Marches aléatoires, une façon ludique d'aborder les probabilités

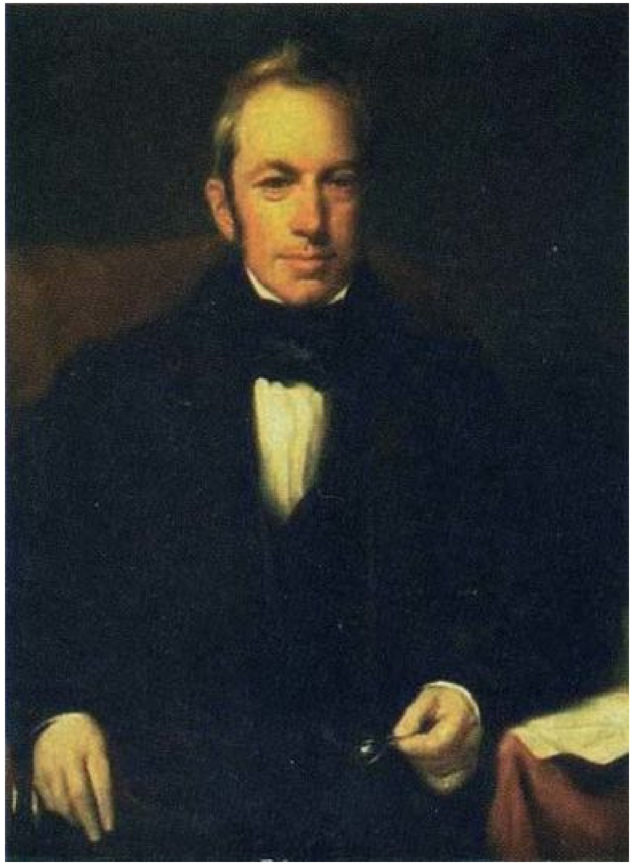
Vendredi 12 mars 2021
14h – 14 h45

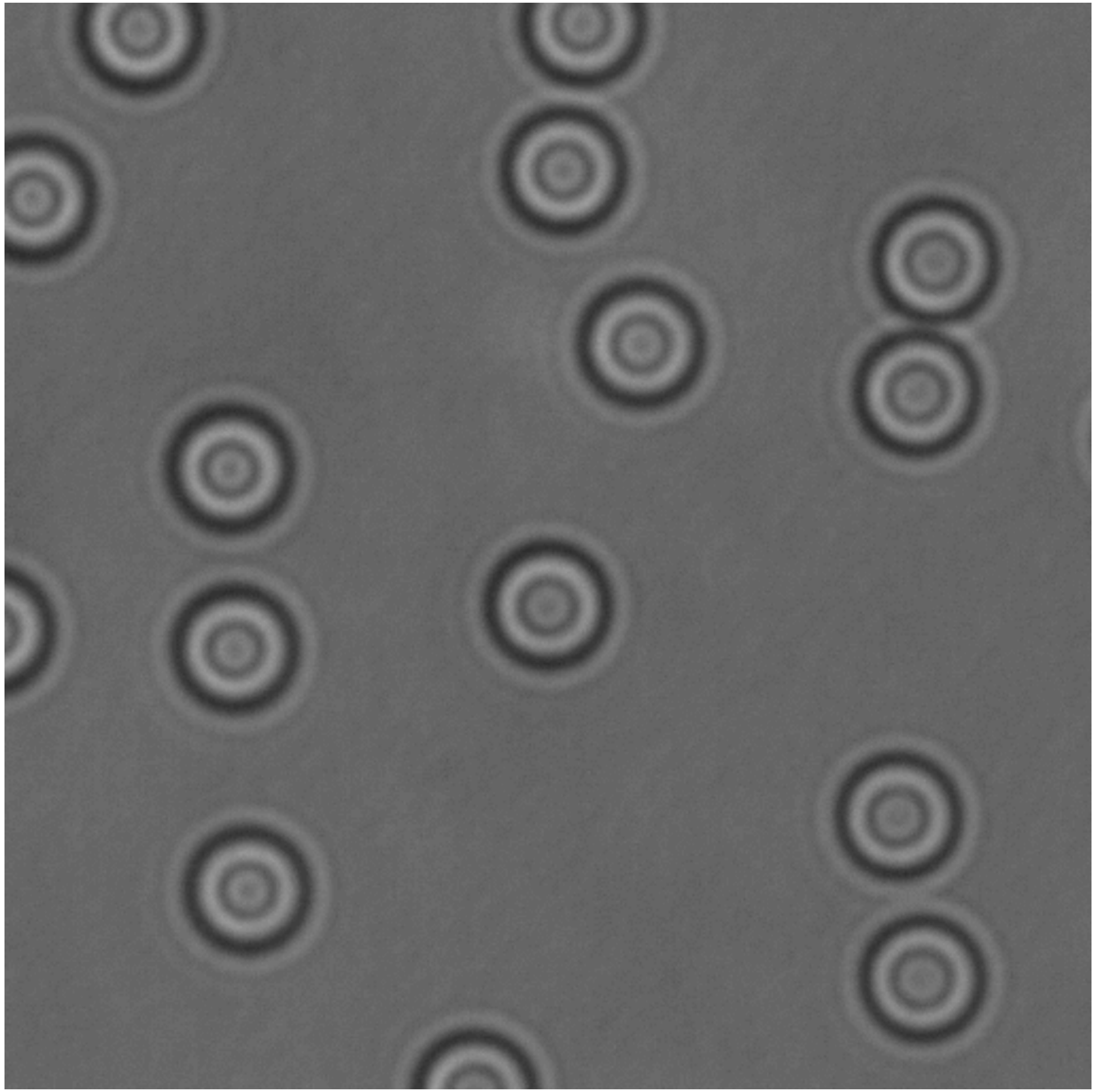
Laure Saint-Raymond, Mathématicienne et professeur des universités à l'ENS de Lyon

Animateur : Christophe Capdevielle, IA-IPR mathématiques
chargé de mission académique (Nantes)

