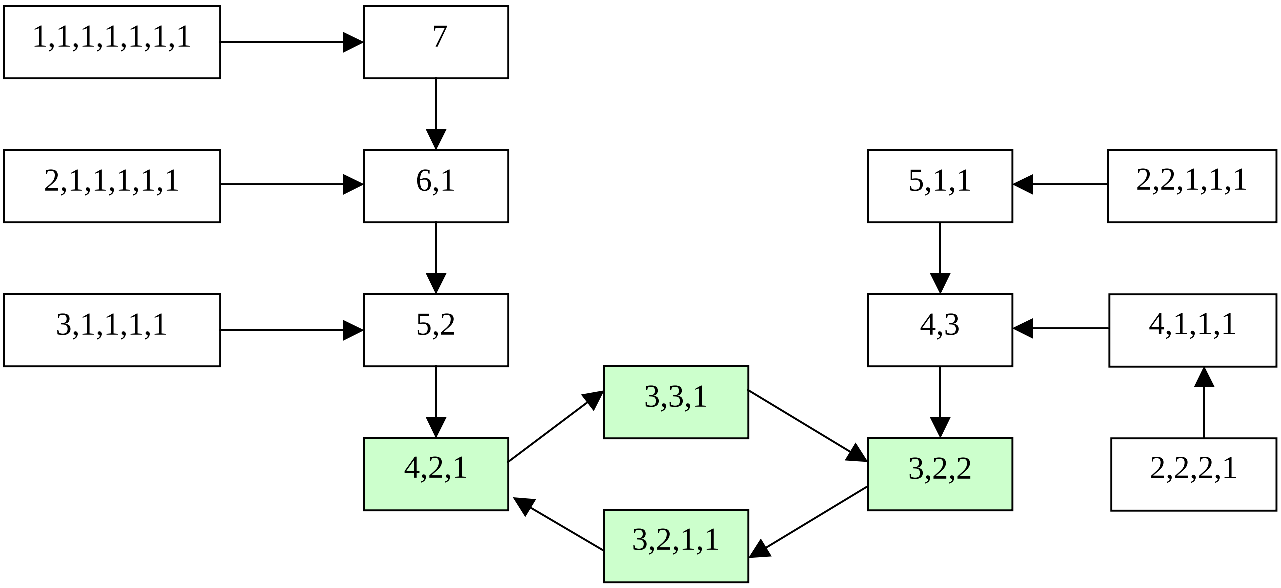
Corrigé du sujet destiné aux candidats des séries autres que S et SI

Exercice 1 :

Le graphe ci-dessous donne l'évolution des répartitions à partir d'une répartition quelconque :



Question 1

En partant de la répartition (7), en trois manipulations on obtient la répartition (4,2,1).
Puis quatre manipulations redonnent à nouveau (4,2,1) et ainsi de suite.
Comme 2007 = 501 x 4 + 3 , après 2007 manipulations, on aura encore la répartition (4,2,1).

Questions 2 et 3

On raisonne de même qu'en question 1, mais en sens contraire et en tenant compte du fait qu'au bout de quelques manipulations on rentre dans le cycle des quatre répartitions en vert sur le graphique, et que par ailleurs 2007 manipulations reviennent en général à 3 manipulations. Pour chacune des quatre répartitions du cycle (en vert), on peut déterminer quelles répartitions initiales permettent d'y aboutir en 2007 (c'est-à-dire en 3) manipulations. Il suffit donc de remonter de trois flèches. On obtient donc le résultat suivant :

Les répartitions initiales suivantes…	aboutissent en 2007 manipulations à
(7) (2,1,1,1,1,1) (3,3,1) (4,3)	(4,2,1)
(6,1) (3,1,1,1,1) (3,2,2)	(3,3,1)
(5,2) (3,2,1,1) (2,2,1,1,1) (2,2,2,1)	(3,2,2)
(4,2,1) (5,1,1) (4,1,1,1) (1,1,1,1,1,1,1)	(3,2,1,1)

Ainsi pour la question 2 :

Les répartitions initiales suivantes…	aboutissent en 2007 manipulations à
(7) (2,1,1,1,1,1) (3,3,1) (4,3)	(4,2,1)

Et pour la question 3, seule la répartition finale (3,3,1) pouvait faire hésiter Virginie entre trois répartitions initiales.

