Stéphane PERCOT – Lycée Rosa Parks – La Roche-sur-Yon

Expérimentation pédagogique sur le thème :
Différencier en mathématiques à l'aide du numérique

# Recherche de lieux géométriques

ou

*Comment aider les élèves à aller vers une modélisation algébrique autonome des problèmes de géométrie*

***TraAM 2025-2026***

***Expérimentation testée en classe de $2^{nde}$ GT au lycée Rosa Parks de La Roche-sur-Yon***

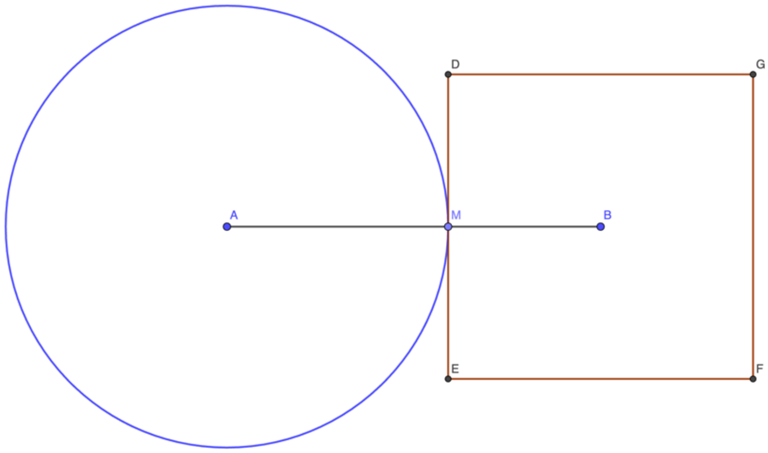
***Résumé de la ressource :***

- *Exemples de situations à faire vivre au lycée permettant de trouver un lieu géométrique respectant une égalité de longueurs, de surfaces ou de volumes.*
- *Utilisation des outils numériques pour différencier et accompagner la modélisation algébrique d'un problème.*
- *Utilisation d'aides facultatives pour différencier les énoncés, les processus d'apprentissage et ouvrir les problèmes.*

## 1) Énoncés de problèmes proposés aux élèves

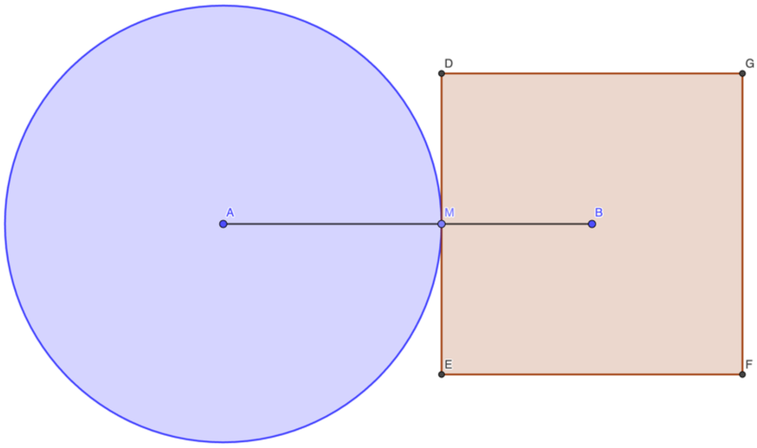
**Énoncé 1 :**

[AB] est un segment de longueur 10 cm. On a construit un carré centré en B et un cercle centré en A tels que le carré et le cercle sont tangents en M.
On cherche la position du point M pour que le carré et le cercle aient le même périmètre.



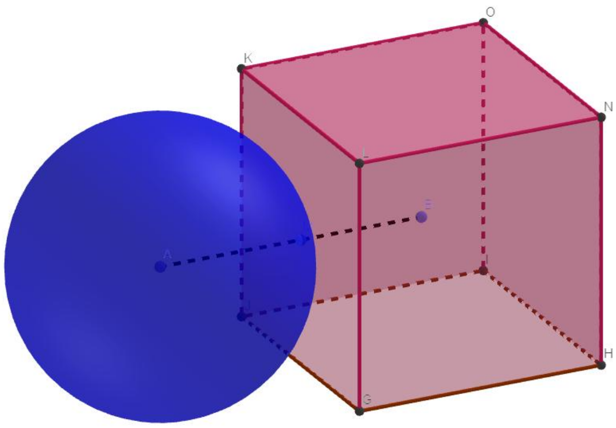

**Énoncé 2 :**

[AB] est un segment de longueur 10 cm. On a construit un carré centré en B et un disque centré en A tels que le carré et le disque sont tangents en M.
On cherche la position du point M pour que le carré et le disque aient la même surface.




