DÉNOMBREMENT - COMBINAISONS

1. Définitions

- **Ensemble**

Un **ensemble** E est une collection d'objets ***distincts*** x qu'on appelle **éléments**. On note $x \in E$.

Exemples :

A = {a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z}

$\mathbb{N}$ = {0,1,2,3,4,5, ...}

T_A = {« Mathis », « Lise », ..., « Juliette »,« Raphaël »}

Remarques :

- On note les ensembles avec des accolades.
- L'ensemble qui ne contient aucun élément est appelé ensemble vide. On le note $\varnothing$.
- Il n'y a pas de notion d'ordre dans un ensemble (comme dans l'exemple T_A). Pour les NSI, penser aux dictionnaires en Python.
- Le nombre d'éléments d'un ensemble E fini est appelé **cardinal**. On le note **card (*E*)**. Par exemple, card (A) = 26 et card (T_A) = 31. En revanche $\mathbb{N}$ n'a pas de cardinal fini ...

- **Partie**

On appelle **partie** d'un ensemble E, un ensemble F tel que tous les éléments de F sont aussi dans E. On note $F \subset E$.

Exemples :

E = {a,b,c}

Les parties de E sont tous les sous-ensembles possibles de E (dont l'ensemble vide).

$\varnothing$, {a}, {b}, {c}, {a,b}, {a,c}, {b,c} et {a,b,c} sont donc toutes les parties de E.

L'ensemble des parties de E constitue un **nouvel ensemble noté P(*E*)**. Dans l'exemple, on a donc :

P(E) = {$\varnothing$, {a}, {b}, {c}, {a,b}, {a,c}, {b,c} et {a,b,c}}.

À faire vous-même 1 :

Soit E = {+, -, ×, ÷}

Écrire P(*E*), l'ensemble des parties de *E*.

lien vers l'aide

Remarques : voir le paragraphe « vocabulaire et définitions » du chapitre « LOI BINÔMIALE »

- L'ensemble $E \cap F$ est une partie de E et une partie de *F*.
- *E* et *F* sont des parties de $E \cup F$.
- Une partie à un seul élément s'appelle un **singleton**.
- Si $E \cap F$ = ∅, on dit que les ensembles *E* et *F* sont **disjoints**. Autrement dit, *E* et *F* n'ont aucun élément en commun.

• *k*-uplet

On appelle ***k*-uplet** d'un ensemble *E* à *n* éléments, une collection de *k* objets de *E* pas forcément distincts (qui peuvent donc se répéter) pour laquelle l'ordre compte. On note les *k*-uplets avec des parenthèses.

Remarques :

- Si *k* = 2, on a un 2-uplet, ce qui s'appelle un couple.
- Si *k* = 3, on a un 3-uplet, ce qui s'appelle un triplet.

Exemples :

E = {a,b}

Les 1-uplets sont : (a) et (b)

Les 2-uplets sont : (a,a), (b,b), (a,b) et (b,a)

Les 3-uplets sont : (a,a,a), (a,a,b), (a,b,a), (a,b,b), (b,a,a), (b,a,b), (b,b,a), (b,b,b)

etc ...

Le nombre *k* peut être supérieur à *n*.

Pour les Terminale NSI, cette notion a déjà été rencontrée en Première, c'est la notion de t-uple ...

À faire vous-même 2 :

Écrire tous les nombres binaires à 4 chiffres que l'on peut écrire avec les bits 0 et 1.

0000 est un nombre binaire à 4 chiffres par exemple.

lien vers l'aide

- ## Permutations d'un ensemble

On appelle permutation d'un ensemble E dont tous les éléments sont distincts, un n-uplet de E d'éléments distincts.

Exemple :

E = {a,b,c}

Les permutations de l'ensemble E sont les 3-uplets de E :

{a,b,c} , {a,c,b} , {b,a,c} , {b,c,a} , {c,a,b} et {c,b,a}

- ## produit cartésien

Soit E et F deux ensembles *pas forcément disjoints*. On appelle **produit cartésien** de E et de F et on note $E\times F$ l'ensemble de tous les couples (x,y) tels que $x\in E$ et $y\in F$.

Exemple :

E = {a,b,c} et F = {1,2}

$E\times F$ = {(a,1) , (a,2) , (b,1) , (b,2) , (c,1) , (c,2)}

Remarque :

$F\times E$ = {(1,a) , (1,b) , (1,c) , (2,a) , (2,b) , (2,c)}

Il est évident que $E\times F$ et $F\times E$ sont deux ensembles différents.

