Adeline Pay, lycée Raoul Vadepied – Évron(53)
Emmanuel Malgras, collège Pierre et Marie Curie – Le Pellerin(44)

Expérimentation pédagogique sur le thème :
Différencier en mathématiques à l'aide du numérique

Deux activités de déformations d'images

*En terminale (option mathématiques expertes) : **matrices et systèmes***
*En 3^e^ et 2^nde^ : **programmes de calcul***

Thème 1 : MATRICES ET SYSTEMES EN MATHÉMATIQUES EXPERTES

Contexte

En mathématiques expertes, les élèves connaissent les matrices et savent les multiplier. Ils ne connaissent pas la matrice identité ni la notion de matrice inversible. Mais ils ont déjà calculé en « questions rapides » des produits du type $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \times \mathrm{A}$ ou $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} \times \mathrm{A}$ et simplement remarqué que le produit est égal à A.

Objectifs de l'activité

Découvrir la notion de matrice inversible sur l'exemple de matrices carrées d'ordre 2.
Découvrir la matrice identité I et la relation $\mathrm{A} \times \mathrm{A}^{-1} = \mathrm{I}$.
Savoir déterminer l'inverse d'une matrice inversible carrée d'ordre 2.

Modalités et consignes

Les élèves reçoivent l'énoncé de 3 activités de difficulté progressive associées à des fichiers tableurs. Dans chaque fichier tableur, ont été saisies les coordonnées $\begin{pmatrix}\mathrm{x}\\\mathrm{y}\end{pmatrix}$ d'un grand nombre de points qui forment une image quand on trace le nuage de points.

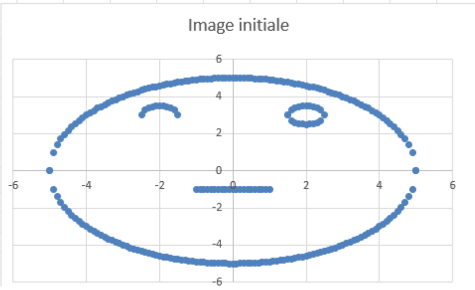
On applique une matrice $\mathrm{M} = \begin{pmatrix}\mathrm{a} & \mathrm{b}\\\mathrm{c} & \mathrm{d}\end{pmatrix}$ aux coordonnées $\begin{pmatrix}\mathrm{x}\\\mathrm{y}\end{pmatrix}$.

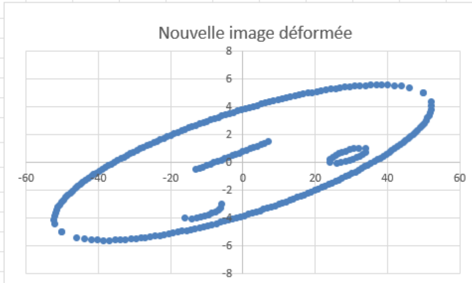
On obtient $\begin{pmatrix}\mathrm{x}'\\\mathrm{y}'\end{pmatrix} = \mathrm{M}\begin{pmatrix}\mathrm{x}\\\mathrm{y}\end{pmatrix}$ les coordonnées de nouveaux points qui forment une nouvelle image.

Extrait du premier fichier tableur

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	
1	x	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2	2,1	2,2	2,3	2,4	-2,5	
2	y	3	3,3	3,4	3,4583	3,4899	3,5	3,4899	3,4583	3,4	3,3	3	
3													
4	x'	24	25,9	27,2	28,375	29,47	30,5	31,47	32,375	33,2	33,9	-16	-
5	y'	0	-0,05	0	0,0709	0,1551	0,25	0,3551	0,4709	0,6	0,75	-4	-
6													
7													
8	Matrice												
9	10	3											
10	1	-0,5											

Image initiale et nouvelle image obtenues en appliquant la matrice M avec le premier fichier





L'objectif est de déterminer une matrice, qui appliquée aux coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, redonne l'image initiale.

➢ Activité 1

Voir fichier tableur « surprise 1 ».

1. Ouvrir le fichier « surprise 1 ». Apparaissent les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ d'un grand nombre de points : tracer le nuage de points correspondant.
2. On applique ensuite la matrice $M=\begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 1 & -0{,}5 \end{pmatrix}$ aux coordonnées de ces points. Cela signifie que le point image a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=M\times\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
   a. Calculer à la main les coordonnées du point image du premier point de coordonnées $\begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 3 \end{pmatrix}$.
   b. Utiliser le tableur pour calculer les coordonnées des images et faire tracer le nouveau nuage de points.
3. Quelle nouvelle matrice peut-on appliquer pour retrouver l'image de départ ?

