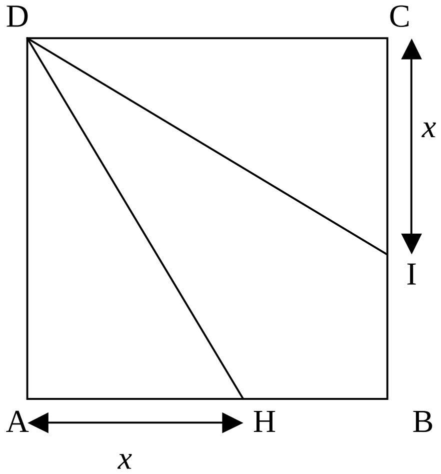
Corrigé Sujet 2008 – Série S-SVT et S-SI

Exercice 1



1) L'aire de chacun des triangles rectangles DCI et ADH est $\frac{x}{2}$. L'aire du quadrilatère DIBH est $1 - x$. Si les trois parties ont la même aire, alors x est solution de l'équation $1 - x = \frac{x}{2}$ et donc $x = \frac{2}{3}$.
   Réciproquement x doit appartenir à [0 ; 1] et comme $\frac{2}{3}$ appartient à [0 ;1], on en déduit que Léonard doit donner à x la valeur de $\frac{2}{3}$ pour que les trois aires soient égales.

2) On procède de même. L'aire de chacun des triangles rectangles DCI et ADH est $\frac{x}{2}$. L'aire du triangle DHI est $1 - x - \frac{(1-x)^2}{2}$ soit $\frac{1-x^2}{2}$. Donc si les trois parties ont la même aire, alors $x^2 + x - 1 = 0$. Cette équation admet deux solutions réelles distinctes dont une seule appartient à l'intervalle [0 ; 1] : $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
   Les trois triangles peuvent donc avoir la même aire, c'est le cas si et seulement si $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

3) Plaçons-nous dans le repère orthonormal $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$. Dans ce repère, on a A(0 ; 0), D(0 ; 1), C(1 ; 1), H$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} ; 0\right)$, J$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} ; 1\right)$ et I$\left(1 ; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$. Pour simplifier les notations, on pose $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Une équation de (DI) est $y = -\alpha x + 1$, une équation de (AC) est $y = x$ une équation de (HJ) est $x = \alpha$.
(DI) et (AC) sont non parallèles. Notons G $(a ;b)$ leur point d'intersection. Le couple (a,b) vérifie :
$\begin{cases} b = -\alpha a + 1 \\ b = a \end{cases}$ qui équivaut à $\begin{cases} a = \alpha \\ b = \alpha \end{cases}$. Ainsi, G appartient également à (HJ). Les trois droites deux à deux distinctes (DI), (JH) et (AC) sont donc concourantes en G.

Exercice 2

1) L'objectif est de déterminer si un entier est bon ou mauvais. Il s'agit, pour montrer qu'un nombre est bon, de trouver une décomposition en somme d'entiers non nuls, distincts ou non, dont la somme des inverses est égale à 1. Une telle décomposition s'appellera une « bonne décomposition ». Une décomposition en somme d'entiers non nuls, distincts ou non, dont la somme des inverses n'est pas égale à 1 sera appelée une « mauvaise décomposition ».
 Par conséquent, **pour montrer qu'un nombre est bon**, **il suffit de trouver une bonne décomposition**.
 Les décompositions $4 = 2 + 2$, $9 = 3 + 3 + 3$ et $10 = 4 + 4 + 2$ sont bonnes et donc, 4, 9 et 10 sont bons.
 En revanche, **pour montrer qu'un nombre est mauvais**, **il faut montrer que toutes les décompositions de ce nombre sont mauvaises !** Ceci peut se révéler très fastidieux si l'on ne fait pas les remarques élémentaires suivantes (on pourrait faire une analyse plus fine de la situation). Elles fournissent des conditions suffisantes pour qu'une décomposition soit mauvaise et permettent ainsi de limiter considérablement le nombre de cas à étudier.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. • Si 1 apparaît dans la décomposition de n, alors $n = 1 + n'$ avec $n' > 0$. Or $\frac{1}{1} + \frac{1}{n'} > 1$ donc une décomposition de n ($n \geqslant 2$) qui contient 1 est une mauvaise décomposition. Plus généralement, on peut faire la remarque suivante : • Si un entier $k \geqslant 1$ apparaît k fois dans une décomposition de n et que $n > k^2$, alors $n = k \times k + n'$ avec $n' > 0$. Or, $k \times \frac{1}{k} + \frac{1}{n'} = 1 + \frac{1}{n'} > 1$. Donc une telle décomposition est mauvaise.