Le mouvement brownien
Une perspective historique

Une expérience

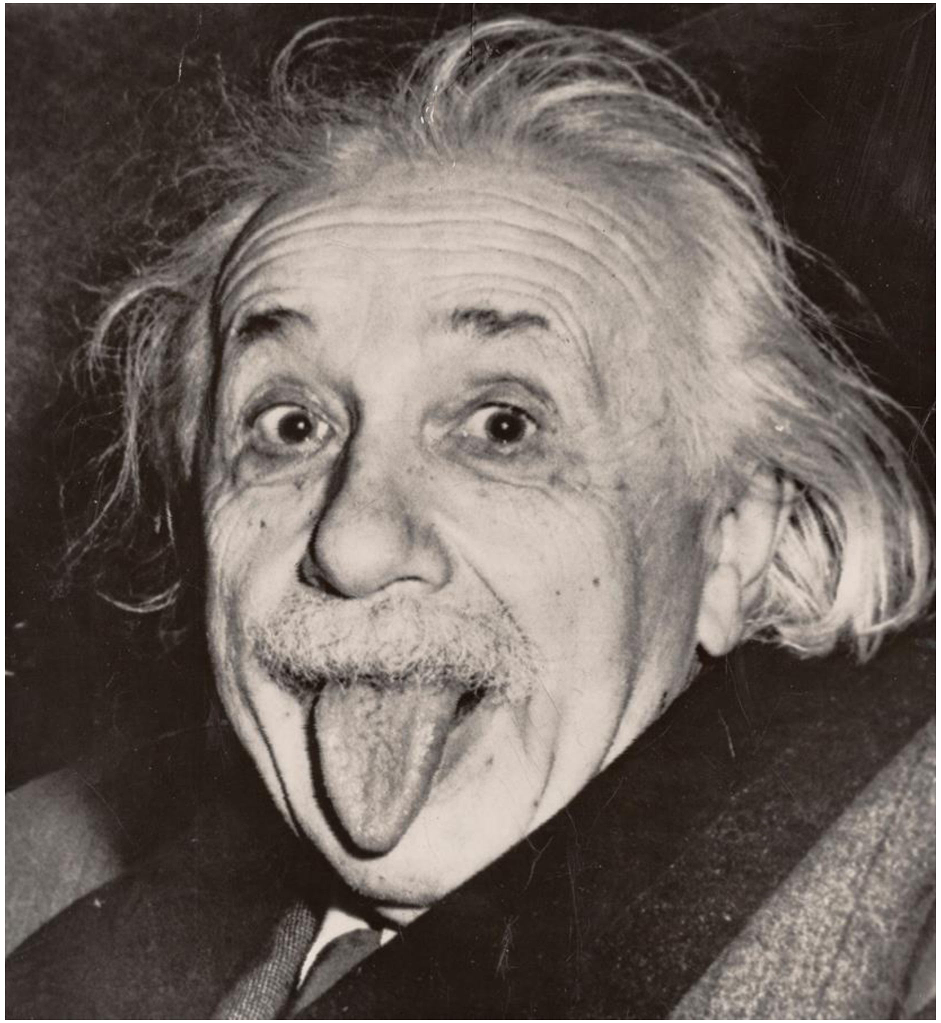


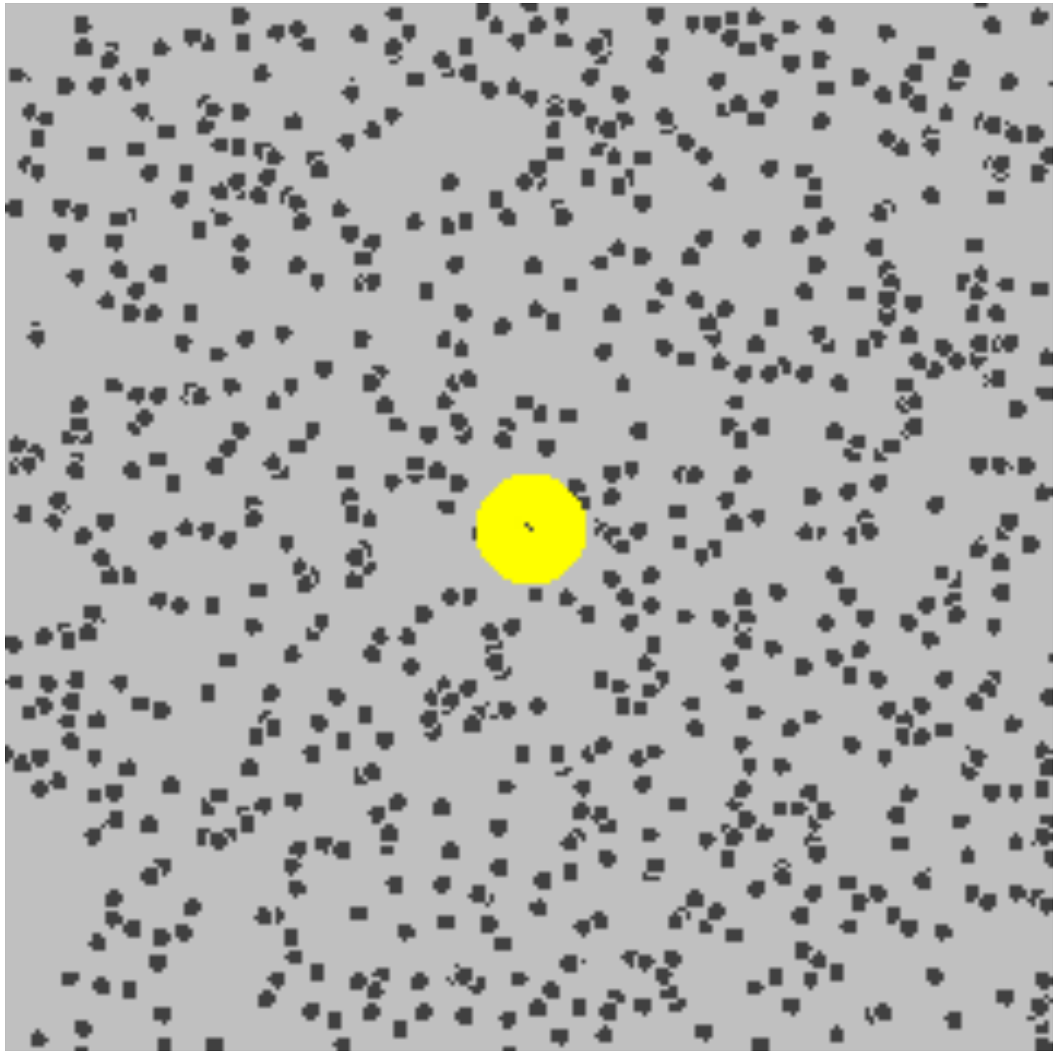


<u>Observation</u> :
L'eau ne bouge pas.
Les grains de pollen s'agitent…
tout seuls!