Observations de la première activité

Les élèves entrent facilement dans l'activité, enthousiastes à l'idée de découvrir les images initiales et déformées.

La recherche d'une matrice N qui permet de redonner l'image initiale emprunte différents chemins :

- des élèves commencent par proposer $N=\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{1} & \frac{1}{-0{,}5} \end{pmatrix}$, ce qui ne fonctionne pas et essaient ensuite d'autres coefficients en tâtonnant. Pour ceux-là, je finis par suggérer de résoudre un système.
- Des élèves se lancent directement dans la résolution d'un système $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ en cherchant des valeurs pratiques pour le résoudre. Par exemple, ils repèrent, dans la colonne B, $\begin{pmatrix} 24 \\ 0 \end{pmatrix}$ avec un zéro, ce qui facilite la résolution du système : ils écrivent $\begin{cases} 24a+0b=1{,}5 \\ 24c+0d=3 \end{cases}$ et obtiennent immédiatement $a=\frac{1}{16}$ et $c=\frac{1}{8}$.
  Ensuite, ils repèrent des coordonnées entières, ici dans la colonne L, pour faciliter leurs calculs et déterminent les valeurs de b et d en résolvant $\begin{pmatrix} \frac{1}{16} & b \\ \frac{1}{8} & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -16 \\ -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

	A	B
1	**x**	1,5
2	**y**	3
3		
4	**x'**	24
5	**y'**	0

J	K	L
2,3	2,4	-2,5
3,4	3,3	3
33,2	33,9	-16
0,6	0,75	-4

- Des élèves ont compris qu'il faut chercher un processus inverse et saisissent directement $\begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 1 & -0,5 \end{pmatrix}^{-1}$ sur la calculatrice. Ils obtiennent la matrice inverse et je leur demande alors de trouver, à la main, cette réponse.

➢ Activité 1 BIS

Voir fichier tableur « surprise 2 ».

1. Ouvrir « surprise 2 » qui contient les coordonnées $(x; y)$ d'un grand nombre de points et tracer le nuage de points.
2. On applique la matrice $M=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ aux coordonnées de tous les points. Le point image a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=M \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Utiliser le tableur pour calculer les coordonnées et faire tracer le nouveau nuage de points.
3. Quelle nouvelle matrice peut-on appliquer pour retrouver l'image initiale ?

Objectif de l'activité 1BIS :
L'objectif est de gagner en aisance dans la résolution de système pour déterminer l'inverse d'une matrice inversible. En effet, la méthode a déjà été abordée à l'activité 1 et, ici, il n'y a aucun zéro dans les coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, ce qui complique la résolution du système.

➢ Activité 1 TER

Voir fichier tableur « surprise 3 ».

1. Ouvrir « surprise 3 ». Tracer le nuage de points correspondant aux coordonnées $(x; y)$.
2. Appliquer ensuite une matrice M au choix aux coordonnées de tous les points. Utiliser le tableur pour calculer les coordonnées des images et faire tracer le nouveau nuage de points.
3. Quelle nouvelle matrice doit-on appliquer pour retrouver l'image initiale ?

Objectif de l'activité 1TER :
L'objectif est, à nouveau, de gagner en aisance dans la résolution de système pour déterminer l'inverse d'une matrice lorsqu'elle est inversible et de découvrir que certaines matrices ne le sont pas. Les élèves ayant, par exemple, choisi $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ constatent que leur système n'a pas de solution.

Bilan global

Après ces trois activités, la notion de matrice inversible et le fait qu'une matrice ne l'est pas forcément sont introduits
Nous constatons sur les exemples précédents que $MM^{-1}=M^{-1}M=I$ et admettons la généralisation à toute matrice carrée inversible.

Prolongement de l'activité

Les élèves les plus en avance cherchent, dans le cas général, à quelle condition une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible et, le cas échéant, ils calculent les coefficients de la matrice inverse.
Ils peuvent ensuite programmer en langage Python un algorithme qui demande en entrée les coefficients a, b, c, d d'une matrice carrée d'ordre 2, qui détermine et affiche un message précisant si la matrice est inversible et qui affiche les coefficients de la matrice inverse lorsqu'elle existe.