Par exemple, pour étudier le cas $n = 6$, on voudrait trouver une bonne décomposition. Les remarques précédentes permettent d'éliminer immédiatement les décompositions suivantes :
$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$
$1 + 1 + 1 + 1 + 2$
$1 + 1 + 1 + 3$
$1 + 1 + 4$
$1 + 5$
$1 + 2 + 3$
$2 + 2 + 2$ (c'est la seule décomposition en trois termes ou plus ne faisant pas apparaître de 1)
Il ne reste plus donc qu'à étudier les décompositions en somme de deux termes non nuls ne comprenant pas de 1 qui sont $2 + 4$ et $3 + 3$. On prouve sans mal qu'elles sont mauvaises. Donc 6 est mauvais.

En utilisant les remarques précédentes, on montre que 4, 9 et 10 sont bons, 5, 6, 7 et 8 sont mauvais.

2) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Si n est le carré d'un nombre entier k, alors $n = \underbrace{k + \ldots + k}_{\text{k fois}}$

Or $k \times \frac{1}{k} = 1$ donc une telle décomposition est bonne. Ainsi, le carré de tout nombre entier supérieur ou égal 2 est bon.

3) Supposons qu'un nombre n soit bon. Il existe alors p entiers naturels non nuls $n_1, \ldots, n_p$, tels que $n = \sum_{i=1}^{p} n_i$, avec $\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{n_i} = 1$.

• $2n + 2 = 2\sum_{i=1}^{p} n_i + 2 = \sum_{i=1}^{p}(2n_i) + 2$. Or $\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{2n_i} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{n_i}\right) + \frac{1}{2} = 1$. Donc on a trouvé une bonne décomposition de *2n + 2* et il s'ensuit que <u>*2n + 2* est bon</u>.

• $2n + 9 = 2\sum_{i=1}^{p} n_i + 3 + 6 = \sum_{i=1}^{p}(2n_i) + 3 + 6$. Or $\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{2n_i} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{n_i}\right) + \frac{1}{2} = 1$. <u>Donc *2n + 9* est bon</u>.

4) On admet que tous les nombres entiers compris entre 24 et 55 sont bons. Nous allons prouver que tous les nombres supérieurs ou égaux à 56 sont bons également.

• $56 = 2 \times 27 + 2$. Or par hypothèse, 27 est bon et donc, d'après la question 3), <u>56 est bon</u>.

• Supposons que jusqu'à un certain rang $p \geqslant 56$, tous les nombres entiers compris entre 24 et p soient bons.

Montrons alors que $p + 1$ est bon.

<u>** 1er cas : p + 1 est un nombre pair*</u>

Alors il existe un entier $n \geqslant 2$ tel que $p + 1 = 2n + 2$. Quelle condition vérifie n ?
$n = \dfrac{p-1}{2}$ donc en particulier, $n \leqslant p$ et comme de plus, $p \geqslant 57$ (car $p + 1$ est pair), alors $n \geqslant 28$. Comme on a supposé que tous les nombres entiers compris entre 24 et p sont bons, alors n est bon et en utilisant la question 3), p + 1 est bon.