<u>Question</u> :
Qui leur a appris à danser?

Une idée géniale





L'eau est constituée de toutes petites billes qu'on ne voit pas mais qui s'agitent dans tous les sens (d'autant plus qu'il fait chaud).

Le grain de pollen est dévié par les collisions avec ces petites particules. On peut imiter son trajet avec une marche aléatoire (en changeant de direction au hasard).

x 2 000 000

Une validation physique

Dès les premières mesures, il devint manifeste, contrairement à ce que j'attendais, que les déplacements vérifiaient au moins approximativement la formule d'Einstein. Cette impression se confirma de plus en plus, à mesure que le plus grand nombre des pointés éliminait davantage les irrégularités de statistique. M. Chaudesaigues songea de plus à vérifier, et trouva, en effet, que les projections des déplacements se répartissent autour de la valeur zéro conformément à la loi du hasard.

Vous voyez sur le quadrillage ici projeté, où 16 divisions représentent 50 μ, trois dessins obtenus en traçant les segments qui joignent les positions consécutives d'un même grain de mastic, d'environ 1 μ de diamètre, pointé de trente en trente secondes. C'est le carré moyen de la projection sur un axe de tels segments qui vérifie la formule d'Einstein. Ces dessins ne donnent qu'une idée très affaiblie du prodigieux enchevêtrement de la trajectoire réelle. Si, en effet, on faisait des pointés de seconde en seconde, chacun de ces segments rectilignes se trouverait remplacé par un contour polygonal de trente côtés, relativement aussi compliqué que le dessin ici reproduit, et ainsi de suite.

En résumé, la théorie moléculaire cinétique du mouvement brownien se vérifie de façon rigoureuse et conduit, soit par l'étude de la distribution des grains, soit par l'étude de leur agitation, à la même valeur précise de la constante d'Avogadro, invariant essentiel de la structure de la matière.

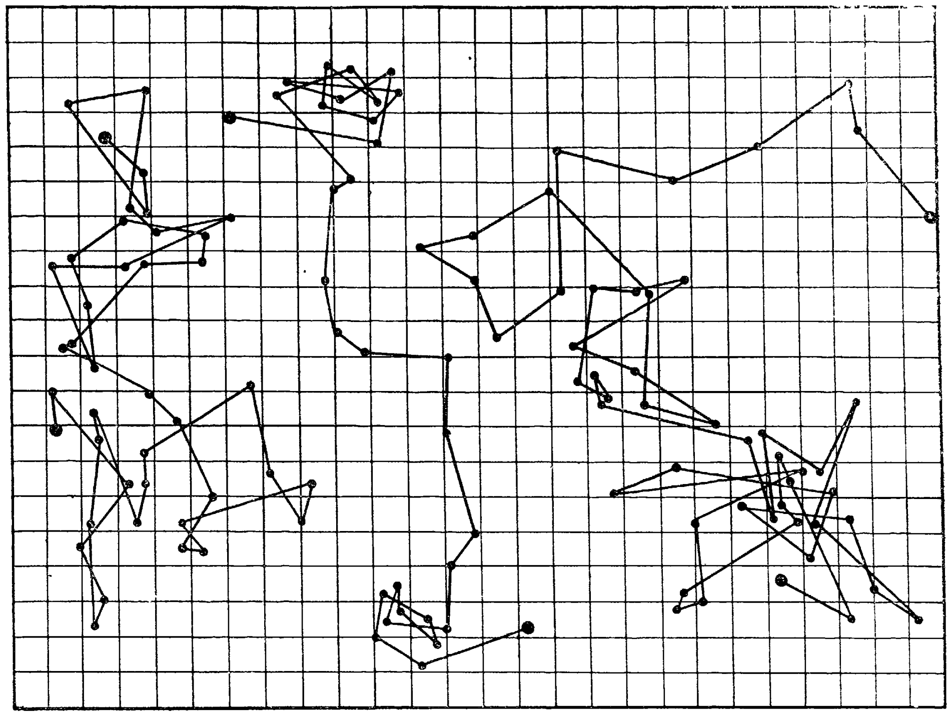


Fig. 2.

J. Perrin, Journal de Physique théorique et appliquée, 1909

Une théorie mathématique

Equation stochastique de Langevin

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -k\vec{v} + \vec{\eta}$$

- force de frottement $-k\vec{v}$ (loi de Stokes)
- force $\vec{\eta}$ (chocs aléatoires)

« elle est indifféremment positive et négative, et sa grandeur est telle qu'elle maintient l'agitation de la particule que, sans elle, la résistance visqueuse finirait par arrêter. »

