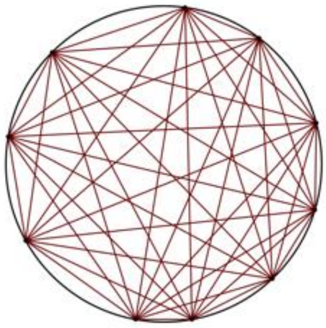
Liste des affirmations proposées

« Si n est un entier alors $n^2 - n + 17$ est un nombre premier »

« Les nombres de Fermat $F_n = 2^{2^n} + 1$ avec n un entier sont des nombres premiers »

« Les nombres de Mersenne $M_n = 2^n - 1$ avec n premier sont des nombres premiers »

« Quand on cherche combien il y a de régions d'un disque déterminées par toutes les cordes joignant des points deux à deux, on remarque qu'on double le nombre de régions quand on rajoute un point »



Exemples de production d'élèves

	A	B	C
1	n	n2-n+17	
2	1	17	est premier
3	2	19	est premier
4	3	23	est premier
5	4	29	est premier
6	5	37	est premier
7	6	47	est premier
8	7	59	est premier
9	8	73	est premier
10	9	89	est premier
11	10	107	est premier
12			
13	C'est vrai		

(réalisé avec ordinateur portable)

« Si n est un entier alors $n^2 - n + 17$ est un nombre premier »

Je pense que c'est ~~vrai~~ ~~faux~~

Nombres premiers : 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 33, ~~38~~ 37, 47, 59, 73

$1^2 - 1 + 17 = 17$ $\quad 2^2 - 2 + 17 = 19$ $\quad 3^2 - 3 + 17 = 23$

$4^2 - 4 + 17 = 29$ $\quad 5^2 - 5 + 17 = 37$ $\quad 6^2 - 6 + 17 = 47$

$7^2 - 7 + 17 = 59$ $\quad 8^2 - 8 + 17 = 73$

$11^2 - 11 + 17 = 127$

~~11 est un contre exemple.~~

Les nombres de Fermat $F_n = 2^{2^n} + 1$ avec n un entier sont

pas valider — des nombre premier

Vraie

"Les nombres de Mersenne $M_n = 2^n - 1$ avec n premier sont des nombres premiers".

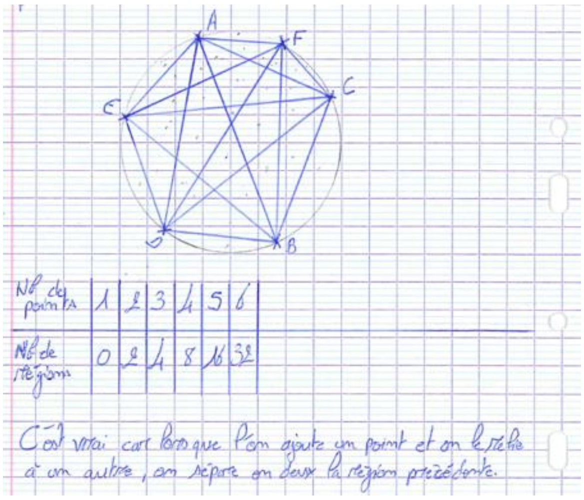
2, 3, 5, 7 .....

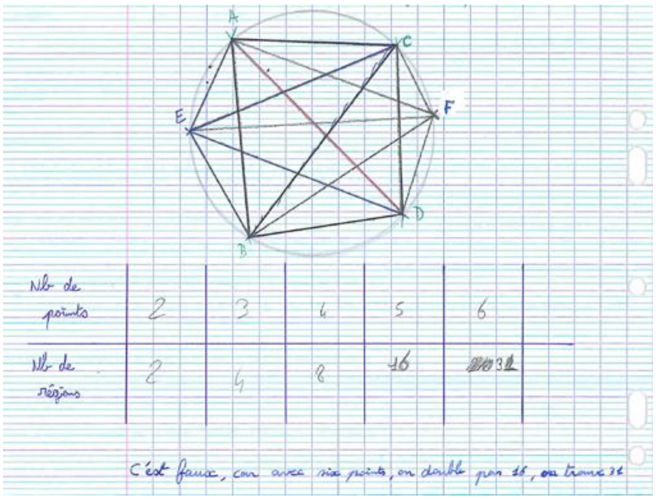
$M_2 = 2^2 - 1$	$M_3 = 2^3 - 1$	$M_5 = 2^5 - 1$
$M_2 = 4 - 1$	$M_3 = 8 - 1$	$M_5 = 32 - 1$
$M_2 = 3$	$M_3 = 7$	$M_5 = 31$

Je pense que c'est vrai mais je n'ai pas reussi à le démontrer.

