MATh.en.JEANS – Collège Ernest Renan 2023-2024 :

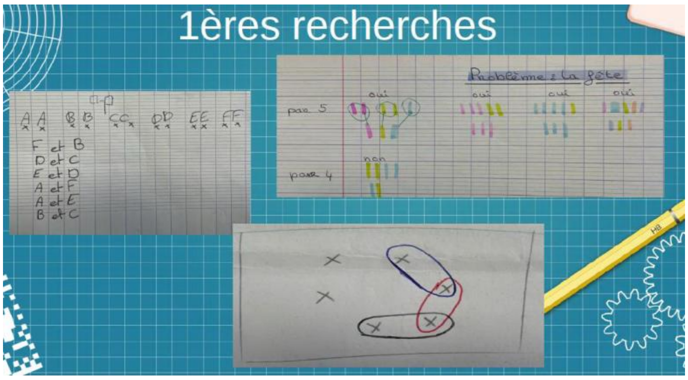
Les élèves du collège Ernest Renan (REP, Saint-Herblain, 44 800) ont planché sur 4 sujets différents cette année. Les sujets ont été conçus par un doctorant du département Mathématiques de l'Université de Nantes. Les élèves -très majoritairement des filles- ont choisi un problème, ensuite travaillé en groupes de 2 à 4 élèves pendant 6 mois, à raison de 45 minutes le jeudi midi. Accompagnés par 3 professeurs de mathématiques de l'établissement chaque semaine, et ponctuellement par le doctorant à l'initiative des problèmes, ils ont ensuite présenté leur travail lors du congrès MATh.en.JEANS des 17 et 18 mai.

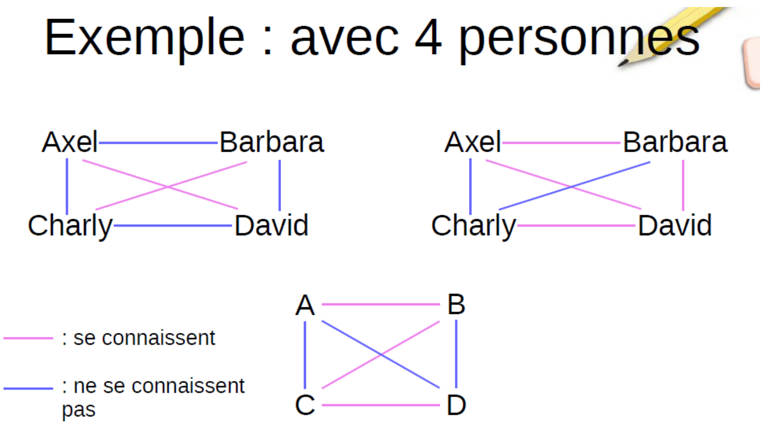
Voici une brève présentation de leurs travaux. Pour plus de détails, se référer aux diaporamas construits par les élèves et qui ont été les supports utilisés lors des présentations orales faites au moment du congrès.

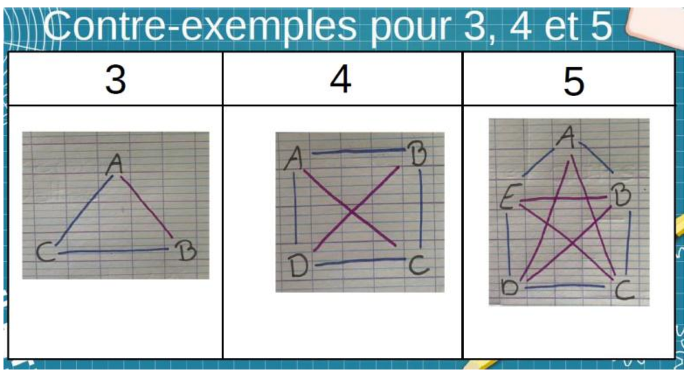
1) Ta fête :

Vous invitez aléatoirement des personnes à votre anniversaire. Combien de personnes faut-il inviter pour être sûr d'avoir au moins un groupe de 3 personnes qui se connaissent (ou ne se connaissent pas) mutuellement ?

Après de premiers essais pour s'approprier la situation, en représentant à l'aide de croquis la situation, les élèves sont assez rapidement entrés dans ce problème.