➡ $\vec{\eta}$ est un **bruit blanc Gaussien**

$$\langle|\vec{x}(t)|^2\rangle \sim \frac{2dRT}{k\mathcal{N}_A}t\,.$$

Fonction aléatoire fondamentale de Wiener

$$d\vec{x}(t) = \sigma d\vec{W}_t$$

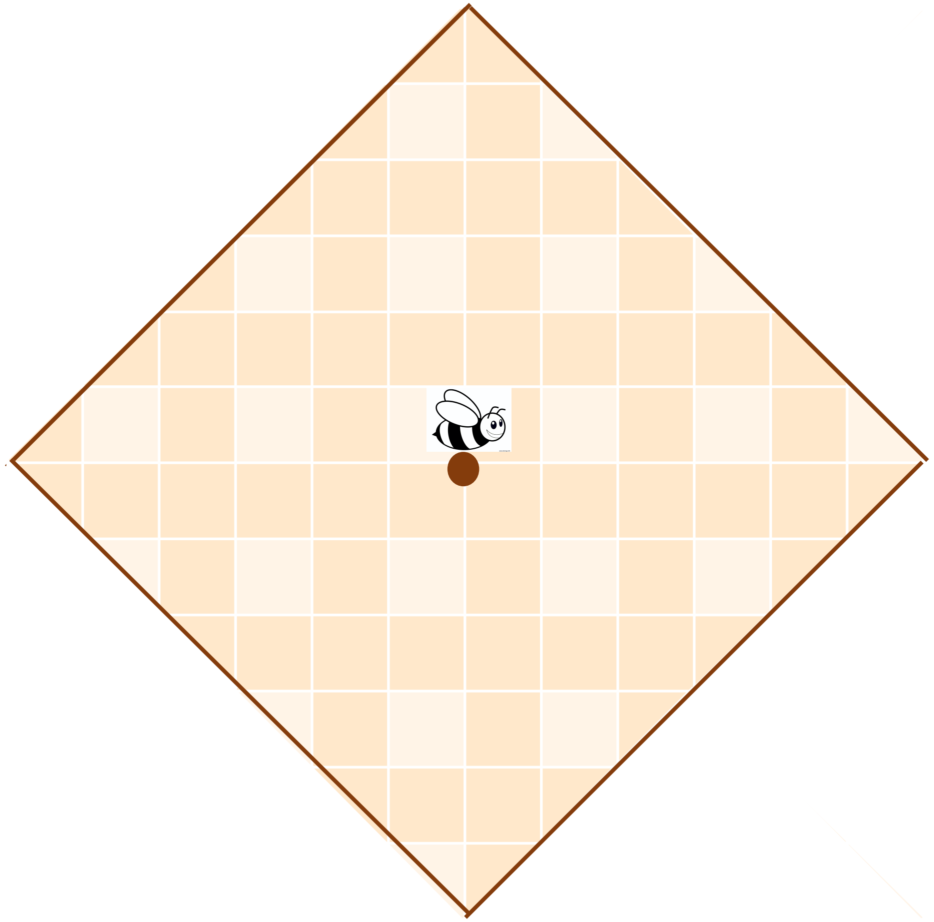
- $\vec{x}(0) = \vec{0}$ et les trajectoires sont continues
- les incréments $\vec{x}_{t+s} - \vec{x}_s$ sont indépendants
- les incréments sont gaussiens : $\vec{x}_{t+s} - \vec{x}_s \sim \mathcal{N}(0, s\sigma^2)$

La construction de Wiener est faite en se restreignant d'abord aux temps entiers, puis en procédant par interpolation (Differential space), de sorte à ce que les différences sont des variables indépendantes centrées.

Ce modèle est pour les fonctions ce que la variable aléatoire normale est pour les nombres.

Marches aléatoires
Une approche pédagogique

L’abeille désorientée



Une reine abeille voudrait quitter sa ruche. Chaque jour, elle avance d’une alvéole. Mais chaque nuit, elle oublie dans quelle direction elle a avancé la veille et choisit une nouvelle direction.

Trace un chemin de l’abeille.
A chaque étape, lance le dé

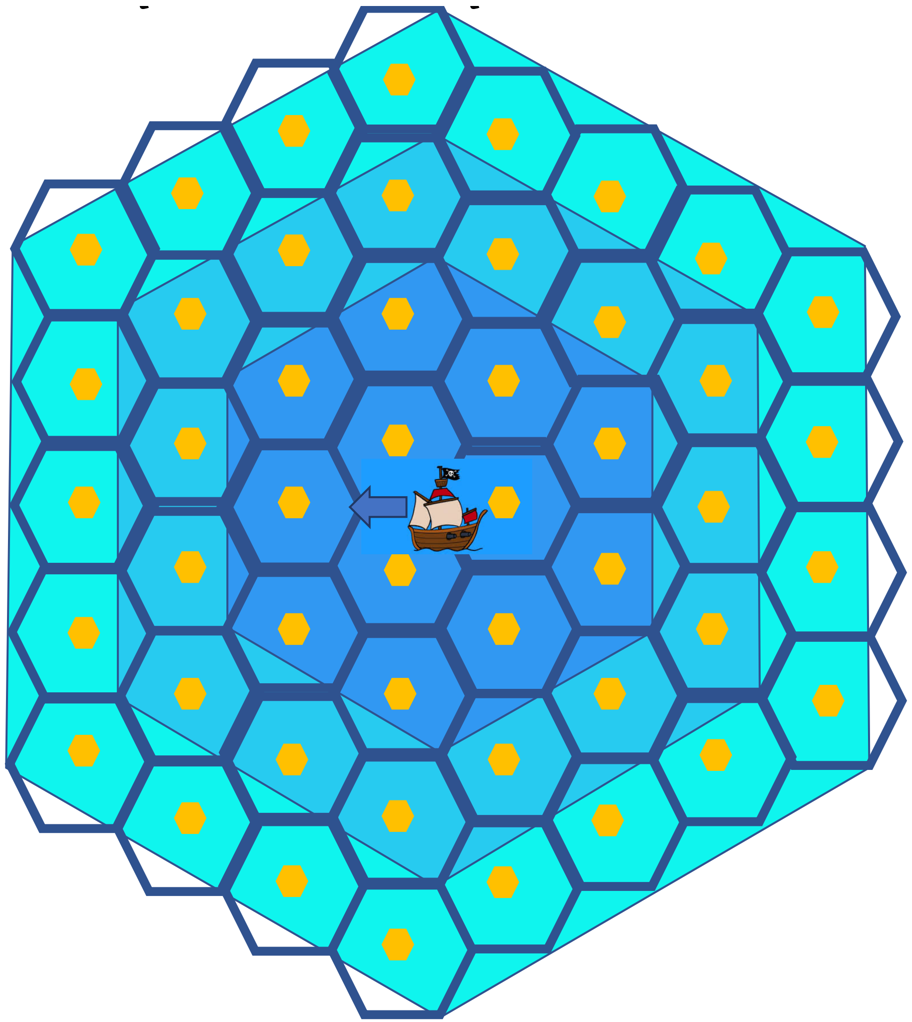
- Si tu fais 1, avance vers le haut
- Si tu fais 2, avance vers la droite
- Si tu fais 3, avance vers le bas
- Si tu fais 4, avance vers la gauche
- Si tu fais 5 ou 6, ce tour ne compte pas

Combien de jours a mis l’abeille à s’échapper?
(On considère qu’elle s’échappe dès qu’elle touche le bord.)

<u>Observations</u> :

- on n’obtient (presque) jamais le même trajet
- Tous les trajets se ressemblent : l’abeille revient en arrière, fait des boucles….
- En général, elle met très longtemps à sortir de la ruche.

Les pirates pourront-ils s'échapper?



Les pirates se sont perdus au milieu d'un archipel. Il y a des îles à perte de vue, et ils ne savent plus comment s'échapper.

<u>Travail individuel</u>

Les pirates décident de s'en remettre au sort : ils se déplacent le long des arêtes du réseau d'hexagones ci-contre et à chaque intersection ils tirent à pile ou face la direction à prendre :

- Pile : à gauche
- Face : à droite

Dessine le trajet de ton bateau. Attention de bien faire attention à chaque fois à la direction par laquelle tu arrives aux intersections.