Conclusion et bénéfices didactiques

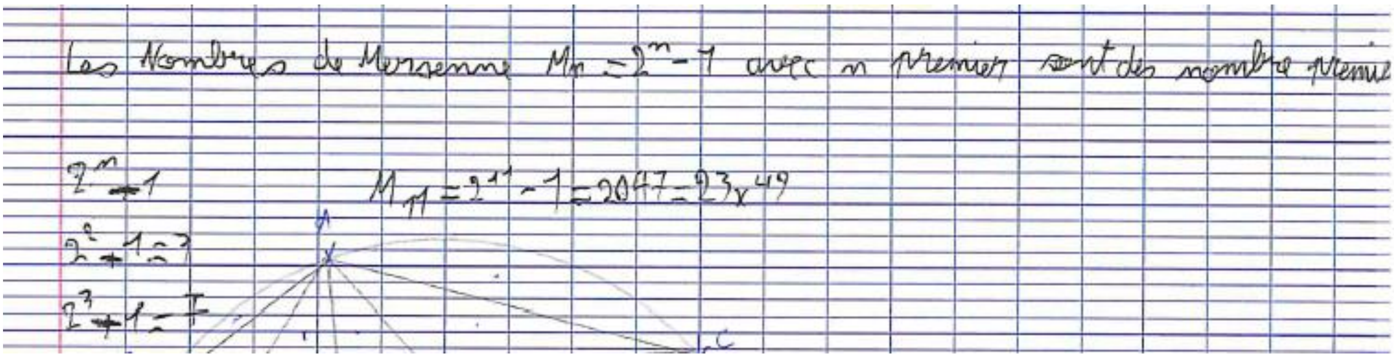
La plupart des élèves n'ont pas trouvé de contre-exemple aux affirmations proposées.
La 4ème situation a donné lieu à un phénomène intéressant : une partie des élèves avaient trouvé 31 régions pour 6 points, d'autres 32 régions car ils « avaient envie » de trouver 32 ou se disaient que 31 étaient une erreur de dénombrement de leur part.





Montrer aux élèves que les contre-exemples étaient difficile à trouver (certains élèves avaient été persévérant ou bien inspirés…) a permis de développer leur esprit critique, leur prudence avec d'affirmer qu'une propriété est vraie.
L'importance d'une démonstration est alors apparue.
La notion de conjecture comme propriété qui semble vraie mais qu'on ne parvient pas à démontrer a été évoquée.

Éléments de correction : Nombre de Mersenne M_{11} non premier



3) Les démonstrations au programme du lycée

En 2^{nde} :

1. Le nombre 1/3 n’est pas décimal.
2. Le nombre racine de 2 est irrationnel.
3. Quel que soit le réel a, la somme de deux multiples entiers de a est un multiple de a.
4. Le carré d’un entier impair est un entier impair.
5. Quels que soient les réels positifs a et b, on a : $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
6. Pour tous réels a et b strictement positifs, on a : $\sqrt{ab} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$
7. Illustration géométrique de l’identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ lorsque a et b sont positifs.
8. Deux vecteurs (du plan) sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.
9. Le projeté orthogonal d’un point M sur une droite Δ est le point de la droite Δ le plus proche du point M.
10. Relation trigonométrique pythagoricienne $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ dans un triangle rectangle.
11. En utilisant le déterminant, établir la forme générale d’une équation de droite, dans le plan.
12. Étudier la position relative des courbes d’équation $y = x$; $y = x^2$; $y=x^3$ pour $x \geq 0$
13. Sens de variation des fonctions carré, inverse et racine carrée.

4) De la notion de conjecture : Goldbach, Syracuse et leurs amis…

Prolongement : montrer aux élèves des situations qui semblent vraies ou des problèmes dont on connait la réponse mais que les mathématiques n’ont pas encore démontrées (notion de **conjecture**…)
Dire que les **mathématiques sont vivantes**….

La conjecture de Goldbach
« Tout entier pair supérieur ou égal à 4 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers. »

La conjecture de Syracuse
Une suite de nombres est définie de la façon suivante :
- on choisit un entier strictement positif u_0.
  - si u_0 est pair, on pose $u_1 = u_0/2$. Sinon, on pose $u_1 = 3u_0 + 1$.
  - si u_1 est pair, on pose $u_2 = u_1/2$. Sinon, on pose $u_2 = 3u_1 + 1$.
- on procède de la même façon pour construire u_{n+1} à partir de u_n.

La conjecture de Syracuse consiste à affirmer que pour n'importe quelle valeur de u_0, la suite correspondante prendra la valeur 1 à un certain moment.

La conjecture de Fermat (démontrée en 1994)
La conjecture de Fermat, consistait à dire que quel que soit l'exposant entier $n > 2$, il est impossible de trouver des entiers non nuls a, b, c tels que $a^n + b^n = c^n$.

La quadrature du cercle (démontrée en 1882)
Le problème de la quadrature du cercle est un très vieux défi géométrique : il consiste, étant donné un disque, à essayer de construire, à l'aide d'un compas et d'une règle (non graduée) seulement, un carré dont l'aire est égale à celle du disque donné.