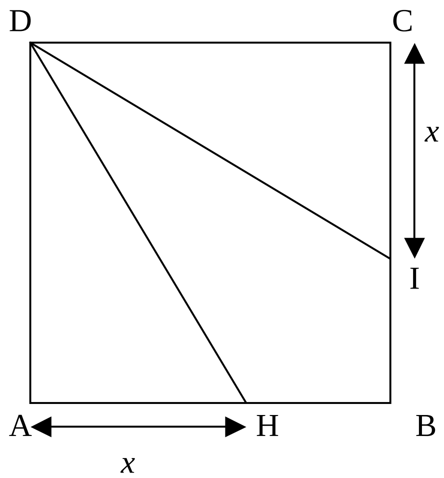
Corrigé Sujet 2008 – Séries L, ES, STI, STG

Exercice 1



1) L'aire de chacun des triangles rectangles DCI et ADH est $\frac{x}{2}$. L'aire du quadrilatère DIBH est $1 - x$. Si les trois parties ont la même aire, alors x est solution de l'équation $1 - x = \frac{x}{2}$ et donc $x = \frac{2}{3}$.

   Réciproquement x doit appartenir à [0 ; 1] et comme $\frac{2}{3}$ appartient à [0 ;1], on en déduit que Léonard doit donner à x la valeur de $\frac{2}{3}$ pour que les trois aires soient égales.

2) On procède de même. L'aire de chacun des triangles rectangles DCI et ADH est $\frac{x}{2}$. L'aire du triangle DHI est $1 - x - \frac{(1-x)^2}{2}$ soit $\frac{1-x^2}{2}$. Donc si les trois parties ont la même aire, alors $x^2 + x - 1 = 0$. Cette équation admet deux solutions réelles distinctes dont une seule appartient à l'intervalle [0 ; 1] : $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

   Les trois triangles peuvent donc avoir la même aire, c'est le cas si et seulement si $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

3) Plaçons-nous dans le repère orthonormal (A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$). Dans ce repère, on a A(0 ; 0), D(0 ; 1), C(1 ; 1), H($\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; 0), J($\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; 1) et I(1 ; $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$). Pour simplifier les notations, on pose $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Une équation de (DI) est $y = -\alpha x + 1$, une équation de (AC) est $y = x$ une équation de (HJ) est $x = \alpha$.
(DI) et (AC) sont non parallèles. Notons G (a ;b) leur point d'intersection. Le couple (a,b) vérifie :
$\begin{cases} b = -\alpha a + 1 \\ b = a \end{cases}$ qui équivaut à $\begin{cases} a = \alpha \\ b = \alpha \end{cases}$. Ainsi, G appartient également à (HJ). Les trois droites deux à deux distinctes (DI), (JH) et (AC) sont donc concourantes en G.

Exercice 2

1) L'objectif est de déterminer si un entier est bon ou mauvais. Il s'agit, pour montrer qu'un nombre est bon, de trouver une décomposition en somme d'entiers non nuls, distincts ou non, dont la somme des inverses est égale à 1. Une telle décomposition s'appellera une « bonne décomposition ». Une décomposition en somme d'entiers non nuls, distincts ou non, dont la somme des inverses n'est pas égale à 1 sera appelée une « mauvaise décomposition ».
   Par conséquent, **pour montrer qu'un nombre est bon**, **il suffit de trouver une bonne décomposition**.
   Les décompositions 4 = 2 + 2, 9 = 3 + 3 + 3 et 10 = 4 + 4 + 2 sont bonnes et donc, 4, 9 et 10 sont bons.
   En revanche, **pour montrer qu'un nombre est mauvais**, **il faut montrer que toutes les décompositions de ce nombre sont mauvaises !** Ceci peut se révéler très fastidieux si l'on ne fait pas les remarques élémentaires suivantes (on pourrait faire une analyse plus fine de la situation). Elles fournissent des conditions suffisantes pour qu'une décomposition soit mauvaise et permettent ainsi de limiter considérablement le nombre de cas à étudier.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

• Si 1 apparaît dans la décomposition de n, alors $n = 1 + n'$ avec $n' > 0$. Or $\frac{1}{1} + \frac{1}{n'} > 1$ donc une décomposition de n $(n \geqslant 2)$ qui contient 1 est une mauvaise décomposition.