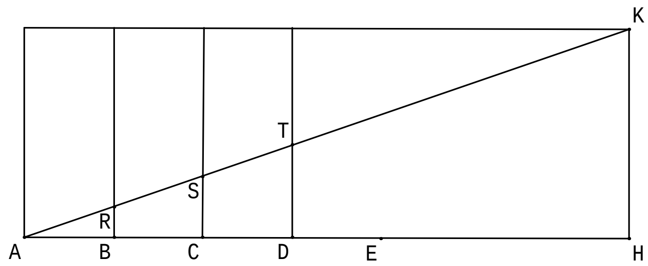
<u>** 2nd cas : p + 1 est impair*</u>

Alors il existe un entier $n \geqslant 2$ tel que $p + 1 = 2n + 9$ (car $p + 1$ est un nombre impair supérieur ou égal à 57).
On a $n = \dfrac{p-8}{2}$ donc en particulier $n \leqslant p$ et comme $p \geqslant 56$, alors $n \geqslant 24$. Comme on a supposé que tous les nombres entiers compris entre 24 et p sont bons, alors n est bon et en utilisant la question 3), $p + 1$ est bon.

L'étude de ces deux cas permet de prouver que tous les nombres entiers supérieurs ou égaux à 56 sont bons. En effet, on a prouvé que 56 était bon. Donc tous les nombres entiers compris entRe 24 et 56 le sont. Donc 57 est bon, puis 58 est bon…ainsi de suite. Ce raisonnement est un exemple de raisonnement par récurrence.

Exercice3

1) En juxtaposant les faces sur un plan, nous obtenons le dessin ci-dessous :



Ainsi, la longueur du fil est AK et AK = $\dfrac{\text{KH}}{\sin(30)}$ = 2 KH = 60. Chloé utilisera 60 cm de fil.

Nous avons aussi AH = $\dfrac{\text{KH}}{\tan(30)}$ = $30\sqrt{3}$ et 51,96 < AH < 52 ; or 8 AB = 48 donc le fil s'arrêtera sur l'arête [C'D'] de la face supérieure à environ 3,96 cm du sommet C'.

2) Nous proposons deux méthodes pour résoudre cette question. Nous pouvons superposer les faces sur une seule ou ouvrir la pyramide en suivant le fil [AS].

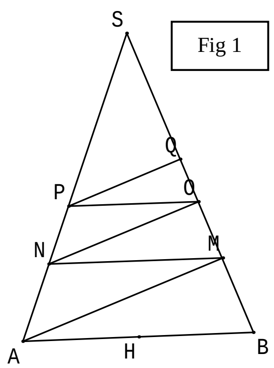


Fig 1

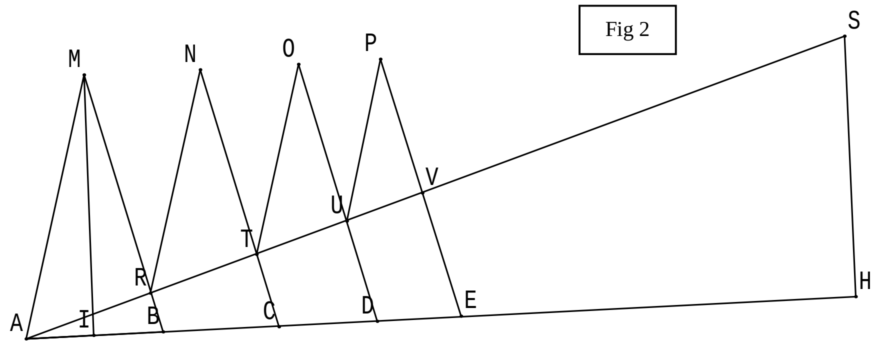


Fig 2

1ère méthode : Sur la figure 2, les triangles ABR et MIB sont rectangles et leurs angles en B ont même mesure, donc les angles IMB et RAB ont même mesure α.

AS = $\dfrac{\text{SH}}{\sin(\alpha)}$ = $\dfrac{\text{SH}\times\text{MB}}{\text{IB}}$ = $\dfrac{\sqrt{900-9}\times 30}{3}$ = $9\sqrt{11}\times 10$ = $90\sqrt{11}$.

La longueur du fil est $90\sqrt{11}$ cm, (environ 298 cm).