Est-ce que ton trajet est le même que celui de ton voisin?

Au bout de combien de temps ton bateau est-il sorti pour la première fois

- Du premier contour?
- Du deuxième contour?
- Du troisième contour?

Est-ce que la stratégie des pirates est efficace?

Travail en groupe

A partir des résultats de tous les élèves :

- Faire un diagramme en bâtons représentant les temps de sortie pour chacun des contours.

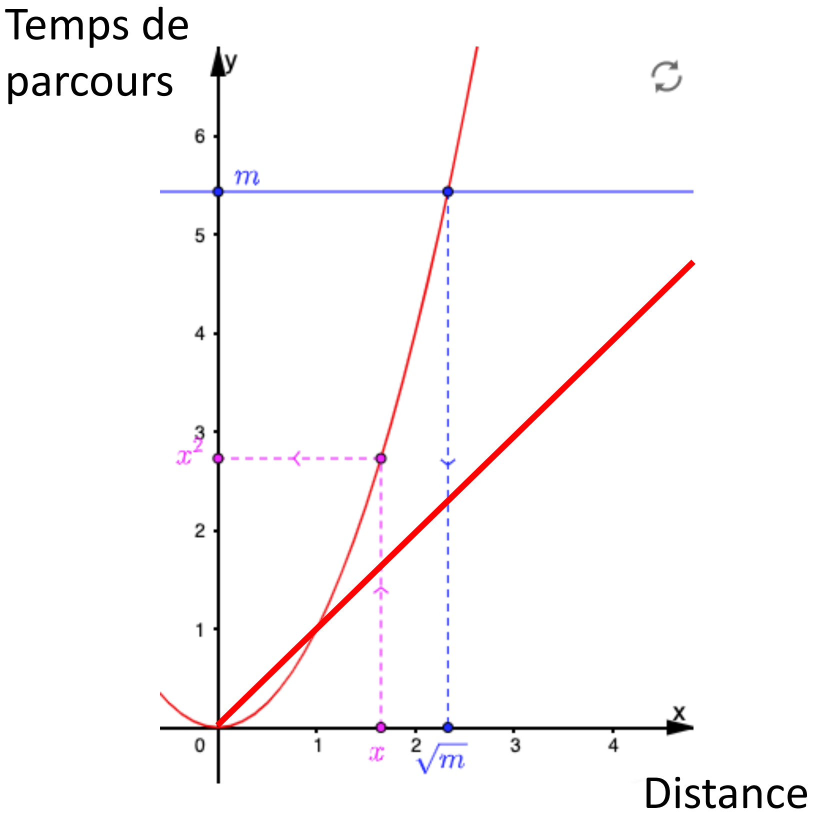
- Calculer le temps de sortie moyen pour chacun des contours.

- Faire une représentation graphique du temps de sortie en fonction de la distance.

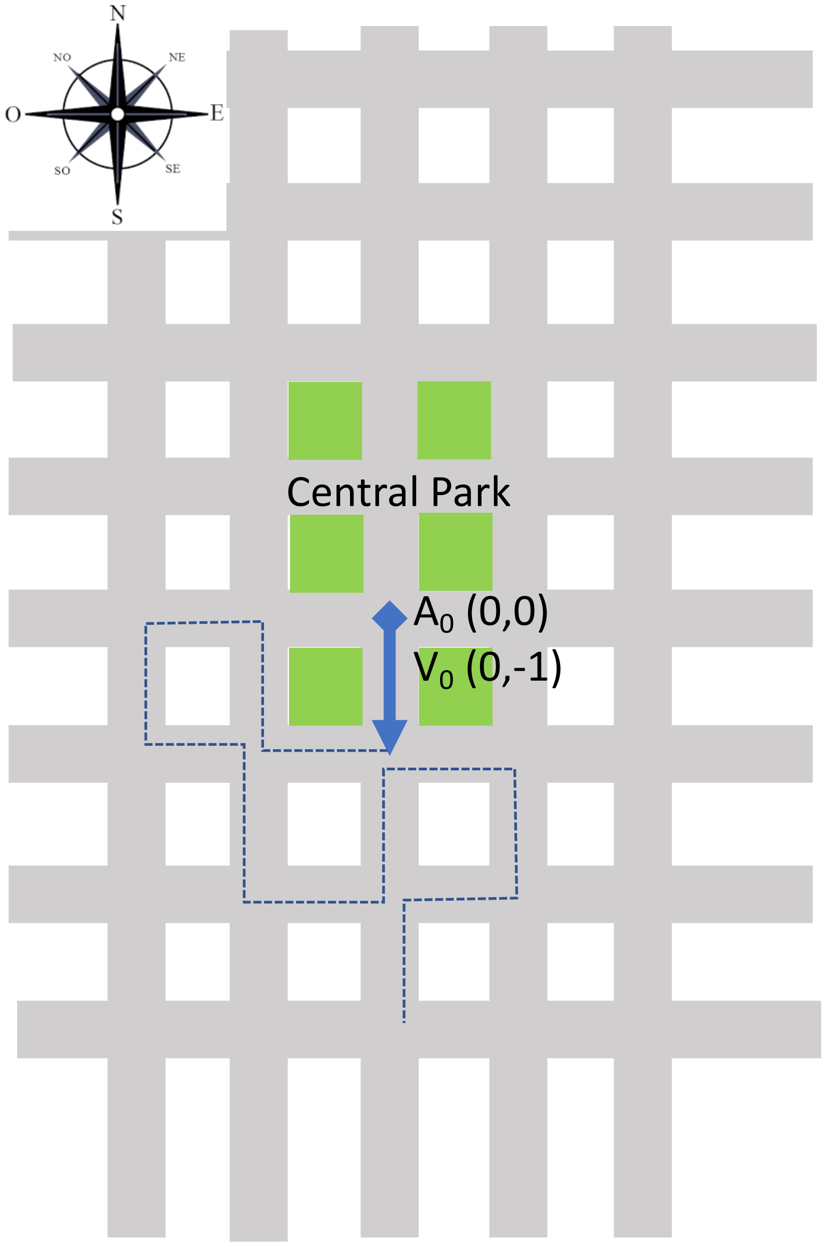
Observations :

Les temps de parcours ont une répartition en cloche.

Le temps de parcours moyen augmente beaucoup plus vite que la distance à effectuer.