Plus généralement, on peut faire la remarque suivante :

• Si un entier $k \geqslant 1$ apparaît k fois dans une décomposition de n et que $n > k^2$, alors $n = k \times k + n'$ avec $n' > 0$.
Or, $k \times \frac{1}{k} + \frac{1}{n'} = 1 + \frac{1}{n'} > 1$. Donc une telle décomposition est mauvaise.

Par exemple, pour étudier le cas $n = 6$, on voudrait trouver une bonne décomposition. Les remarques précédentes permettent d'éliminer immédiatement les décompositions suivantes :
1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1
1 + 1 + 1 + 1 + 2
1 + 1 + 1 + 3
1 + 1 + 4
1 + 5
1 + 2 + 3
2 + 2 + 2 (c'est la seule décomposition en trois termes ou plus ne faisant pas apparaître de 1)
Il ne reste plus donc qu'à étudier les décompositions en somme de deux termes non nuls ne comprenant pas de 1 qui sont 2 + 4 et 3 + 3. On prouve sans mal qu'elles sont mauvaises. Donc 6 est mauvais.

En utilisant les remarques précédentes, on montre que 4, 9 et 10 sont bons, 5, 6, 7 et 8 sont mauvais.

2) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Si n est le carré d'un nombre entier k, alors $n = \underbrace{k + \ldots + k}_{\text{k fois}}$

Or $k \times \frac{1}{k} = 1$ donc une telle décomposition est bonne. Ainsi, le carré de tout nombre entier supérieur ou égal 2 est bon.

3) Supposons qu'un nombre n soit bon. Il existe alors p entiers naturels non nuls n_1, …, n_p, tels que

   $n = \sum_{i=1}^{p} n_i$, avec $\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{n_i} = 1$.

• $2n + 2 = 2\sum_{i=1}^{p} n_i + 2 = \sum_{i=1}^{p} (2n_i) + 2$. Or $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{2n_i} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{n_i}\right) + \frac{1}{2} = 1$. Donc on a trouvé une bonne décomposition de $2n + 2$ et il s'ensuit que <u>$2n + 2$ est bon</u>.

• $2n + 9 = 2\sum_{i=1}^{p} n_i + 3 + 6 = \sum_{i=1}^{p} (2n_i) + 3 + 6$. Or $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{2n_i} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{n_i}\right) + \frac{1}{2} = 1$. <u>Donc $2n + 9$ est bon</u>.

4) On admet que tous les nombres entiers compris entre 24 et 55 sont bons. Nous allons prouver que tous les nombres supérieurs ou égaux à 56 sont bons également.

• $56 = 2 \times 27 + 2$. Or par hypothèse, 27 est bon et donc, d'après la question 3), <u>56 est bon</u>.

• Supposons que jusqu'à un certain rang $p \geqslant 56$, tous les nombres entiers compris entre 24 et p soient bons.

Montrons alors que $p + 1$ est bon.

<u>** 1er cas : p + 1 est un nombre pair*</u>

Alors il existe un entier $n \geqslant 2$ tel que $p + 1 = 2n + 2$. Quelle condition vérifie n ?
$n = \dfrac{p-1}{2}$ donc en particulier, $n \leqslant p$ et comme de plus, $p \geqslant 57$ (car $p + 1$ est pair), alors $n \geqslant 28$. Comme on a supposé que tous les nombres entiers compris entre 24 et p sont bons, alors n est bon et en utilisant la question 3), p + 1 est bon.