Thème 2 : ÉQUATIONS AVEC DES DÉFORMATIONS D'IMAGES EN 3^{eme} ET EN SECONDE

Contexte

Cette activité a été proposée à deux classes de 3^{e} du collège Pierre et Marie Curie du Pellerin, à une classe de 3ème du collège Paul Langevin d'Evron et à une classe de 2^{nde} du lycée Raoul Vadepied d'Evron.
En 3^{e}, les élèves connaissent les programmes de calcul, ont abordé la résolution d'équation en remontant les calculs et ont déjà utilisé un tableur pendant l'année scolaire.
En 2^{nde}, les élèves ont travaillé, en plus des notions déjà connues depuis la 3^{e}, la fonction inverse.

Objectifs de l'activité

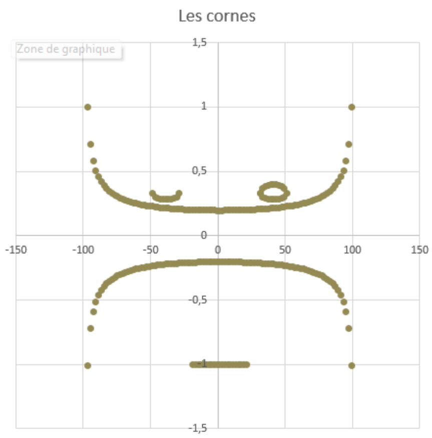
Remonter des calculs pour retrouver la figure d'origine connaissant la figure déformée obtenue et réussir à écrire en un seul calcul la « remontée des calculs ».

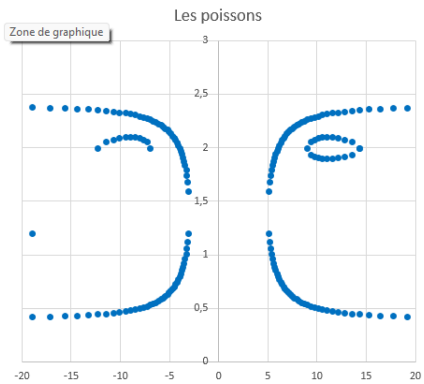
Modalités et consignes

On explique aux élèves que l'on a une image composée de nombreux points de la forme $(x;y)$ sur lesquels on a appliqué un programme de calcul A pour chaque abscisse et un programme de calcul O pour chaque ordonnée, pour obtenir des points de la forme $(x';y')$.
Les coordonnées $(x;y)$ d'origines ayant disparu, leur but est de les retrouver pour faire apparaître l'image d'origine. Pour cela, ils ont à leur disposition un fichier tableur avec trois onglets pour trois figures différentes de niveau de difficulté progressif, ainsi qu'une fiche pour les guider, sur laquelle ils peuvent retrouver les programmes de calcul A et O utilisés pour chacune des trois figures.

Le tableur leur propose une autocorrection de leurs résultats et une formulation littérale des programmes de calcul A et O.
Les trois figures transformées (ci-dessous), pour ne pas être trop proches de la figure réelle de départ (le smiley ci-contre), ont nécessité l'utilisation de l'inverse d'un nombre, calcul que les élèves n'ont jamais « remonté ».

Une petite démonstration visuelle où je demande aux élèves comment remettre à l'état initial le livre que je venais d'inverser (retourner) leur a permis très rapidement de comprendre que, pour « remonter » une inversion, on doit faire une inversion (c'est-à-dire que l'opération réciproque de l'inverse est l'inverse).