2nde méthode : Sur la figure 1, le fil est matérialisé par les segments [AM] [NO] [PQ] …, les droites (AM), (NO), (PQ) … perpendiculaires à (SB) sont parallèles ainsi que les droites (AB), (MN), (PO), … . Et alors $\dfrac{\text{SN}}{\text{SA}} = \dfrac{\text{SO}}{\text{SM}} = \dfrac{\text{NO}}{\text{AM}}$ puis $\dfrac{\text{SO}}{\text{SM}} = \dfrac{\text{SQ}}{\text{SO}} = \dfrac{\text{PQ}}{\text{NO}}$, d'où $\dfrac{\text{NO}}{\text{AM}} = \dfrac{\text{PQ}}{\text{NO}} = \dfrac{\text{SN}}{\text{SA}} = \dfrac{\text{SM}}{\text{SA}}$ = $\cos(2\alpha)$.

La suite des longueurs du fil sur chaque face est géométrique de raison $\cos(2\alpha)$ (qui est strictement compris entre 0 et 1). A la $n^{\text{ième}}$ étape, la longueur du fil utilisé est $\text{AM}\dfrac{1-\cos^{n}(2\alpha)}{1-\cos(2\alpha)}$ de limite $\dfrac{\text{AM}}{1-\cos(2\alpha)}$ (qui vaut, bien sûr, $90\sqrt{11}$) mais qui n'est jamais atteinte. Une infinité de tours sera nécessaire.

Exercice 4

Si $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont deux fractions, appelons *somme d'Aimé* de ces deux fractions, quand elle a un sens, la fraction $\frac{a+c}{b+d}$.

1. La question suivante fournissait un indice. Il suffit de changer les signes dans l'écriture fractionnaire du rationnel $\frac{9}{3}$, pour obtenir une somme d'Aimé donnant le même nombre que la somme classique :

$$\frac{-9}{-3}+\frac{4}{2}=3+2=5 \quad \text{et} \quad \frac{-9+4}{-3+2}=\frac{-5}{-1}=5 \; .$$

Noter que le nombre rationnel $\frac{-9}{-3}$ est strictement positif (ainsi que $\frac{4}{2}$).

2. Remarquons que si *a*, *b*, *c*, *d* sont des nombres quelconques tels que $b>0$ et $d>0$, on obtient l'équivalence suivante en multipliant par bd :

$$\frac{a}{b}<\frac{c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad ad<bc \quad \Leftrightarrow \quad bc-ad>0$$

Soient *a*, *b*, *c* et *d* des entiers, avec *a* positif ou nul, *b*, *c* et *d* strictement positifs ; alors $b+d>0$. La première partie de la question demande de montrer que si $bc-ad>0$, on a forcément : $(a+c)b-a(b+d)>0$ et $c(b+d)-(a+c)d>0$. On conclut en observant que :

$$(a+c)b-a(b+d)=bc-ad \quad \text{et} \quad c(b+d)-(a+c)d=bc-ad$$

Dans ces conditions :

- le résultat de la somme d'Aimé est strictement inférieur à $\frac{c}{d}$;
- la somme classique est supérieure ou égale à $\frac{c}{d}$, puisque $\frac{a}{b}\geqslant 0$;

Par conséquent, on ne peut jamais avoir égalité entre la somme d'Aimé de deux fractions d'entiers naturels *distinctes*, et leur somme classique.

Il reste à traiter le cas où les fractions d'entiers naturels $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont *égales*. Dans ce cas, $bc-ad=0$, et il vient $c(b+d)-(a+c)d=bc-ad=0$, d'où : $\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Or l'égalité $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ ne se produit que lorsque $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=0$.

Ainsi, Aimé ne pourra pas trouver d'exemple, hormis $0+0$.