Exercice 2 :

1) De l'égalité $m^2-p^2=8$, on déduit (*) : $m^2=p^2+8$ donc : $p<m<p+3$, et $m=p+1$ ou $m=p+2$.
Avec $m=p+1$, (*) est impossible. Avec $m=p+2$, il vient $p=1$ et $m=3$.

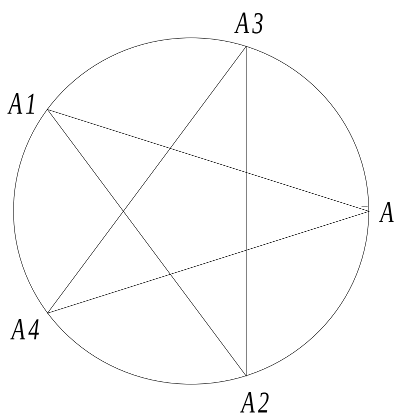
2) une étude simple de la figure (à partir de triangles rectangles isocèles par exemple) permet d'établir que :
DC= AB-AD ; MN=AB-2
L'égalité des aires conduit alors à : $(AB-4)^2-(AD-AB)^2=8$.
On obtient avec 1) : AB=7, AD=6, DC=1.

On peut aussi travailler à partir d'un pavage du « grand » triangle obtenu en prolongeant (AD) et (BC).

Exercice 3 :

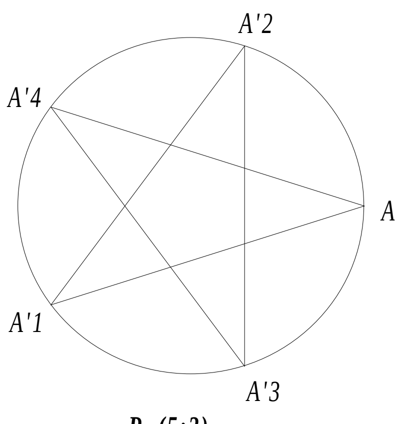
1. L'indice p explicite complètement la construction en partant de A. Ainsi, à chaque indice p possible correspond un unique A-polygone régulier étoilé.
   Dans cette question n = 5. Or $2 \leq p$ (car on veut que le polygone soit croisé) et $p < 5$.
   Il y a donc au plus ici 3 A-polygones réguliers étoilés à 5 branches correspondant aux cas p = 2 ; p = 3 et p = 4.

• Si p = 2, alors on obtient le polygone régulier étoilé suivant $AA_1A_2A_3A_4$: $\boldsymbol{P_A(5;2)}$



$P_A\,(5;2)$

• Si p = 3, alors on obtient le polygone régulier étoilé suivant $AA'_1A'_2A'_3A'_4$: $\boldsymbol{P_A(5\,;3)}$



$P_A\,(5;3)$

Ce polygone est aussi $AA'_4A'_3A'_2A'_1$, et en faisant la correspondance, A_1-A'_4 ; A_2-A'_3 ; A_3-A'_2 et A_4-A'_1, on obtient le même A-polygone régulier étoilé. Autrement dit $P_A(5\,;3)$ n'existe pas, c'est en réalité le polygone $P_A(5\,;2)$.

Plus généralement, en faisant un raisonnement analogue, on peut remarquer que lorsqu'on parcourt le polygone dans le sens trigonométrique, le passage d'un sommet au suivant ne peut pas excéder un demi-tour.