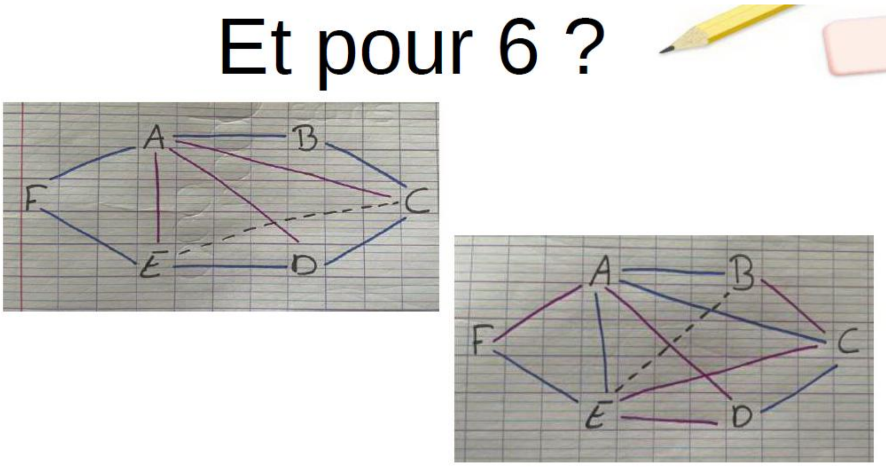




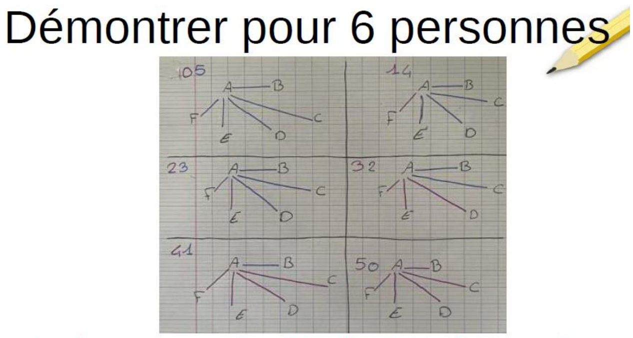


Elles ont traité rapidement les cas de 3 ; 4 ; 5 personnes, en montrant qu'il existait pour chacun de ces cas des contre-exemples.

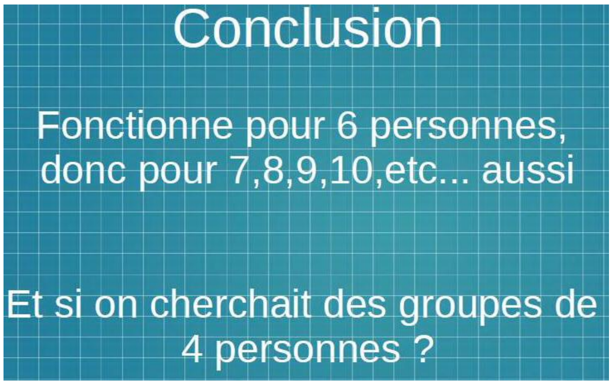
Le cas de 6 personnes a été déterminant pour la suite de leur recherche. En effet, après de multiples tentatives, les élèves ont acté l’idée que :
- soit il n’y avait pas de solution pour 6 personnes...
- soit il y avait une solution, mais la démarche de recherche par essai-erreur n’était pas satisfaisante car il y avait énormément de possibilités à tester (32 768 selon leurs calculs).



Les élèves ont bien compris que dans le cas de 6 personnes, une personne a 5 « connexions » : pour chacune des 5 autres personnes, soit elle la connaît, soit elle ne la connaît pas. Il y a alors au moins 3 connexions du même type (voir ci-dessous). Dans les schémas ci-dessus, quelle que soit la couleur du trait en pointillés, il y a un triangle dont les 3 côtés sont de la même couleur.



Il y a toujours au moins 3 traits de même couleur qui partent de chaque point



2) Traders en herbe :

Vous êtes n joueurs et chacun de vous a un nombre fétiche entre 1 et n. Deux joueurs ne peuvent pas avoir le même nombre fétiche. Vous tirez aléatoirement 1 carte dans un paquet contenant n cartes numérotées de 1 à n. Votre but est que tous les joueurs obtiennent leur nombre fétiche. Pour ce faire vous pouvez faire des échanges entre vous.

1) Pouvez-vous réussir en n'effectuant que des échanges deux à deux ? Si oui, proposez une stratégie qui marcherait pour tout nombre de joueurs.

2) Pouvez-vous réussir en n'effectuant que des échanges par groupes de trois ? Si oui, proposez une stratégie qui marcherait pour tout nombre de joueurs.

Les échanges deux à deux

Les élèves (au nombre de 4 dans ce groupe) ont commencé à expérimenter en jouant avec un jeu de cartes :
- ils prennent chacun une carte « cœur » (par exemple 1, 2, 3 et 4).
- ils sélectionnent les 4 cartes correspondantes en « carreau », les mélangent et se les distribuent au hasard.
- ils procèdent à une série d'échanges deux par deux des cartes « carreau » avec l'objectif d'obtenir au final le même numéro que leur carte « cœur ».

Assez rapidement, les élèves constatent qu'ils réussissent systématiquement à obtenir la carte qu'ils souhaitent après quelques échanges. Ils ont ensuite essayé avec un plus grand nombre de joueurs et constatent qu'ils y parviennent à chaque fois.