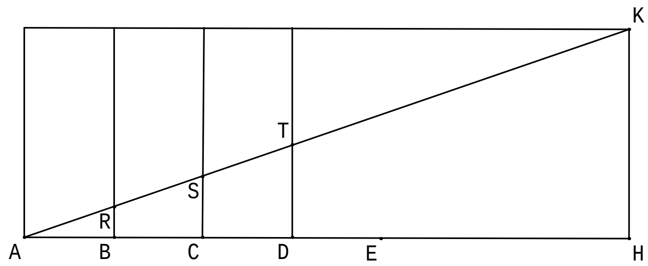
<u>** 2nd cas : p + 1 est impair*</u>

Alors il existe un entier $n \geqslant 2$ tel que $p + 1 = 2n + 9$ (car $p + 1$ est un nombre impair supérieur ou égal à 57).
On a $n = \dfrac{p-8}{2}$ donc en particulier $n \leqslant p$ et comme $p \geqslant 56$, alors $n \geqslant 24$. Comme on a supposé que tous les nombres entiers compris entre 24 et p sont bons, alors n est bon et en utilisant la question 3), $p + 1$ est bon.

L'étude de ces deux cas permet de prouver que tous les nombres entiers supérieurs ou égaux à 56 sont bons. En effet, on a prouvé que 56 était bon. Donc tous les nombres entiers compris entre 24 et 56 le sont. Donc 57 est bon, puis 58 est bon…ainsi de suite. Ce raisonnement est un exemple de raisonnement par récurrence.

Exercice 3

1) En juxtaposant les faces sur un plan, nous obtenons le dessin ci-dessous :



Ainsi, la longueur du fil est AK et AK = $\dfrac{\text{KH}}{\sin(30)}$ = 2 KH = 60. Chloé utilisera 60 cm de fil.

Nous avons aussi AH = $\dfrac{\text{KH}}{\tan(30)}$ = $30\sqrt{3}$ et 51,96 < AH < 52 ; or 8 AB = 48 donc le fil s'arrêtera sur l'arête [C'D'] de la face supérieure à environ 3,96 cm du sommet C'.

2) Nous proposons deux méthodes pour résoudre cette question. Nous pouvons superposer les faces sur une seule ou ouvrir la pyramide en suivant le fil [AS].

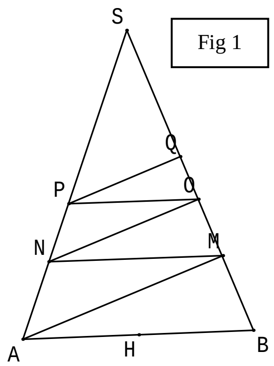


Fig 1

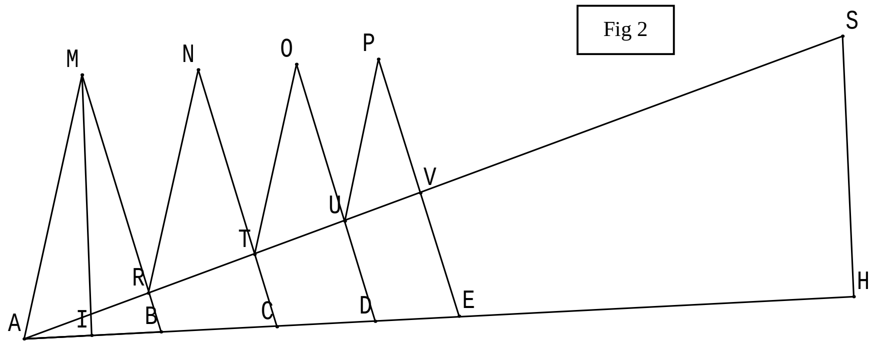


Fig 2

<u>1ère méthode</u> : Sur la figure 2, les triangles ABR et MIB sont rectangles et leurs angles en B ont même mesure, donc les angles IMB et RAB ont même mesure α.

AS = $\dfrac{\text{SH}}{\sin(\alpha)}$ = $\dfrac{\text{SH}\times\text{MB}}{\text{IB}}$ = $\dfrac{\sqrt{900\ -9}\times 30}{3}$ = $9\sqrt{11}\times 10$ = $90\ \sqrt{11}$.

La longueur du fil est $90\sqrt{11}$ cm, (environ 298 cm).