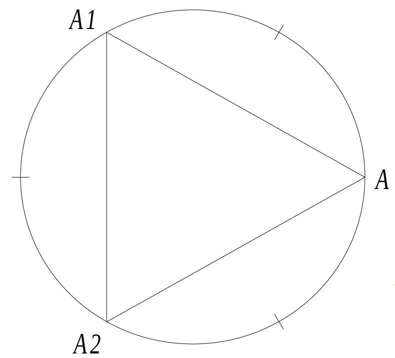
Ainsi, on ne considérera désormais que les indices p tel que : $4 \leq 2p \leq n$, soit encore $\boxed{2 \leq p \leq E(\frac{n}{2})}$

• Le cas p = 4 n'est pas à envisager d'après l'étude précédente.

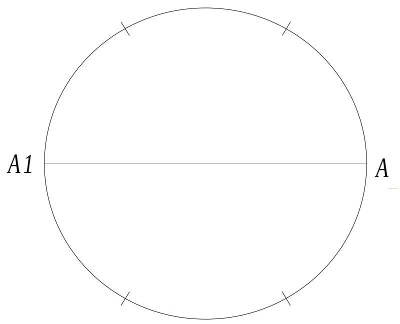
Conclusion : Il y a un seul A-polygone régulier étoilé à 5 branches : $P_A(5 ; 2)$. On peut le construire en utilisant la règle et le compas uniquement, puisque cela revient à déterminer les 5 sommets d'un pentagone régulier. On peut le tracer en utilisant le rapporteur puisque l'angle au centre doit mesurer 72°.

2. Dans cette question, n = 6. D'après la question 1, on ne doit considérer que les cas p = 2 et p = 3.

• Si p = 2, tous les sommets ne sont pas atteints : seuls trois d'entre eux le sont (car $\frac{6}{2} = 3$) et on obtient un triangle équilatéral AA_1A_2. Il n'existe donc pas de A-polygone régulier étoilé à 6 branches d'indice 2.



• Si p = 3, seuls deux sommets sont atteints (car $\frac{6}{3} = 2$), on obtient un diamètre $[AA_1]$ du disque. Il n'existe donc pas de A-polygone étoilé à 6 branches d'indice 3.



Conclusion : Il n'existe pas de A-polygone régulier étoilé à 6 branches.

3. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 5 et p un entier tel que : $2 \leq p \leq E(\frac{n}{2})$. Les questions précédentes invitent à démontrer *qu'un A-polygone régulier étoilé à n branches d'indice p existe si et seulement si PGCD (n ; p) = 1.*

On pose PGCD (n ; p) = d, où d est un entier naturel. On a alors PPCM(n ; p) = $\frac{np}{d}$.

Si d = 1, alors PPCM(n ; p) = np donc quel que soit $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n-1$, kp n'est pas un multiple de n puisqu'il est déjà multiple de p. Cela signifie que quel que soit le sommet choisi au départ, il faudra bien tracer exactement n cordes pour retrouver ce point. Donc $P_A(n ; p)$ existe.

Si $d \neq 1$, alors $\frac{np}{d}$ étant un multiple de n, seuls $\frac{n}{d}$ sommets seront atteints. Or $d \neq 1$, donc il n'y a pas de A-polygone régulier étoilé correspondant.

Par suite, un A-polygone régulier étoilé à n branches d'indice p existe si et seulement si PGCD(n ; p) = 1 (où $n \geq 5$ et $2 \leq p \leq E(\frac{n}{2})$). Dénombrer les A-polygones réguliers étoilés à n branches d'indice p revient donc désormais à déterminer <u>le nombre de nombres étrangers p à n</u> vérifiant $2 \leq p \leq E(\frac{n}{2})$.

Il n'y a qu'un seul nombre étranger à 8 compris entre 2 et $E(\frac{8}{2}) = 4$: c'est 3.