Afin de s'assurer que c'est systématiquement possible, les élèves ont mis au point une stratégie basée sur 4 règles :
- tous les joueurs s'alignent en rang.
- on commence systématiquement par le joueur de gauche.
- on ne procède qu'à des échanges « utiles », c'est à dire qui font au moins un joueur satisfait.
- dès qu'ils sont satisfaits, les joueurs quittent la rangée.

Concrètement, le joueur le plus à gauche (J1) s'avance et demande au joueur (J2) possédant le numéro qu'il souhaite de s'avancer. Les deux joueurs échangent leurs numéros et le joueur (J1) quitte le rang. Il peut arriver que le joueur (J2) récupère au passage le numéro qu'il souhaite. Dans ce cas, il quitte le rang également.

À chaque échange, il y a au moins un joueur satisfait et au dernier échange les deux derniers joueurs sont forcément satisfaits. Cette stratégie fonctionne donc quel que soit le nombre de joueurs.

→ Comptabilisation du nombre d'échanges nécessaires

On note x le nombre maximal d'échanges nécessaire.

On note n le nombre de joueurs.

La formule est : $$x = n - 1$$

x est le nombre **maximal**

(le nombre d'échanges nécessaires est soit égal soit inférieur à x)

Les échanges trois à trois

Dans le cadre des échanges 3 par 3, les joueurs sont à nouveau alignés en rang. 3 Joueurs s'avancent et procèdent à un échange selon le schéma ci-contre.

Assez rapidement, les élèves se sont rendu compte que la recherche d'une stratégie est plus compliquée dans ces conditions.

Ils ont donc mis en place une méthode de recherche plus organisée sous la forme d'un tableau.

Les premiers échanges sont efficaces, il est possible à chaque fois de rendre au moins 2 joueurs satisfaits (parfois 3).

Mais lors des derniers échanges il arrive que la situation soit bloquée. Les élèves n'ont pas réussi à définir précisément ces situations, mais ils ont remarqué que s'il ne reste que 1 ou 2 élèves insatisfaits lors du dernier échange cela ne peut pas fonctionner.

→ Une méthode de recherche plus organisée

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6	3	1	5	4	2				
1	6	3	5	4	2				
1	2	3	6	4	5				
1	2	3	4	5	6				

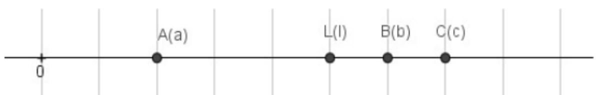
3) Une nouvelle librairie en ville :

> Vous êtes le maire d'une ville de 3 habitants, Adrien, Benoît et Clément, vivant le long d'une route. Vous voulez y construire une nouvelle librairie pour faire plaisir aux habitants. Chaque habitant sera d'autant plus content que la librairie sera proche de sa maison. Vous demandez à chaque habitant de mettre un drapeau sur l'emplacement qu'il préférerait. La librairie sera construite à l'emplacement moyen des drapeaux.
>
> 1) Si Clément connaît les préférences des autres, a-t-il intérêt à mentir sur la sienne ?
> 2) Si Clément ne connaît pas les préférences des autres, mais qu'il connaît le résultat d'un sondage effectué auprès de tous les habitants, où tout le monde a été honnête, a-t-il encore intérêt à mentir ?
> 3) Proposez une nouvelle méthode pour sélectionner l'emplacement de la librairie qui serait moins vulnérable face à Clément.
> 4) Généralisez les questions précédentes pour une ville avec plus d'habitants.
> 5) En restant à 3 habitants, généralisez les questions 1 et 2 au cas où les habitants vivent non plus le long d'une route, mais dans une ville plus classique dans le plan.

Les élèves se sont vite emparés de ce problème, en schématisant très rapidement la route décrite dans l'énoncé par une droite graduée. Après de premiers exemples permettant de se faire une idée précise de ce qui se jouait, la bascule vers la généralisation pour une abscisse quelconque s'est rapidement opérée. L'utilisation de la lettre a été naturelle.

Modélisation sur une droite : notations

- Emplacement du drapeau d'Adrien : point A d'abscisse a
- Emplacement du drapeau de Benoit : point B d'abscisse b
- Emplacement du drapeau de Clément : point C d'abscisse c



→ Emplacement de la librairie : point L d'abscisse l

l est la moyenne de a, b et c.

Modélisation sur une droite : exemple

Exemple avec A(2), B(6) et C(7)

$$l = \frac{2+6+7}{3} = \frac{15}{3} = 5$$

L'abscisse du point L est 5.

1ère Question : modélisation par une équation

- Calcul de l si Clément est honnête : $\frac{a+b+c}{3} = l$
- Calcul de l si Clément ment : $\frac{a+b+x}{3} = l = c$

$$\Downarrow$$

$$a+b+x = 3c$$

$$\Downarrow$$

$$x = 3c - a - b$$

Ils en ont conclu que Clément peut toujours faire en sorte que la librairie se retrouve devant chez lui. Quelle que soit la position des trois maisons, il peut produire un mensonge efficace.