Visite de New York…



Pierre a décidé de visiter New York, en se promenant au petit bonheur la chance… la meilleure façon – pense-t-il – de faire des découvertes insolites! Il part de Central Park, et à chaque carrefour il demande à son téléphone de tirer à pile ou face pour savoir s'il doit aller à gauche ou à droite.

Un peu de géométrie

Pour repérer le trajet de Pierre, on note P_n (de coordonnées (x_n,y_n)) sa position au temps n, et V_n (de coordonnées (u_n,w_n)) sa vitesse entre le temps n et le temps n+1.

- $(u_n,w_n) = (1,0)$ quand il va vers l'Est, et $(-1, 0)$ quand il va vers l'Ouest
- $(u_n,w_n) = (0,1)$ quand il va vers le Nord, et $(0,-1)$ quand il va vers le Sud

Sa position au temps n+1 est donnée par A_{n+1} de coordonnées

$$x_{n+1} = x_n + u_n \quad \text{et} \quad y_{n+1} = y_n + w_n$$

Sa vitesse au temps n+1 dépend du tirage : Pile $t_n = 1$, Face $t_n = -1$.
Montre en faisant un tableau de toutes les possibilités qu'on a

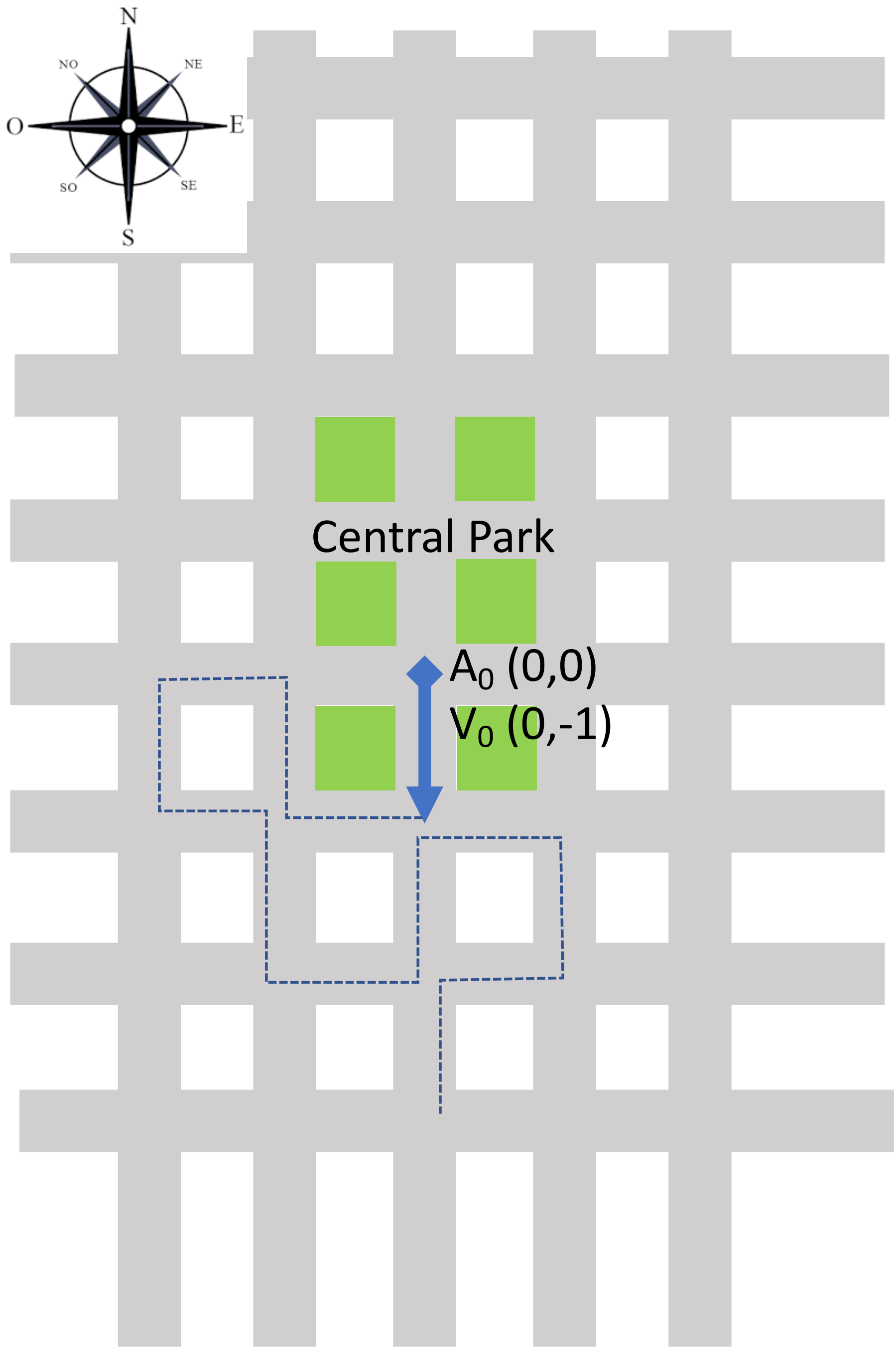
$$u_{n+1} = - t_n \times w_n \quad \text{et } w_{n+1} = t_n \times u_n$$

Un peu de programmation

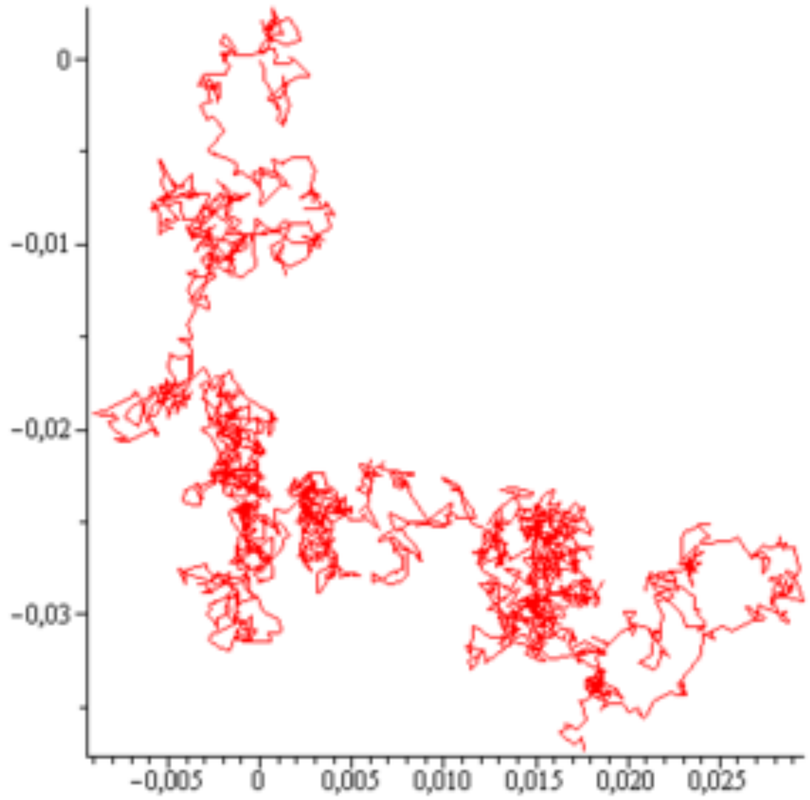
Utilise l'algorithme précédent pour faire un programme Scratch qui représente un trajet de Pierre.
L'utilisateur devra entrer un nombre k.
Le temps total dont dispose Pierre est k^2 (c'est-à-dire qu'il faut faire une boucle où n va de 1 à k^2).
Les axes des abscisses et des ordonnées seront gradués de -5k à 5k.