À faire vous-même 3 :

Un club de vacances propose quatre activités pour le matin : vélo, canoë, randonnée, voile

et deux activités l'après-midi : atelier culinaire et randonnée

Chaque vacancier peut choisir une activité pour le matin et une pour l'après-midi, qui peut être la même que celle du matin.

Écrire tous les « menus » possibles pour la journée (choix de 2 activités) :

2. Dénombrement

- **Nombre d'éléments de l'ensemble** $E \cup F$

Soit E et F deux ensembles pas forcément disjoints. Le cardinal (nombre d'éléments) de l'ensemble $E \cup F$ est égal à :

card ($E \cup F$ *) = card (E) + card (F) - card (* $E \cap F$ *)*

Exemple :

E = {a,b,c,d} et F = {b,d,e}. Donc $E \cap F$ = {b,d}

card ($E \cup F$)= 4 +3 -2 = 5

À faire vous-même 4 :

Dans une classe de 30 élèves, 12 pratiquent le foot (ensemble F), 15 pratiquent le volley (ensemble V) et 7 pratiquent ces deux activités.

Déterminer le cardinal de $F \cup V$, ensemble des élèves pratiquant le foot ou le volley.

lien vers une remarque

- **Nombre d’éléments de l’ensemble** $E \times F$

Soit E et F deux ensembles pas forcément disjoints. Le cardinal (nombre d’éléments) de l’ensemble $E \times F$ est égal à :

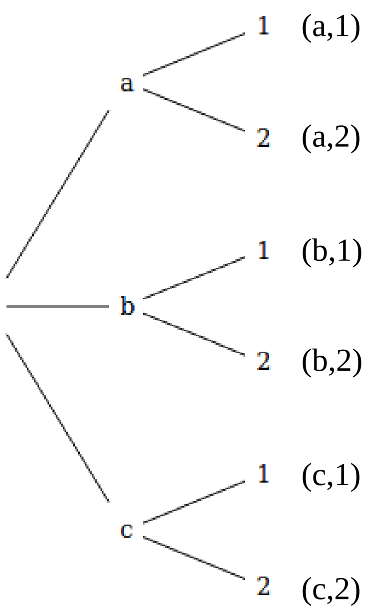
card ($E \times F$) = card (E) × card (F)

Exemple :

E = {a,b,c} et F = {1,2}

card ($E \times F$)= 3×2 = 6

Pour illustrer cette formule de calcul, il suffit de réaliser l’arbre qui permet d’écrire tous les éléments qui appartiennent à l’ensemble $E \times F$:



À faire vous-même 5 :

Un code de photocopieuse est constitué d’une lettre majuscule de l’alphabet et d’un chiffre entre 0 et 9. Combien de codes peut-on ainsi constituer ?

lien vers l’aide

• Nombre de *k*-uplets dans un ensemble à *n* éléments

Exemple :

Reprenons l'exemple du paragraphe 1. avec E = {a,b}. On a vu que :

les 1-uplets sont : (a) et (b), les 2-uplets sont : (a,a), (b,b), (a,b) et (b,a), les 3-uplets sont : (a,a,a), (a,a,b), (a,b,a), (a,b,b), (b,a,a), (b,a,b), (b,b,a), (b,b,b)

Il est facile d'observer que :

le nombre de 1-uplets est égal à $2 = 2^1$

le nombre de 2-uplets est égal à $4 = 2^2$

le nombre de 3-uplets est égal à $8 = 2^3$

etc ...

> Le nombre de k-uplets d'un ensemble à n éléments est égal à n^k.

> ***À faire vous-même 6 :***
>
> Pour aller à son travail, Léo rencontre sur son trajet 7 feux tricolores. Chaque feu peut être rouge (R), vert (V) ou orange (O). On note F={R , V , O }, l'ensemble des différentes couleurs possibles des feux. Un trajet étant une succession de couleurs de feux, combien de trajets différents Léo peut-il faire pour se rendre à son travail ?
>
> *lien vers l'aide*

• Nombre de permutations d'un ensemble à *n* éléments

Exemple :

- Prenons un ensemble à 1 élément : E = {a}. Il n'y a qu'un seul 1-uplet : {a} → 1 permutation
- Prenons un ensemble à 2 éléments : E = {a,b}. Il y a deux 2-uplets : {a,b} , {b,a} → $2 = 2 \times 1$
- On a vu dans le paragraphe 1. qu'un ensemble à 3 éléments avait 6 permutations : $6 = 3 \times 2 \times 1$

Vous pouvez dénombrer tout seul que le nombre de permutations d'un ensemble à 4 éléments est

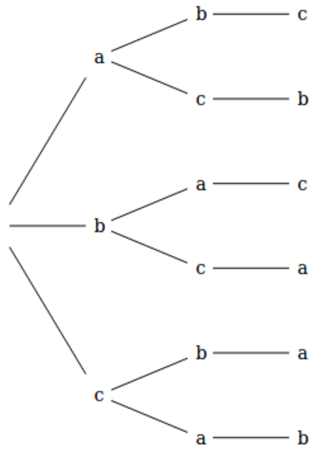
$24 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$ ...