2ème Question :

Si Clément ne connaît pas les préférences des autres, mais qu'il connaît le résultat d'un sondage effectué auprès de tous les habitants, où tout le monde a été honnète, a-t'il encore intérêt à mentir ?

Sondage :

(tout le monde est honnête)

M : résultat du sondage

$$\frac{a+b+c}{3} = M$$

$$a+b+c = 3M$$

$$a+b = 3M - c$$

Position du drapeau idéale pour Clément :

$$x = 3c - a - b$$

$$x = 3c - (a+b)$$

$$x = 3c - (3M - c)$$

$$x = 3c - 3M + c$$

$$x = 4c - 3M$$

3ème question

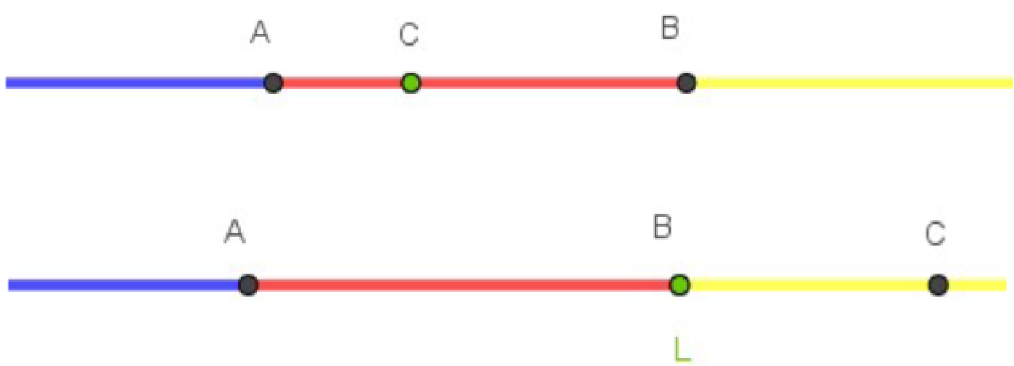
Proposez une nouvelle méthode pour sélectionner l'emplacement de la librairie qui serait moins vulnérable face à Clément.

Pour trouver une méthode de sondage moins vulnérable face au mensonge de Clément, trouver l'idée de la médiane a été plus laborieux dans un premier temps. Cette stratégie supposait en effet de réfléchir vraiment différemment pour aborder le problème. Après avoir proposé le « hasard » (qui aurait certes été pénalisant pour Clément...mais également pour tous les autres habitants), l'idée a finalement fait son chemin.

Proposition : **la médiane** →

Exemple :

La médiane de 2 ; 6 ; 7 est **6**



Dans la première configuration, la librairie est naturellement placée en C. Clément n'a donc aucun intérêt à mentir.
Dans la deuxième configuration (C n'est pas entre A et B), la librairie vient se placer en B.
1/ si Clément vient positionner son drapeau dans la zone jaune, la librairie ne bouge pas.
2/ si Clément vient positionner son drapeau dans la zone rouge, la librairie vient se placer sur son drapeau (point X) ce qui l'éloigne du point C.
3/ si Clément vient positionner son drapeau dans la zone bleue, la librairie vient se placer en A ce qui l'éloigne du point C.

4ème question

Généralisez les questions précédentes sur une ville avec plus d'habitants.

La généralisation du problème de 3 habitants vers n habitants a été limpide pour les élèves, qui ont compris que cela ne changeait pas fondamentalement l’esprit du problème.

Moyenne pour n habitants

$$\frac{\overbrace{a+b+d+e+\ldots+x}^{n\ habitant}}{n}=c$$

$$\Downarrow$$

$$x=nc-(a+b+d+e+\cdots)$$

Le seul cas pour lequel Clément a intérêt à mentir est celui où le nombre d'habitants est pair et