Conclusion : Il y a donc un unique A-polygone régulier étoilé à 8 branches : $P_A(8 ; 3)$

Les nombres étrangers à 33 compris entre 2 et $E(\frac{33}{2}) = 16$ sont : 2 ; 4 ; 5 ; 7 ; 8 ; 10 ; 13 ; 14 ; 15 et 16.

Conclusion : Il y a donc 10 A-polygones réguliers étoilés à 33 branches.

41 étant un nombre premier, tous les nombres entiers qui lui sont strictement inférieurs lui sont également étrangers. Entre 2 et $E(\frac{41}{2}) = 20$, il y en a précisément 19.

Conclusion : Il y a donc 19 A-polygones réguliers étoilés à 41 branches.

4. Soit n un nombre premier. On appelle q(n) la probabilité de choisir un polygone dans $\mathscr{E}(n)$ ayant un indice pair. Etant dans une situation d'équiprobabilité, nous allons d'abord déterminer le nombre d'éléments de $\mathscr{E}(n)$. Il s'agit (voir question 3) de dénombrer les entiers compris entre 2 et $E(\frac{n}{2})$.

   Or n est premier et $n \geq 5$ donc n est impair. Par suite $E(\frac{n}{2}) = \frac{n-1}{2}$.

Entre 2 et $\frac{n-1}{2}$, il y a $\frac{n-1}{2}$ - 1 nombres entiers soit $\frac{n-3}{2}$ indices p possibles. **Par suite Card $\mathscr{E}(n) = \frac{n-3}{2}$**

On a choisi au hasard un polygone régulier étoilé dans $\mathscr{E}(n) = \left\{ P_A(n ; 2), P_A(n ; 3),\ldots, P_A(n ; \frac{n-1}{2}) \right\}$.

Combien y a-t-il de nombres pairs dans l'ensemble $\mathscr{N} = \left\{2, 3, \ldots, \frac{n-1}{2}\right\}$ *?*

On sait que n est impair. Il faut distinguer deux cas : $\frac{n-1}{2}$ est impair ou $\frac{n-1}{2}$ est pair.

• **Si $\frac{n-1}{2}$ est impair**, alors cela signifie qu'il existe un entier k tel que : $n - 1 = 2(2k + 1)$ donc $n = 4k + 3$. Alors il y a autant de nombres pairs que de nombres impairs donc $\boxed{q(n) = \frac{1}{2}}$.

• **Si $\frac{n-1}{2}$ est pair**, alors il existe un entier m tel que : $n - 1 = 4m$ donc $n = 4m + 1$. Le plus grand nombre pair de $\mathscr{N}$ est $\frac{n-1}{2}$ soit encore $2 \times \frac{n-1}{4}$. Tous les nombres pairs de $\mathscr{N}$ sont donc de la forme 2k, avec $1 \leq k \leq \frac{n-1}{4}$. Par conséquent il y en a $\frac{n-1}{4}$ et: $q(n) = \frac{\frac{n-1}{4}}{\frac{n-3}{2}}$ soit enfin : $\boxed{q(n) = \frac{n-1}{2n-6}}$.

Conclusion : Lorsque n est premier ($n \geqslant 5$)

• si n est de la forme 4k + 1, où k est un entier, alors $q(n) = \frac{n-1}{2n-6}$.

• Si n est de la forme 4k + 3, où k est un entier, alors $q(n) = \frac{1}{2}$.

Exercice 4 :

1. a) La hauteur du triangle équilatéral est $2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$. C'est également la longueur du rectangle, et aussi la longueur du côté vertical (sur la figure) du triangle isocèle *T*.

   L'aire du triangle équilatéral est $\frac{2\times\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$. Le triangle *T* est de même aire ; ainsi, notant *h* la longueur de la hauteur horizontale de ce triangle (qui est aussi une médiane), on obtient : $\frac{\sqrt{3}\times h}{2}=\sqrt{3}$. Donc $h=2$.