> Le nombre de permutations d'un ensemble E à n éléments tous distincts est égal à $n!$, qui se lit « factorielle n » et qui se calcule ainsi : $n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times...\times2\times1$

Avec la calculatrice, pour calculer 7 ! par exemple, on appuie sur 7 *puis sur* math

PROB 4. ! *puis sur* entrer

On peut reprendre l'exemple avec 3 éléments {a,b,c}et représenter l'arbre qui permet d'écrire les différentes permutations :



On a bien 3 × 2 × 1 = 3! = 6

Pour illustrer ce paragraphe, vous pouvez exécuter le script Python du fichier :

permutations.py

À faire vous-même 7 :

Une anagramme est un mot (ayant un sens ou non) écrit en modifiant l'ordre des lettres du mot d'origine. Combien d'anagrammes peut-on former avec le mot « facteurs » ?

lien vers l'aide

• Nombre de *k*-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à *n* éléments

Le nombre de *k*-uplets d'éléments distincts d'un ensemble *E* à *n* éléments est égal à $\frac{n!}{(n-k)!}$.

Exemple :

Soit *E* = {a,b,c,d}.

Les 2-uplets d'éléments distincts de *E* sont : (a,b), (b,a), (a,c), (c,a), ...

Ces 2-uplets sont au nombre de $\frac{4!}{(4-2)!}=\frac{4!}{2!}=\frac{4\times3\times2\times1}{2\times1}=12$.

Vous pouvez tous les écrire pour vérifier.

Attention, (a,a), (b,b), (c,c), (d,d) n'en font pas partie.

À faire vous-même 8 :

Une association doit élire les trois membres de son bureau (président, secrétaire et trésorier) parmi 10 candidats. Une même personne ne peut pas cumuler plusieurs fonctions. Combien de bureaux différents peuvent être élus ?

lien vers l'aide

Pour illustrer ce paragraphe, vous pouvez exécuter le script Python du fichier :

k_uplets_distincts.py

3. Combinaisons

- **Nombre de parties à *k* éléments d'un ensemble à *n* éléments**

Le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments s'appelle une combinaison de k éléments parmi n et on note ce nombre $\binom{n}{k}$.

On a : $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Exemple :

E = {« Tour Eiffel », « Musée d'Orsay », « Musée des Arts et Métiers », « Assemblée Nationale », « Musée du Louvre », « Musée Grévin »}.

Le nombre de circuits de 4 sites pouvant être organisés à partir de ces 6 sites est le nombre de parties à 4 éléments de l'ensemble E à 6 éléments.

On a donc : $\binom{6}{4}=\frac{6!}{4!(6-4)!}=\frac{6!}{4!2!}=\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1\times2\times1}=\frac{6\times5}{2\times1}=15$.

À faire vous-même 9 :

En classe de première générale, au lycée Renoir, un élève doit choisir 3 spécialités parmi 10 spécialités possibles. Combien de combinaisons cela représente-t'il ?

lien vers l'aide

Pour illustrer ce paragraphe, vous pouvez exécuter le script Python du fichier :

parties_k_elements.py

• Propriétés des combinaisons

À faire vous-même 10 :

Soit n et k deux nombres entiers naturels tels que $k \leq n$.

Essayer de compléter les formules ci-dessous en s'aidant le moins possible de la calculatrice :

$\binom{n}{0}=\dots$ $\binom{n}{n}=\dots$ $\binom{n}{1}=\dots$

$\binom{n}{\dots}=\binom{n}{n-k}$

$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{\dots}{\dots}$

lien vers les réponses

• Triangle de Pascal

À faire vous-même 11 :

Soit n et k deux nombres entiers naturels tels que $k \leq n$.

Compléter le tableau ci-dessous à l'aide des propriétés précédentes avec, dans chaque case, la valeur du nombre $\binom{n}{k}$ (Cette représentation des combinaisons est appelée **Triangle de Pascal**).

n \ k	0	1	2	3	4	5	6
0							
1							
2							
3							
4							
5							
6							

lien vers la solution

• Nombre de parties d’un ensemble à *n* éléments

À faire vous-même 12 :

1.

a. $E = \{a,b,c,d\}$ est un ensemble à 4 éléments.