Médiane pour n habitants

Nombre impair d’habitants (exemple : n=5) → 3 cas possibles

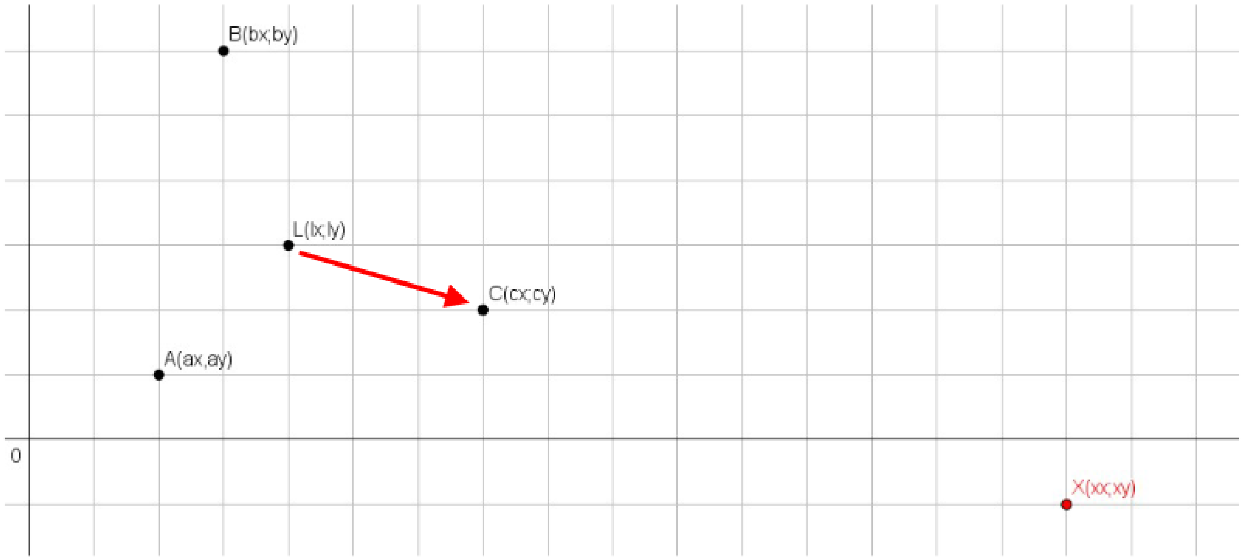
Nombre pair d’habitants (exemple : n=6) → 3 cas possibles

que le point C est un des deux points occupant la position « centrale ». En déplaçant son drapeau vers le point B, Clément peut attirer la librairie vers le point C.

5ème Question :

En restant à 3 habitants, généralisez les questions 1 et 2 au cas où les habitants vivent non plus le long d'une route, mais dans une ville plus classique dans le plan.

Nouvelles coordonnées : $A(a_x\,;a_y)$ $B(b_x\,;b_y)$ $C(c_x\,;c_y)$ $X(x_x\,;x_y)$ $L(l_x\,;l_y)$



En restant à 3 habitants, généralisez les questions 1 et 2 au cas où les habitants vivent non plus le long d'une route, mais dans une ville plus classique dans le plan.

Nouvelles coordonnées : $A(a_x\,;a_y)$ $B(b_x\,;b_y)$ $C(c_x\,;c_y)$ $X(x_x\,;x_y)$ $L(l_x\,;l_y)$

Coordonnées de X en 2 dimensions :

Abscisse : $$\frac{a_x+b_x+x_x}{3} = c_x \quad \Longrightarrow \quad x_x = 3c_x - a_x - b_x$$

Ordonnée : $$\frac{a_y+b_y+x_y}{3} = c_y \quad \Longrightarrow \quad x_y = 3c_y - a_y - b_y$$

4) Une histoire de boîtes :

Vous êtes une équipe de 4 joueurs devant l'entrée d'une pièce. Celle-ci contient 4 boîtes fermées. Chacun de vos prénoms est inscrit sur l'une des boîtes. Vos prénoms sont également écrits sur 4 papiers (1 prénom par papier), distribués aléatoirement dans les boîtes (1 papier par boîte).
Chacun votre tour, vous entrez dans la pièce et ouvrez 2 boîtes de votre choix, dans l'ordre de votre choix. Vous en lisez le contenu, puis les refermez. Vous sortez ensuite de la pièce du côté opposé à l'entrée, en laissant tout exactement comme vous l'avez trouvé. Vous ne pouvez pas interagir avec vos coéquipiers.
L'équipe gagne si tous les joueurs trouvent leur propre prénom dans les boîtes. Avant de commencer, vous pouvez vous concerter pour choisir une stratégie.

1) Proposez des stratégies et calculez (ou estimez) les chances de victoire correspondantes. Vous pourrez tester les performances de vos stratégies en faisant des simulations sur ordinateur.

2) Même question avec un plus grand nombre de joueurs. Pour n joueurs, chacun ouvrira $\frac{n}{2}$ boîtes.

Les élèves qui ont choisi d'étudier ce problème étaient très enthousiastes au départ de la recherche. L'énoncé ludique les a aidées à se projeter dans la situation, avant de réaliser que le contenu mathématique sous-jacent n'était pas trivial. Elles ont pendant de nombreuses séances eu besoin de représenter la situation pour se réapproprier le problème.

Pour aider à cette représentation, les élèves ont été incitées, pour commencer, à représenter la situation avec un seul tirage par joueuse.