Quelques expériences

Fais tourner plusieurs fois ton programme avec k=5, 10, 15, 20, 40.
Qu'observes-tu?
Comment varient la longueur et l'allure du trajet de Pierre?



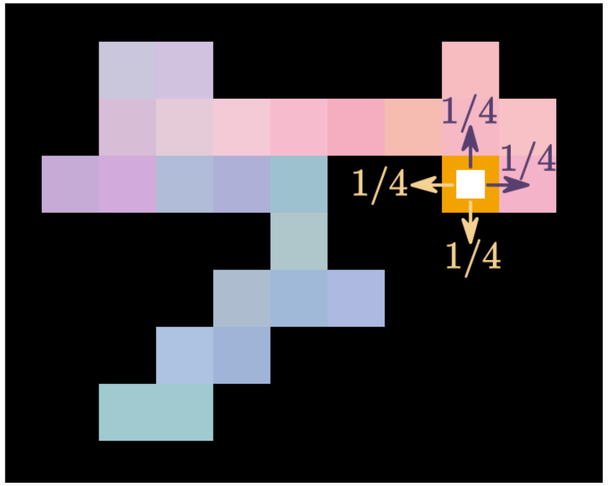
La surface visitée est « relativement » importante, mais pas uniforme.



Marches aléatoires

Le héros de bande dessinée Rahan suit une sorte de marche aléatoire : à la fin de chaque épisode il choisit la direction indiquée par son coutelas après l'avoir fait tourner sur une pierre.

La marche aléatoire la plus simple dans le plan est obtenue en tirant au hasard à chaque étape l'une des quatre directions Nord, Sud, Est, Ouest (chacune avec probabilité ¼), et en avançant d'un pas dans cette direction.



Un peu de probabilités

On note P_n (de coordonnées (x_n,y_n)) sa position au temps n, et V_n (de coordonnées (u_n,w_n)) sa vitesse entre le temps n et le temps n+1.

- $(u_n,w_n) = (1,0)$ quand il va vers l'Est, et $(-1, 0)$ quand il va vers l'Ouest
- $(u_n,w_n) = (0,1)$ quand il va vers le Nord, et $(0,-1)$ quand il va vers le Sud

Les variables aléatoires V_n sont indépendantes et de même loi.
On choisit P_0 de coordonnées (0,0).

Calculer la position P_n, en fonction de P_n et des vitesses.
Montrer que la moyenne de P_n est 0.
Calculer la moyenne de $|P_n|^2$.

Des limites

Soit t un nombre fixé.
Quelle est la distribution limite de la variable $|P_{nt}|^2/n$ quand n tend vers l'infini?
Soit dt un petit incrément.
Quelle est la distribution limite de la variable $|P_{n(t+dt)} - P_{nt}|^2/n$?

On peut ainsi définir à la limite un mouvement dont les trajectoires sont presque sûrement continues (mais pas dérivables), c'est le mouvement Brownien.

Une petite question subsidiaire

Peux-tu imaginer d'autres marches aléatoires qui convergent aussi vers le mouvement brownien?

Une animation peut être visualisée sur http://sorciersdesalem.math.cnrs.fr/RW2BM/rw2bm.html