Compter le nombre de parties de E à 0 élément, le nombre de parties de E à 1 élément, le nombre de parties de E à 2 éléments, le nombre de parties de E à 3 éléments et enfin le nombre de parties de E à 4 éléments (on pourra s’aider du paragraphe « Nombre de parties à k éléments d’un ensemble à n éléments) :

b. En déduire le nombre total de parties de l’ensemble E :

2. Conjecturer une formule générale pour le calcul du nombre total de parties d’un ensemble à n éléments (on pourra pour cela compter le nombre total de parties d’un ensemble à 1 élément, puis le nombre total de parties d’un ensemble à 2 éléments, puis le nombre total de parties d’un ensemble à 3 éléments et éventuellement le nombre total de parties d’un ensemble à 5 éléments)

lien vers l’aide

On retiendra alors la formule suivante :

Le nombre de parties d'un ensemble à *n* éléments est $\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k}$ et on a : $\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Pour illustrer ce paragraphe, vous pouvez exécuter le script Python du fichier :

nombre_total_parties.py

Aides pour les « À faire vous-même »

À faire vous-même 1 :

penser à l'ensemble vide, à l'ensemble E et au fait qu'il y a des parties à 1, 2 ou 3 éléments ...

retour au cours

À faire vous-même 2 :

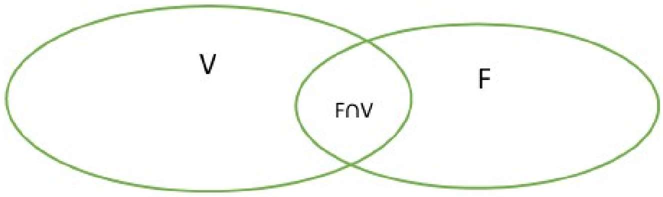
Il s'agit d'écrire tous les 4-uplets de l'ensemble à 2 éléments E = {0,1}. Dans cet exemple, on a

$n = 2$ et $k = 4$.

retour au cours

À faire vous-même 4 :

On peut illustrer cette situation par le diagramme suivant appelé *diagramme de Venn*, à compléter :



retour au cours

À faire vous-même 5 :

Il s'agit de calculer le cardinal de l'ensemble $E \times F$ *, où E est l'ensemble des 26 lettres de l'alphabet et F l'ensemble des 10 chiffres...*

retour au cours

À faire vous-même 6 :

Il s'agit de dénombrer les 7-uplets de l'ensemble F à 3 éléments...

retour au cours

À faire vous-même 7 :

Il s'agit de compter le nombre de permutations de l'ensemble $A = \{ f , a , c , t , e , u , r , s \}$*...*

retour au cours

À faire vous-même 8 :

Il s'agit de compter le nombre de 3-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à 10 éléments...

retour au cours

À faire vous-même 9 :

Il s'agit de compter le nombre de parties à 3 éléments d'un ensemble à 10 éléments...

retour au cours

À faire vous-même 10 :

$\binom{n}{0}=1$ $\binom{n}{n}=1$ $\binom{n}{1}=n$

$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$

retour au cours

À faire vous-même 11 :

n \ k	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

retour au cours

À faire vous-même 12 :

1. a.

- partie à 0 élément : $\varnothing$ → **1 =** $\binom{4}{0}$
- parties à 1 élément : {a} , {b} , {c} , {d} → **4 =** $\binom{4}{1}$
- parties à 2 éléments : {a,b} , {a,c} , {a,d} , {b,c} , {b,d} , {c,d} → **6 =** $\binom{4}{2}$
- parties à 3 éléments : {a,b,c} , {a,b,d} , {a,c,d} , {b,c,d} → **4 =** $\binom{4}{3}$
- parties à 4 éléments : {a,b,c,d} → **1 =** $\binom{4}{4}$

b. Le nombre de parties d'un ensemble à 4 éléments est donc : $\sum_{k=0}^{k=4}\binom{4}{k}=1+4+6+4+1=16=2^4$.

3.

- le nombre de parties de l'ensemble $\varnothing$ à 0 élément : 1 = 2^0.
- le nombre de parties d'un ensemble à 1 élément : 2 = 2^1.
- le nombre de parties d'un ensemble à 2 éléments : 4 = 2^2.
- le nombre de parties d'un ensemble à 3 éléments : 8 = 2^3.
- le nombre de parties d'un ensemble à 4 éléments : 16 = 2^4.
- le nombre de parties d'un ensemble à 5 élément : 32 = 2^5.
- etc ...

On peut conjecturer que le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est 2^n.

retour au cours