3. La ligne qu'il a écrite ensuite est :

$$\frac{0}{1} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{1}{1}$$

et la dernière qu'il ait écrite est :

$$\frac{0}{1} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{2}{7} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{3}{7} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{4}{7} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{5}{8} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{5}{7} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{1}{1}$$

4. Pour GDGGD, on obtient 7/19 :

Étape	1	2	3	4	5	6
Code		G	D	G	G	D
Intervalle	[0/1 ; 1/1]	[0/1 ; 1 /2]	[1/3 ; 1 /2]	[1/3 ; 2/5]	[1/3 ; 3/8]	[4/11 ; 3/8]
Fraction	1/2	1/3	2/5	3/8	4/11	7/19

Pour trouver 11/18, la méthode consiste, à chaque étape à partir de la deuxième, à comparer 11/18 au résultat de l'étape précédente :

- si 11/18 est plus petit, on choisit l'intervalle de gauche (G) ;
- si 11/18 est plus grand, on choisit l'intervalle de droite (D).

Cette méthode garantit que 11/18 est toujours dans l'intervalle considéré.

Étape	1	2	3	4	5	6
Code		D	G	D	G	G
Intervalle	[0/1 ; 1/1]	[1/2 ; 1/1]	[1 /2 ; 2/3]	[3/5 ; 2/3]	[3/5 ; 5/8]	[3/5 ; 8/13]
Fraction	1/2	2/3	3/5	5/8	8/13	11/18

Le nombre 11/18 a été trouvé en 6 étapes, avec le codage DGDGG.

5. a) Soit F la fraction obtenue à la fin d'une étape. À l'étape suivante, quel que soit l'intervalle choisi (droite ou gauche), l'une de ses bornes est F, et l'autre borne a un dénominateur entier supérieur ou égal à 1. Leur somme d'Aimé aura donc un dénominateur strictement plus grand que celui de F.
Ainsi, le dénominateur de la fraction obtenue *augmente à chaque étape*. À la fin de l'étape 1, ce dénominateur est 2 ; à la fin de l'étape *n*, donc $n-1$ étapes plus loin, il est au moins égal à $2+n-1=n+1$.

b) Dans les conditions de l'énoncé, on a :
$bp'>aq'$, où bp' et aq' sont des entiers ; donc $bp'\geqslant aq'+1$.
$bp<aq$, où bp et aq sont des entiers ; donc $bp\leqslant aq-1$.
En multipliant la première inégalité obtenue par $q>0$ et la seconde par $-q'<0$, il vient :
$bp'q\geqslant aqq'+q$ et $-bpq'\geqslant -aqq'+q'$. Il ne reste plus qu'à additionner membre à membre pour obtenir : $b(p'q-pq')\geqslant q+q'$.
D'autre part, $b=b(p'q-pq')$ car $p'q-pq'=1$.

c) Soit r un nombre rationnel, $0<r<1$. Alors r est dans l'intervalle [0/1 ; 1/1] ; on applique la méthode de choix du 4., ce qui garantit que r est toujours dans l'intervalle choisi. Nous allons démontrer que cette méthode permet toujours d'obtenir r en un nombre fini d'étapes.

Pour cela, écrivons r sous la forme $\frac{a}{b}$, où b est un entier naturel non nul, et *supposons que le nombre r n'ait toujours pas été obtenu au bout de* $b-1$ *étapes*. À l'étape suivante :

- nous pouvons choisir un intervalle [p/q ; p'/q'] dans lequel se trouve a/b ;
- p/q et p'/q' proviennent d'étapes précédentes, donc $p/q\neq a/b$ et $p'/q'\neq a/b$; d'après 5b), $b\geqslant q+q'$;
- l'une des deux fractions p/q et p'/q' est celle qui a été obtenue à l'étape précédente, la $b-1^{e}$; d'après 5a), $q\geqslant b$ ou $q'\geqslant b$; donc $q+q'\geqslant b+1$.

On obtient alors : $b\geqslant b+1$, ce qui est impossible.
Ainsi, r a été obtenu au bout de $b-1$ étapes au plus.