Pour bien comprendre - 1 tirage par joueur

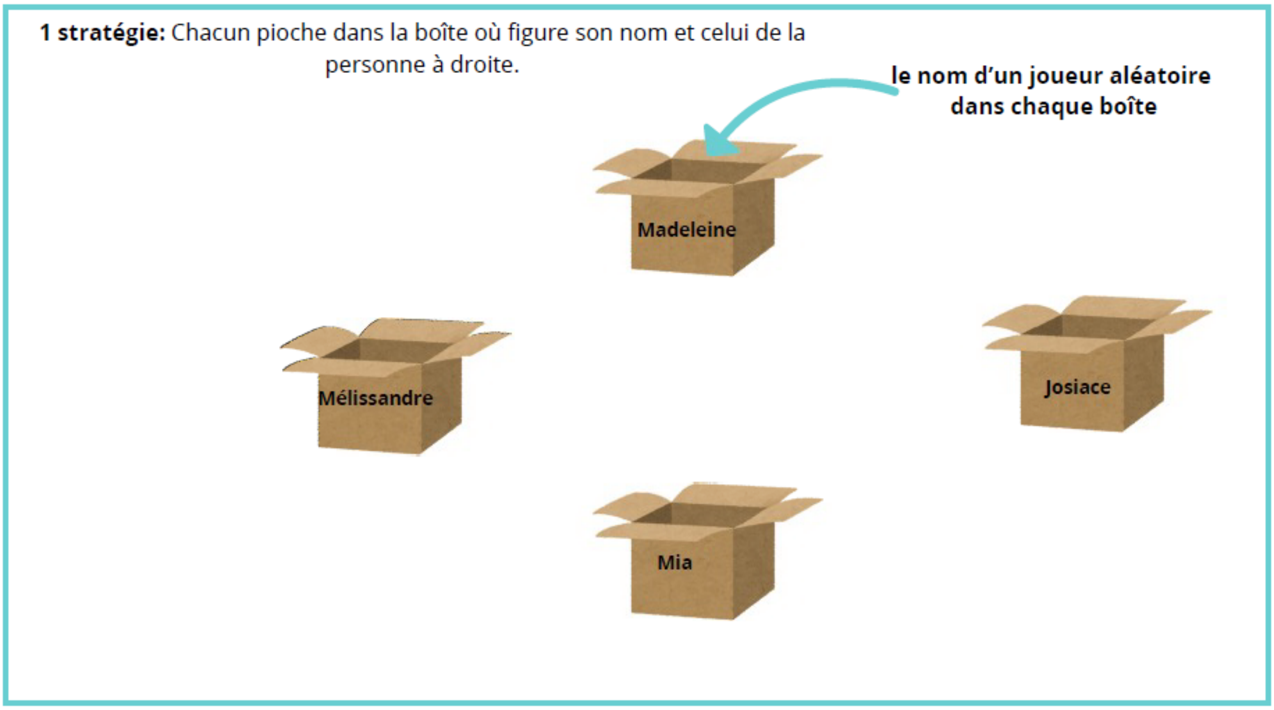
1 1 1 1	1 1 2 1	1 1 3 1	1 1 4 1
1 1 1 2	1 1 2 2	1 1 3 2	1 1 4 2
1 1 1 3	1 1 2 3	1 1 3 3	1 1 4 3
1 1 1 4	1 1 2 4	1 1 3 4	1 1 4 4
1 2 1 1	1 2 2 1	1 2 3 1	1 2 4 1
1 2 1 2	1 2 2 2	1 2 3 2	1 2 4 2
1 2 1 3	1 2 2 3	1 2 3 3	1 2 4 3
1 2 1 4	1 2 2 4	1 2 3 4	1 2 4 4
1 3 1 1	1 3 2 1	1 3 3 1	1 3 4 1
1 3 1 2	1 3 2 2	1 3 3 2	1 3 4 2
1 3 1 3	1 3 2 3	1 3 3 3	1 3 4 3
1 3 1 4	1 3 2 4	1 3 3 4	1 3 4 4
1 4 1 1	1 4 2 1	1 4 3 1	1 4 4 1
1 4 1 2	1 4 2 2	1 4 3 2	1 4 4 2
1 4 1 3	1 4 2 3	1 4 3 3	1 4 4 3
1 4 1 4	1 4 2 4	1 4 3 4	1 4 4 4