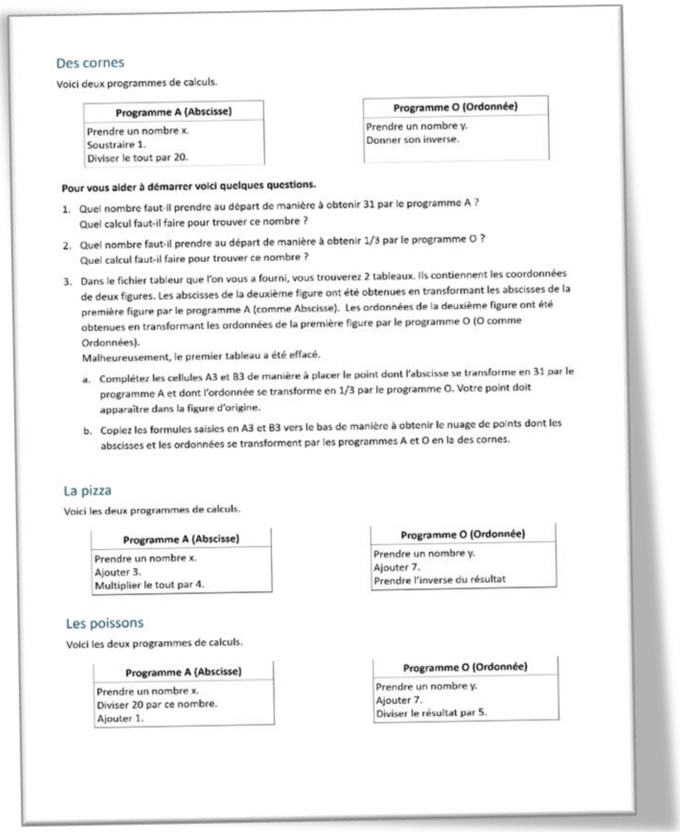




Dans deux classes de 3^e, une fiche a été proposée aux élèves.

Dans une classe de 3^e et dans la classe de 2^{nde}, aucune fiche n'a été donnée. L'enseignant a fourni les aides au fur et à mesure des besoins. Par exemple, des oublis de parenthèses ont amené à rappeler les priorités opératoires.

En 2^{nde}, le calcul « 1/y » a posé des problèmes et l'enseignant a pu réactiver les connaissances utiles sur la fonction inverse.



Des cornes

Voici deux programmes de calculs.

Programme A (Abscisse)
Prendre un nombre x. Soustraire 1. Diviser le tout par 20.

Programme O (Ordonnée)
Prendre un nombre y. Donner son inverse.

Pour vous aider à démarrer voici quelques questions.

1. Quel nombre faut-il prendre au départ de manière à obtenir 31 par le programme A ?
   Quel calcul faut-il faire pour trouver ce nombre ?
2. Quel nombre faut-il prendre au départ de manière à obtenir 1/3 par le programme O ?
   Quel calcul faut-il faire pour trouver ce nombre ?
3. Dans le fichier tableur que l'on vous a fourni, vous trouverez 2 tableaux. Ils contiennent les coordonnées de deux figures. Les abscisses de la deuxième figure ont été obtenues en transformant les abscisses de la première figure par le programme A (comme Abscisse). Les ordonnées de la deuxième figure ont été obtenues en transformant les ordonnées de la première figure par le programme O (O comme Ordonnées).
   Malheureusement, le premier tableau a été effacé.
   a. Complétez les cellules A3 et B3 de manière à placer le point dont l'abscisse se transforme en 31 par le programme A et dont l'ordonnée se transforme en 1/3 par le programme O. Votre point doit apparaître dans la figure d'origine.
   b. Copiez les formules saisies en A3 et B3 vers le bas de manière à obtenir le nuage de points dont les abscisses et les ordonnées se transforment par les programmes A et O en la des cornes.

La pizza

Voici les deux programmes de calculs.

Programme A (Abscisse)
Prendre un nombre x. Ajouter 3. Multiplier le tout par 4.

Programme O (Ordonnée)
Prendre un nombre y. Ajouter 7. Prendre l'inverse du résultat

Les poissons

Voici les deux programmes de calculs.

Programme A (Abscisse)
Prendre un nombre x. Diviser 20 par ce nombre. Ajouter 1.

Programme O (Ordonnée)
Prendre un nombre y. Ajouter 7. Diviser le résultat par 5.

Quelques commentaires :

Les élèves entrent avec enthousiasme dans l'activité.

Le fait de voir un smiley s'afficher permet tout de suite à l'élève de voir s'il a bon ou pas (avec une petite satisfaction quand le smiley s'affiche).

Certains élèves commencent à remplir le tableur en utilisant la calculatrice… Un petit rappel est nécessaire pour leur expliquer qu'il y a environ 500 calculs à faire pour chaque image et qu'un tableur est sûrement plus puissant qu'une calculatrice pour ce genre de tâche.

Les cornes ne posent pas trop de difficultés mathématiques aux élèves (si ce n'est comment faire une inversion). Encore faut-il leur rappeler que l'on peut « étirer » une formule sans la retaper.

La pizza et les poissons, quant à eux, sont un peu plus ambitieux (priorités opératoires, parenthèses ou pas…).

Quelques élèves, les plus en difficultés, ont du mal à remonter les calculs, mais finiront quand même par avoir un résultat pour les cornes, et seuls quelques élèves réussiront à aller jusqu'à la découverte de l'image d'origine des poissons.