Noter que l'énoncé et le corrigé font implicitement la distinction entre **fraction** et **nombre rationnel**. Quand la méthode d'Aimé fait apparaître une *fraction*, on peut parler *du* dénominateur de cette fraction : si Aimé construit la fraction 2/5 en employant sa méthode, le mot dénominateur désignera sans ambiguïté le nombre entier 5, et ce, bien que 2/5 = 4/10, par exemple. Par contre, quand on parle d'égalités ou d'inégalités, c'est entre *nombres rationnels* : par exemple, à la question 5c), quand on écrit $p/q\neq a/b$, il faut comprendre qu'une telle inégalité serait considérée comme *fausse* entre les rationnels 2/5 et 4/10.

Compléments.

On a vu que l'égalité $p'q-pq'=1$ est particulièrement importante pour garantir le bon fonctionnement de la méthode d'Aimé. On peut démontrer qu'elle reste vraie tout au long de la méthode, de la manière suivante :

- On constate qu'elle est vraie pour l'intervalle [0/1 ; 1/1], qui est celui de la première étape ; en effet, $1\times 1-0\times 1=1$.
- D'autre part, si elle est vraie pour un intervalle [p/q ; p'/q'], l'intervalle suivant choisi par la méthode est, soit $\left[\frac{p}{q};\frac{p+p'}{q+q'}\right]$, soit $\left[\frac{p+p'}{q+q'};\frac{p'}{q'}\right]$; dans le premier cas, $(p+p')q-p(q+q')=pq+p'q-pq-pq'=p'q-pq'=1$; dans le second cas, $p'(q+q')-(p+p')q'=p'q-pq'=1$.

Autrement dit, *si l'égalité est vraie pour les bornes de l'intervalle considéré à une étape, elle est à nouveau vraie à l'étape suivante*. Comme elle est vraie à la première étape, de proche en proche, on déduit qu'elle est vraie à la deuxième, la troisième, ..., donc vraie *à toutes les étapes*.
Ce raisonnement est un cas particulier de **raisonnement par récurrence**.

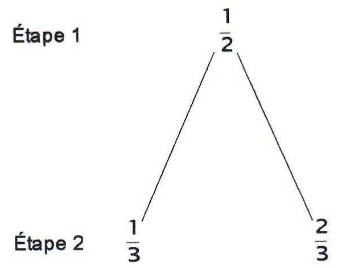
En fait, cette égalité est la clé de la méthode, car c'est grâce à elle qu'on peut obtenir la minoration $b\geqslant q+q'$ dans la question 5b). Cette minoration montre que, dès que l'entier $q+q'$ est assez grand (plus grand que b), on ne peut plus avoir $\frac{p}{q}<\frac{a}{b}<\frac{p'}{q'}$; et ceci entraîne (voir question 5c) que a/b est forcément déjà égal à l'un des rationnels p/q et p'/q'.
Ce mécanisme n'est pas spécifique à la méthode d'Aimé. De manière générale, on conçoit sans difficulté que si r est un rationnel, et si on parvient à en faire un encadrement par des rationnels p/q et p'/q', avec $q+q'$ assez grand et $p'q-pq'=1$, alors l'un des rationnels p/q et p'/q' est égal à r.

En plus de garantir que la méthode d'Aimé permet d'obtenir n'importe quel nombre rationnel de] 0 ; 1 [choisi à l'avance, l'égalité $p'q-pq'=1$ a une conséquence curieuse que nous examinons :

Soit d un diviseur commun à p et à q. Alors d divise $p'q-pq'$, c'est-à-dire 1. Ainsi, 1 est le seul diviseur positif commun à p et à q (de même, c'est le seul diviseur positif commun à p' et à q').