Si on fait 4*4*4*4= 4^4 =256

$\frac{1}{256}$

= 0,00390625 = 0,390625%

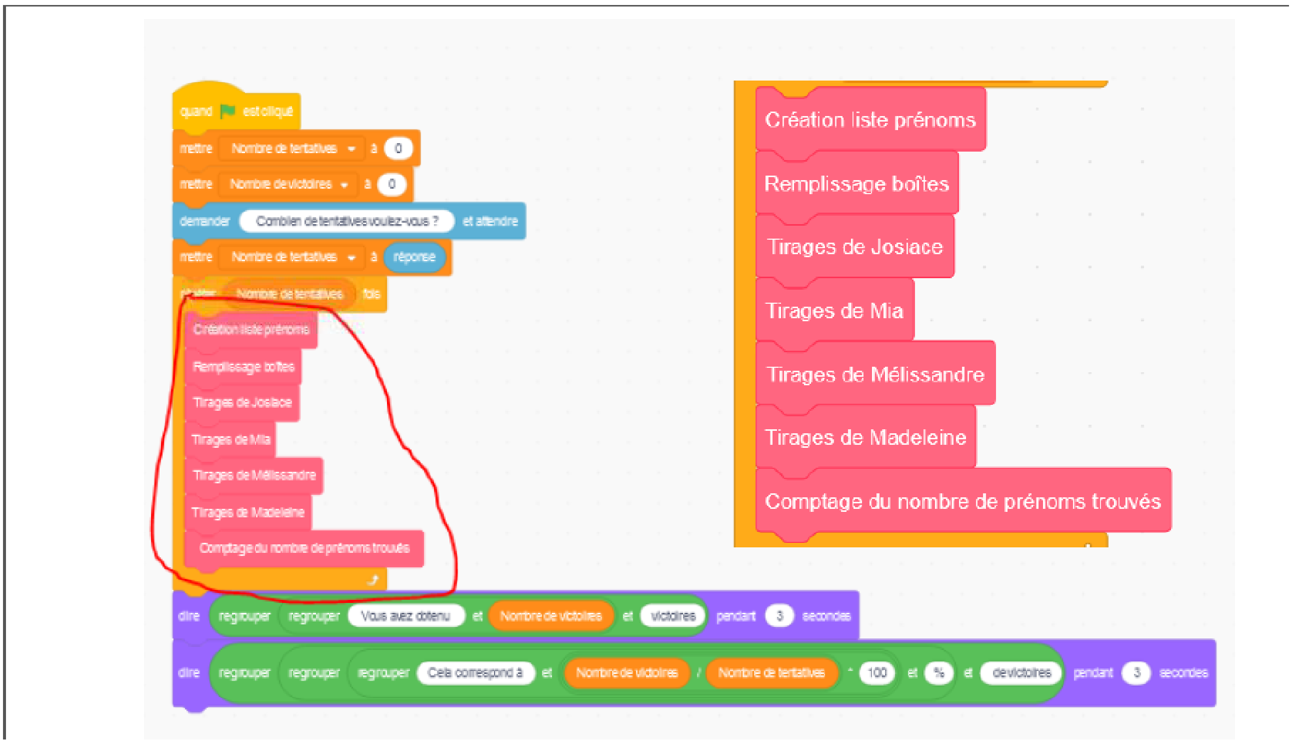
Quand elles sont revenues à l'idée initiale de 2 tirages successifs par joueuse, elles ont eu l'idée d'une stratégie qui optimise les tirages des joueuses en ce sens que chacune des 4 boîtes est ouverte 2 fois. Elles ont ainsi « rentabilisé » les tirages.



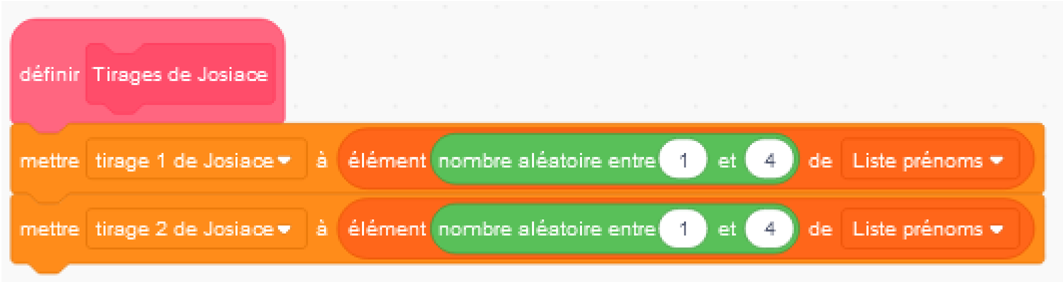
Le doctorant, quand il est venu lors d'une séance, a confirmé qu'il s'agissait là d'une stratégie optimale.

Sans être en mesure de la démontrer, les élèves sont passées sur Scratch pour pouvoir simuler un grand nombre de fois l'expérience. Elles ont très bien appréhendé la loi des grands nombres pour expliquer leur démarche.

Le programme Scratch étant compliqué à construire, une aide leur a été apportée dans l'organisation des idées.



Le cœur du script figure dans les blocs « tirages ». Voici les 4 niveaux successifs de stratégies.
- le niveau 1, qui n'est là concrètement que pour « prendre en main » la notion de tirage aléatoire, puisque la joueuse peut ouvrir deux fois de suite la même boîte, ce qui ne présente aucun intérêt. Les essais ont montré que la probabilité de succès avoisine les 3 %.