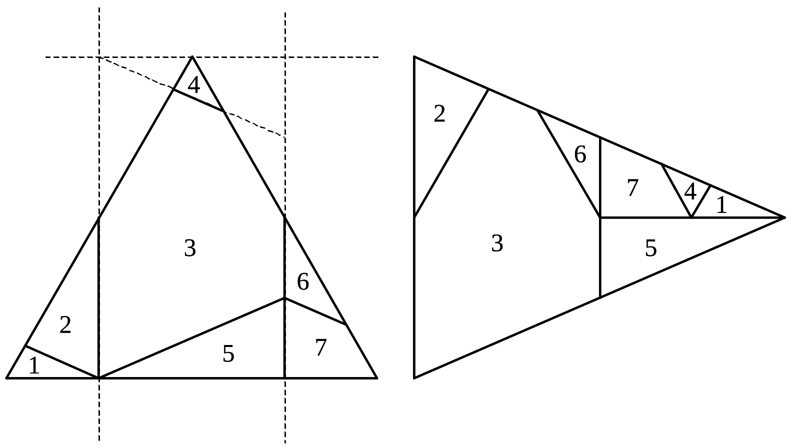
   Enfin, les pièces 1 et 2, dans la deuxième dissection, ont un côté de longueur commune, car elles sont accolées par ce côté dans le rectangle. Cette longueur commune est *d*.

   Une application du théorème de Pythagore à la moitié supérieure du triangle *T* donne alors l'égalité suivante :

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+2^2=(2d)^2$$

   On obtient : $\boxed{d=\frac{\sqrt{19}}{4}}$.

   b)



2. Notons *a* l'aire commune de *A* et de *B*.

   1er cas : deux rectangles.

   Alors d'après la propriété 2, *A* est e.d. à un rectangle *C* dont un côté mesure 1. Comme la dissection préserve les aires, l'aire de *C* est égale à *a*. Donc *C* est un rectangle de 1 sur *a*.

   De même, *B* est e.d. à un rectangle de 1 sur *a*, il s'agit donc de *C*.

   Ainsi, *A* et *B* sont tous deux e.d. au même rectangle *C* ; ils sont donc équidécomposables.

   2^{e} cas : un triangle et un rectangle

   Notons *A* le triangle et *B* le rectangle. Alors d'après la propriété 2, *A* est équidécomposable à un rectangle *C*, dont on sait seulement qu'il est d'aire *a*. Comme le premier cas a déjà été démontré, *B* est équidécomposable à *C*. Donc *A* et *B* sont équidécomposables.

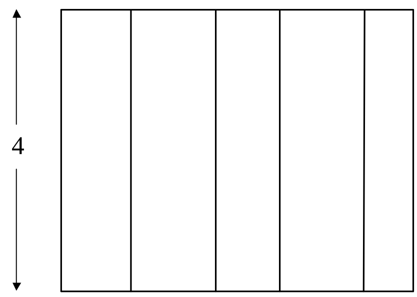
   3^{e} cas : deux triangles.

   Alors d'après la propriété 1, pour chacun des triangles *A* et *B* , on peut trouver un rectangle qui lui soit équidécomposable. On conclut à nouveau en utilisant le premier cas.

3. D'après la propriété précédente, on peut découper chaque triangle de la figure et regrouper les morceaux pour former un rectangle dont un des côtés mesure 4 (l'autre côté étant de longueur 4/*a*, où *a* est l'aire du triangle).

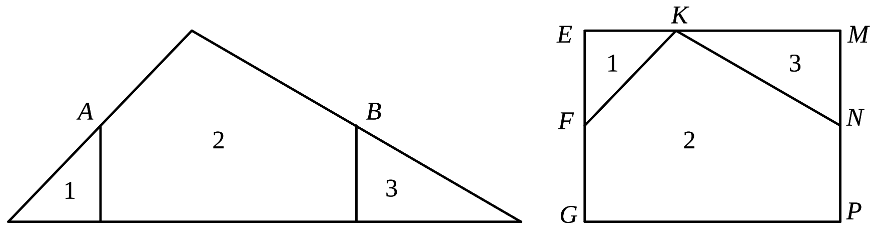
On obtient ainsi un découpage de la figure complète ; avec l'ensemble des morceaux obtenus, on forme cinq rectangles, chacun ayant un côté de longueur 4 ; on les accole pour obtenir un nouveau rectangle dont un des côtés mesure 4.