Le mouvement brownien
Un objet central en mathématiques

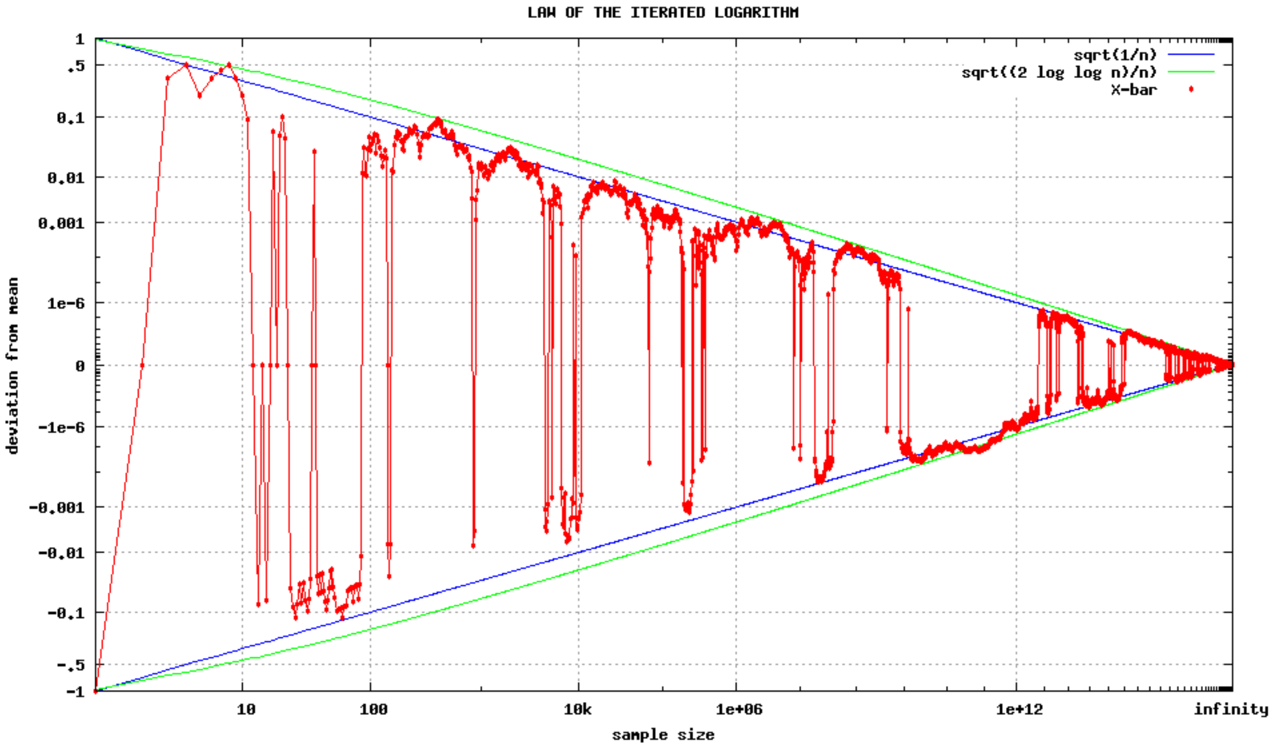
Des trajectoires peu régulières

Les trajectoires sont continues mais différentiables nulle part.
Leur variation totale est non bornée sur tout intervalle.

<u>Loi du logarithme itéré</u>
(Khinchin 1924, Kolmogorov 1929)

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{|W(\varepsilon)|}{\sqrt{2\varepsilon \log|\log \varepsilon|}} = 1$$

presque sûrement.

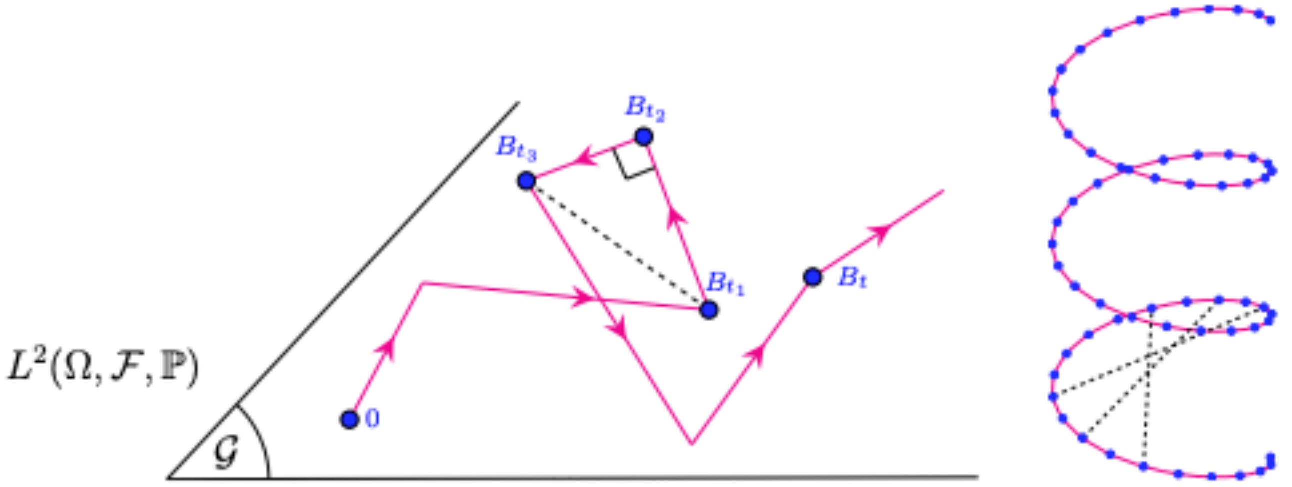


Les séries de Fourier-Wiener

Le mouvement brownien peut être représenté par la <u>série de Fourier-Wiener</u> (Steinhaus, Paley-Zygmund)

$$W_t = \xi_0 t + \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \frac{\sin(\pi n t)}{\pi n}$$

(ξ_n) variables i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$

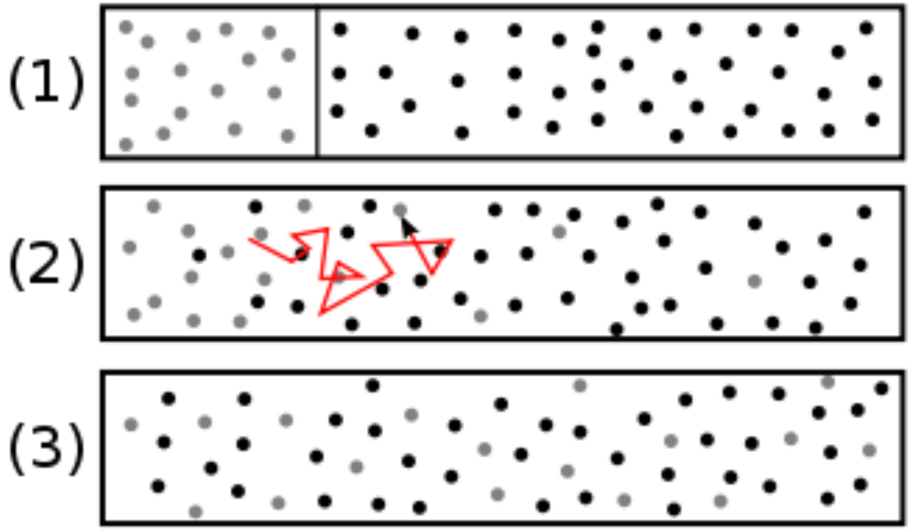


(a) Hélice dans le sous-espace gaussien $\mathcal{G} \subset L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ (b) Hélice de $\mathbb{R}^3$

Les équations de diffusion

Soit $P(\vec{x}, t)$ la probabilité de trouver une particule brownienne en $\vec{x}$ au temps t. En utilisant le calcul stochastique (Itô), on obtient <u>l'équation de diffusion</u>
(loi de Fick, loi de Fourier)

$$\partial_t P - \frac{1}{2}\sigma^2 \Delta_x P = 0\,.$$



De la géométrie complexe

Le mouvement brownien plan peut être étudié par les outils de l'analyse complexe et des transformations conformes.

L'ensemble décrit par la courbe brownienne est d'aire nulle. *Son aspect est celui d'un tapis déchiqueté sur les bords et presque entièrement dévoré par les mites. Mais il lui reste quand même de l'étoffe : sa dimension de Hausdorff est 2 (Kahane).*

Sa frontière est constituée de contours disjoints, ayant tous le même aspect fractal, avec des tailles différentes.
(Lawler-Schramm-Werner)