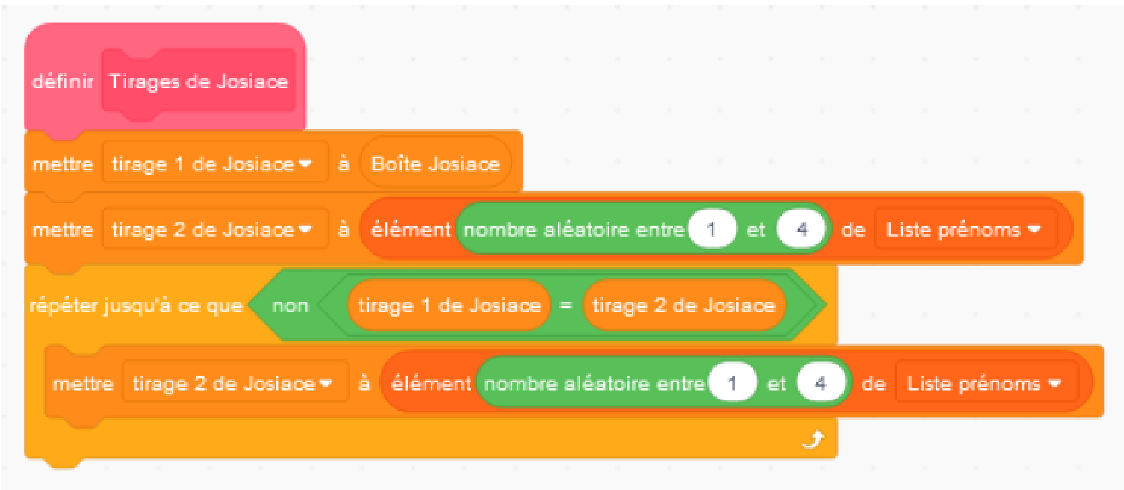


- le niveau 2, qui ressemble concrètement à ce que cela pourrait donner comme stratégie de base : chacune entre dans la pièce, et on « garantit » qu'une joueuse n'ouvre pas successivement deux fois la même boîte. Les élèves ont calculé que l'on passe alors précisément à 6,25 %.

2

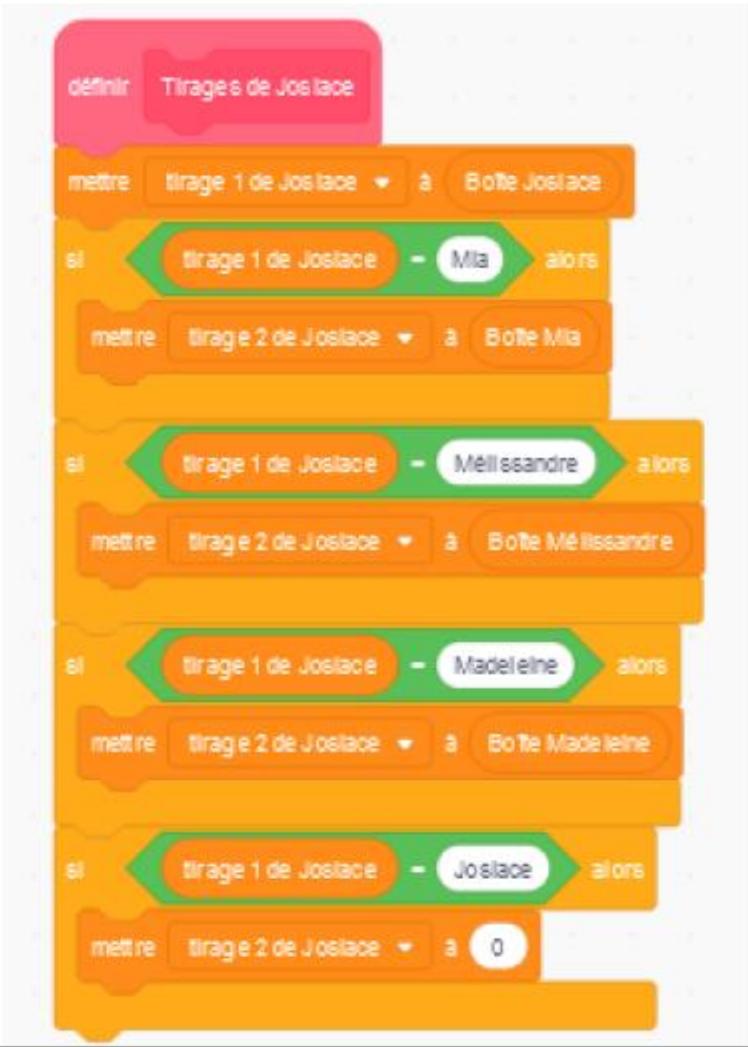
- le niveau 3, qui consiste à optimiser le premier tirage : chacune des boîtes a été ouverte au moins une fois (8 % de victoire environ, sur la base des résultats obtenus sur Scratch).

3



- le niveau 4, qui est une variante de la solution proposée plus tôt (stratégie optimale), en conservant ce qui a été fait à la stratégie 3 pour la première boîte, et en optimisant le deuxième tirage cette fois. Pour ce faire, la joueuse ouvre comme deuxième boîte celle indiquée par le papier tiré dans la première boîte ouverte.

4



Pour conclure nous sommes passés à un pourcentage de chance de 3% soir rien à 1 sur 3 de gagner soit un peu plus de 33% avec la solution optimale et l'autre solution dans le quel on obtient le même pourcentage de chance .
C'est deux solutions consiste à faire en sorte de piocher dans chaque boite.