Ce rectangle a la même aire que la figure initiale, à savoir 16. C'est donc un carré !



Complément : comment démontrer les deux propriétés admises au 2. ?

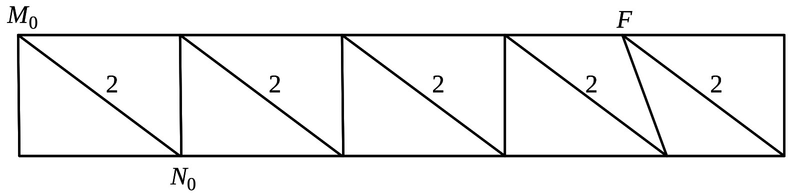
Une construction similaire à celle vue à la question 1. permet de disséquer tout triangle en un rectangle, à condition de le découper perpendiculairement à un côté qui est situé entre deux angles *aigus*.



Dans cette figure, A et B sont les milieux des côtés correspondants. On les a projetés orthogonalement sur le côté qui a été choisi pour base. Ceci n'est possible que si les deux angles situés aux extrémités de la base sont aigus.
On a ensuite fait subir une symétrie par rapport à A à la pièce 1, et une symétrie par rapport à B à la pièce 3.
Les points E, F, G de la figure de droite sont alignés car E est le symétrique de G par rapport à F. De même, M, N et P sont alignés.
Les droites (EK) et (KM) sont parallèles à la base et ont un point commun K ; donc E, K et N sont alignés.
Ainsi, on obtient bien un rectangle, ce qui démontre la propriété 1.

<u>Remarque :</u> la hauteur verticale du triangle et le côté [EG] du rectangle ont même longueur. Comme les deux figures ont la même aire, on en déduit que la « base » du triangle est double de celle du rectangle. En particulier, si la « base » du triangle mesure 2, alors un des côtés du rectangle mesure 1.

Cette remarque s'avère très utile lorsqu'on considère la figure suivante, qui montre comment découper un rectangle de longueur $L>2$ et de largeur $l<2$:



Partant du sommet M_0 situé en haut et à gauche, on a tracé un cercle de centre M_0 et de rayon 2. Comme $l<2$, ce cercle coupe la droite qui porte le côté bas. Comme $L>2$, on trouve un point du cercle sur ce côté bas, noté N_0 (le point F a été obtenu de la même façon en partant du sommet situé en bas et à droite). On projette ensuite orthogonalement N_0 sur le côté haut, et on reproduit la construction par translations successives jusqu'à arriver au niveau de F ou à le dépasser comme sur la figure.
Chacun des triangles ainsi obtenus a un côté marqué « 2 », qui est de longueur 2 et situé entre deux angles aigus. Donc il est équidécomposable à un rectangle de côté 1. En accolant bout à bout tous les rectangles, on obtient un unique rectangle, dont un des côtés mesure 1, et auquel le rectangle de départ est équidécomposable. Ceci montre la propriété 2 dans le cas d'un rectangle de longueur $L>2$ et de largeur $l<2$.
Si le rectangle est trop court, il suffira de le découper en tranches de largeurs égales et en nombre suffisant. En mettant ces tranches bout à bout, on pourra augmenter la longueur à volonté.
Si après cette opération la largeur du rectangle est trop grande, il suffira de le découper encore une fois en tranches de largeurs égales et en nombre suffisant. En mettant les tranches bout à bout, on diminuera la largeur à volonté sans risquer de raccourcir le rectangle.
Par conséquent, la propriété 2. est vraie dans tous les cas.