<u>2nde méthode</u> : Sur la figure 1, le fil est matérialisé par les segments [AM] [NO] [PQ] …, les droites (AM), (NO), (PQ) … perpendiculaires à (SB) sont parallèles ainsi que les droites (AB), (MN), (PO), … . Et alors $\dfrac{\text{SN}}{\text{SA}} = \dfrac{\text{SO}}{\text{SM}} = \dfrac{\text{NO}}{\text{AM}}$ puis $\dfrac{\text{SO}}{\text{SM}} = \dfrac{\text{SQ}}{\text{SO}} = \dfrac{\text{PQ}}{\text{NO}}$, d'où $\dfrac{\text{NO}}{\text{AM}} = \dfrac{\text{PQ}}{\text{NO}} = \dfrac{\text{SN}}{\text{SA}} = \dfrac{\text{SM}}{\text{SA}}$ = cos(2α).

La suite des longueurs du fil sur chaque face est géométrique de raison cos(2α) (qui est strictement compris entre 0 et 1). A la $n^{\text{ième}}$ étape, la longueur du fil utilisé est $\text{AM}\dfrac{1-\cos^{n}(2\alpha)}{1-\cos(2\alpha)}$ de limite $\dfrac{\text{AM}}{1-\cos(2\alpha)}$ (qui vaut, bien sûr, $90\ \sqrt{11}$) mais qui n'est jamais atteinte. Une infinité de tours sera nécessaire.

Exercice 4

1°) a) 342 m en 58 s.

Vitesse : 342/58 ≈ 5,9 m/s ; $\dfrac{0{,}342 \times 3600}{58} \approx 21{,}23$ km/h.

Du Belvédère à la Nacelle, 101 m. Temps : 101/5,9 ≈ 17 s.

b) Temps mis pour monter les dix premiers étages : $u_1 = 10$,
Temps mis pour monter de l'étage 10 à l'étage 20 : $u_2 = 20$, la suite *u* est géométrique de raison 2.
Temps mis pour monter de l'étage 130 à l'étage 140 : $u_{14} = u_1 \times 2^{13}$
Temps pour arriver à l'étage 140 :
$u_1 + u_2 + \ldots u_{14} = 10 \times \dfrac{1-2^{14}}{1-2}$ = 163830 s =2730 min 30 s = 45 h 30 min 30 s.

c) Pour monter les 64 premiers étages : 1 min
pour les 32 étages suivants, de l'étage 64 à l'étage 96 : 1 min
pour les 16 étages suivants, de l'étage 96 à l'étage 112 : 1 min
pour les 8 étages suivants, de l'étage 112 à l'étage 120 : 1 min
pour les 4 étages suivants, de l'étage 120 à l'étage 124 : 1 min
pour les 2 étages suivants, de l'étage 124 à l'étage 126 : 1 min
pour l'étage suivant, de l'étage 126 à l'étage 127 : 1 min. Donc en 7 min il arrive au 127 ème étage.
Puis il lui faut 1 min pour monter un demi-étage, 1 min pour 0,25 étage et ainsi de suite...
en 4 min, il aura monter : 0,5 + 0,25 + 0,125 + 0,0625 = 0,9075 étage...
A ce rythme, il n'atteindra jamais le 128 ème étage...

2°) 1776 = 4 × 444 = 16 × 111 = 16 × 3 × 37.
X monte les marches 3 par 3 ; donc il déposera 16 × 37 = 592 $.
Y monte les marches 4 par 4 ; donc il déposera 4 × 3 × 37 = 444 $.
La somme récoltée est donc : 592+ 444 = 1036 $.
1776 = 4 × 3 × 4 × 37 = 12 × 148. Il y aura 2 $ toutes les 12 marches, donc 148 marches porteront 2 $.

3°)
B : 90 / 72 = 5 / 4 tour ; 360° × 5/4 = 450 °.
C : 60 / 72 = 5 / 6 tour ; 360° × 5/6 = 300 °.
D : 45 / 72 = 5 / 8 tour ; 360° × 5/8 = 225 °.