Session 2015 NON S
Corrigés

Corrigé de l'exercice 3 : nombres palindromes (non S)

1. 2112 (il est trop tard pour les années en 200x !)

2. 2xxxxx < 3xxxxx et 22xxxx < 23xxxx pour tout choix des chiffres restants. Le plus petit palindrome à 6 chiffres est donc 223 322.

3. Comme ci-dessus, les chiffres « de plus fort poids » doivent être choisis le plus petit possible :
   1 023 456 789 876 543 201

4. On suppose $p_2 > p_1$ et on cherche à minimiser la différence $p_2 - p_1$.
   - Si p_1 et p_2 ont deux chiffres, la différence minimale est de 11.
   - S'ils ont trois chiffres, on simplifie le chiffre des centaines et 10 est la plus petite différence, par exemple 131 – 121 ou 212 – 202 (l'écart entre les chiffres des dizaines ne doit pas dépasser 1).
   - S'ils ont quatre chiffres, on doit simplifier le chiffre des milliers, donc p_2 s'écrit *accb* et p_1 s'écrit *abba*, de sorte que la différence vaut 110(*c* – *b*), donc au moins 110.
   - La discussion se poursuit de la même manière à cinq chiffres et au-delà :
     abcba – *abdba* = 100*d*, etc.

   La plus petite différence entre deux nombres palindromes distincts d'au moins deux chiffres et ayant le même nombre de chiffres est 10.

5. Soit *ab* l'écriture en base 10 d'un nombre à deux chiffres. *a* est un entier entre 1 et 9 et b est un entier entre 0 et 9. La somme de ce nombre avec son retournement s'écrit *ab* + *ba* en base 10. Explicitement, cette somme vaut :

   $$10a + b + 10b + a = 11(a + b) ;$$

   - Si $0 < a + b < 10$, alors $11(a + b)$ est un palindrome (l'un des 9 nombres 11, 22, 33, …, 99).
   - Si $a + b = 10$, alors $11(a + b)$ vaut 110 qui n'est pas un palindrome ;
   - Si $a + b = 11$, alors $11(a + b)$ est un palindrome (121)
   - Si $a + b > 11$, alors $11(a + b)$ n'est un palindrome (les valeurs possibles sont 132, 143, 154, 165, 176, 187, 198).

6. Les 1007 premiers chiffres doivent être égaux aux 1007 derniers.
   - On a 9 choix pour le premier chiffre et 10 choix pour les 1006 autres ;
   - On a également 10 choix pour le 1008ième chiffre (le chiffre central) ;

   Il y a donc $9 \times 10^{1006} \times 10 = 9 \times 10^{1007}$ nombres palindromes à 2015 chiffres.

Corrigé de l'exercice 4 : le zed

Partie A : on peut rendre la monnaie

1) On suppose $a = 3$ et $b = 5$.
   a) On peut donner $301 = 5 \times 59 + 3 \times 2$ *zeds.*
   b) On donne $10 = 2 \times 5$ et on reçoit $9 = 3 \times 3$.
   c) Pour payer une somme S, on tend $10S$ en billet de 5 ($2S$ billets de 5 *zeds*) et on nous rend $9S$ ($3S$ billets de 3 *zeds*)
2) On suppose $a = 6$ et $b = 10$.
   a) On donne 4 billets de 6 *zeds* et on nous rend un billet de 10 *zeds* ($24 – 10 = 14$).
   b) Une somme impaire ne peut être payée car les deux billets sont de montants pairs. La plus petite somme que l'on peut payer est donc de 2 *zeds*.

Partie B : on ne peut pas rendre la monnaie

On considère le cas a = 3

1) On suppose $b = 5$
   a) $8 = 3 + 5$, $9 = 3 + 3$ et $10 = 5 + 5$
   b) Soit $S \geq 8$ un entier. La division euclidienne de S par 5 s'écrit : $S = 5q + r$, avec $q \geq 1$ (car $S \geq 8$) et $0 \leq r \leq 4$.
      - Si $r = 0$, la somme est un multiple de 5 et on peut payer ;
      - Si $r = 1$, on écrit $S = 5q + 1 = 5(q – 1) + 6$ qui se paie avec $q – 1$ billets de 5 *zeds* et 2 billets de 3 *zeds*.
      - Si $r = 2$, alors $q \geq 2$ (sinon $S = 7$) et on écrit $S = 5q + 2 = 5(q – 2) +12$ se paie avec $q – 2$ billets de 5 *zeds* et 4 billets de 3 *zeds*.
      - Si $r = 3$, on paie avec q billets de 5 *zeds* et 1 billet de 3 *zeds.*
      - Si $r = 4$, $S = 5q + 4 = 5(q – 1) + 9$ qui se paie avec $q – 1$ billets de 5 *zeds* et 3 billets de 3 *zeds*.
   c) Il est impossible de payer 7 *zeds*, donc M(5)=7.
2) On suppose $b = 7$.
   a) $4 \times 3 = 12$, $2 \times 3 + 7 = 13$ et $2 \times 7 =14$. En ajoutant à ce qui précède un billet de 3 *zeds,* on paie de même 15, 16 et 17 *zeds.* Avec deux billets de 3 *zeds*, on paie 18, 19 et 20 *zeds.* De proche en proche, on voit que l'on peut payer toute somme supérieure ou égale à 12 *zeds*.
   b) Il est impossible de payer 11 *zeds*, donc M(7) = 11.

3) On suppose $b = 8$. Alors M(8) = 13. On peut le vérifier en traitant tous les cas possibles :

Nombre de billets *a* \ *b*	0	1	2	3	4
0	0	8	16	24	32
1	3	11	19	27	35
2	6	14	22	30	38
3	9	17	25	33	41
4	12	20	28	36	44
5	15	23	31	34	47

4) Les points sont alignés. On conjecture que M(b) = $2b - 3$ (figure ci-dessous).

On considère le cas $a = 5$

5) On suppose que b est plus grand que 5 et non multiple de 5. On cherche des entiers (positifs) tels que :

$$4b - 5 = 5u + bv,$$

C'est-à-dire $(4 - v)b = 5(1 + u)$. Donc $(4 - v)b$ doit être un multiple de 5. Mais c'est impossible car $4 - v$ vaut 1, 2, 3 ou 4 (selon les valeurs de $v \geq 0$) donc n'est pas un multiple de 5, et b non plus par hypothèse.