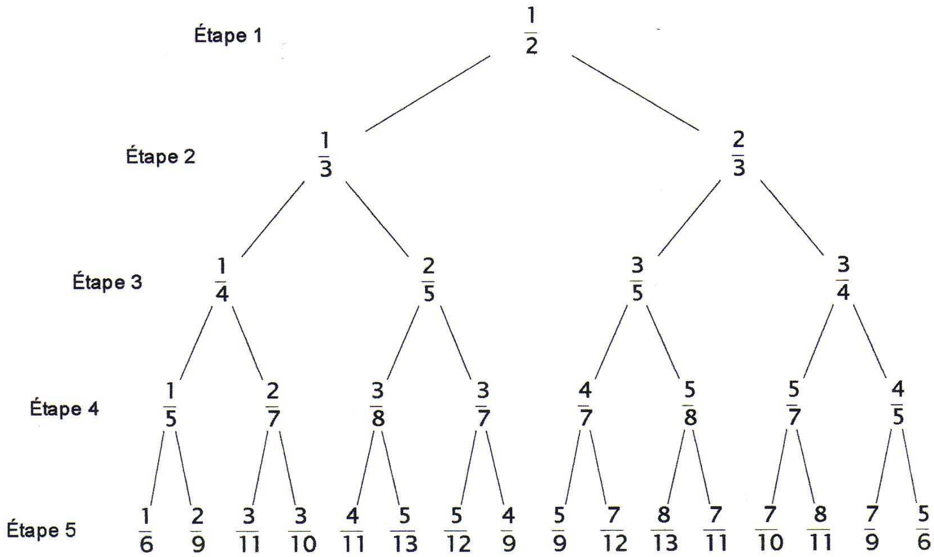
Autrement dit, les fractions p/q et p'/q' sont irréductibles ! Par conséquent, toutes les fractions obtenues par la méthode d'Aimé sont **irréductibles** ; et non seulement la méthode d'Aimé permet d'obtenir n'importe quel rationnel de] 0 ; 1 [, mais en plus, elle l'obtiendra sous forme de fraction irréductible.

Après la première étape où on obtient toujours 1/2, on peut choisir l'intervalle de gauche à la deuxième étape, qui produit la fraction 1/3 ; on peut également choisir l'intervalle de droite, qui produit la fraction 2/3. On obtient l'*arbre* suivant, qui indique le résultat de chaque possibilité de choix :



En parcourant l'arbre de gauche à droite, on lit : 1/3 ; 1/2 ; 2/3. On retrouve une des lignes écrites par Aimé à la question 3 (il ne manque que 0/1 et 1/0).

On peut poursuivre la construction de l'arbre en ajoutant les fractions obtenues à la troisième étape, à la quatrième, etc. Voici ce qu'on obtient après cinq étapes :



En lisant les nombres de gauche à droite, on obtient la liste qu'aurait écrite par Aimé à la cinquième étape : (0/1) 1/6, 1/5, 2/9, 1/4, 3/11, 2/7, ..., 3/4, 7/9, 4/5, 5/6 (1/1).
Ce procédé peut être poursuivi indéfiniment, l'arbre obtenu est l'**arbre de Stern-Brocot**.
Celui-ci a de nombreuses propriétés ; on pourra remarquer, entre autres :

- que les rationnels les plus à gauche sont tous les rationnels de la forme $1/p$, $p \geqslant 2$;
- la symétrie des dénominateurs ;
- qu'à chaque étape, on ajoute à l'arbre une nouvelle liste de fractions, deux fois plus qu'à l'étape précédente ;
- que les numérateurs de la première moitié coïncident avec les numérateurs de l'étape précédente, et que les numérateurs de la seconde moitié coïncident avec les *dénominateurs* de l'étape précédente ;
- qu'à l'étape n, l'arbre contient toutes les fractions irréductibles de] 0 ; 1 [dont le dénominateur est inférieur ou égal à $n+1$ (voir question 5. et page précédente). Quand on y ajoute 0/1 et 1/1, ces fractions constituent la *suite de Farey d'ordre* $n+1$.

Pour plus de détails, et en particulier, sur une version matricielle du calcul permettant d'obtenir le rationnel correspondant à n'importe quel codage, voir http://fr.wikipedia.org/wiki/Arbre_de_Stern-Brocot et http://perso.orange.fr/jean-paul.davalan/arit/stern/index.html.
Pour plus de détails sur les suites de Farey, voir http://fr.wikipedia.org/wiki/Suite_de_Farey.