**Énoncé 3 :**

[AB] est un segment de longueur 10 cm. On a construit un cube centré en B et une boule centrée en A tels que le cube et la boule sont tangents en M.
On cherche la position du point M pour que le cube et la boule aient le même volume.




**Note au sujet de la différenciation pédagogique :**

a) **Différenciation de contenu :** selon les besoins et les facilités des élèves en mathématiques, on peut leur proposer un seul, par exemple le premier, ou plusieurs de ces énoncés.
b) **Différenciation de production :** donner l'énoncé 1 peut inviter à attendre une réponse exacte du problème et une résolution complète. Donner l'énoncé 2 ou 3 pourra inviter à attendre une démarche partielle et/ou une réponse sous forme de valeur approchée.

## 2) Première piste de différenciation : le tableur (pour faciliter les essais et aller vers l'algèbre)

*Compétences mathématiques mises en jeu : chercher, calculer, raisonner, modéliser*

Lorsqu'on propose aux élèves (en début de classe de 2nde) un de ces problèmes, on voit souvent deux stratégies, deux entrées dans le problème :

- Stratégie 1 : certains élèves veulent « essayer » avec des valeurs particulières :
  Si AM = 1 cm, quels sont les longueurs des périmètres ?
  Si AM = 2 cm, quels sont les longueurs des périmètres ?
  …
  et on peut rechercher par « essais-erreurs » une valeur approchée de la position du point M.

- Stratégie 2 : certains élèves souhaitent modéliser le problème à l'aide de l'algèbre et peuvent être plus en moins en difficulté pour mettre en équation la situation.

Dans les 2 cas, le tableur peut être une aide, une passerelle vers l'algèbre :
Exemple de stratégie vu à l'aide du tableur :

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | longueur AM (en cm) | longueur MB (en cm) | périmètre du cercle (en cm) | périmètre du carré (en cm) | différence entre les 2 périmètres (en cm) |
| 2 | 0 | 10 | 0 | 80 | -80,000 |
| 3 | 1 | 9 | 6,283185307 | 72 | -65,717 |
| 4 | 2 | 8 | 12,56637061 | 64 | -51,434 |
| 5 | 3 | 7 | 18,84955592 | 56 | -37,150 |
| 6 | 4 | 6 | 25,13274123 | 48 | -22,867 |
| 7 | 5 | 5 | 31,41592654 | 40 | -8,584 |
| 8 | 6 | 4 | 37,69911184 | 32 | 5,699 |
| 9 | 7 | 3 | 43,98229715 | 24 | 19,982 |
| 10 | 8 | 2 | 50,26548246 | 16 | 34,265 |
| 11 | 9 | 1 | 56,54866776 | 8 | 48,549 |
| 12 | 10 | 0 | 62,83185307 | 0 | 62,832 |
| 13 | 5 | 5 | 31,41592654 | 40 | -8,584 |
| 14 | 5,1 | 4,9 | 32,04424507 | 39,2 | -7,156 |
| 15 | 5,2 | 4,8 | 32,6725636 | 38,4 | -5,727 |
| 16 | 5,3 | 4,7 | 33,30088213 | 37,6 | -4,299 |
| 17 | 5,4 | 4,6 | 33,92920066 | 36,8 | -2,871 |
| 18 | 5,5 | 4,5 | 34,55751919 | 36 | -1,442 |
| 19 | 5,6 | 4,4 | 35,18583772 | 35,2 | -0,014 |
| 20 | 5,7 | 4,3 | 35,81415625 | 34,4 | 1,414 |
| 21 | 5,8 | 4,2 | 36,44247478 | 33,6 | 2,842 |
| 22 | 5,9 | 4,1 | 37,07079331 | 32,8 | 4,271 |
| 23 | 6 | 4 | 37,69911184 | 32 | 5,699 |
| 24 | 5,6 | 4,4 | 35,18583772 | 35,2 | -0,014 |
| 25 | 5,61 | 4,39 | 35,24866957 | 35,12 | 0,129 |
| 26 | 5,62 | 4,38 | 35,31150143 | 35,04 | 0,272 |
| 27 | 5,63 | 4,37 | 35,37433328 | 34,96 | 0,414 |

Conclusion de l'élève : « *La position recherchée pour le point M est à une distance comprise entre 5,60 et 5,61 cm du point A* »

L'étude des formules utilisées peut permettre d'aller vers l'usage d'une variable

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | longueur AM (en cm) | longueur MB (en cm) | périmètre du cercle (en cm) | périmètre du carré (en cm) | différence entre les 2 périmètres (en cm) |
| 2 | 0 | =10-A2 | =2*PI()*A2 | =4*2*B2 | =C2-D2 |

Si j'appelle $x$ la longueur $AM$ :

- le rayon du cercle est donc $x$ et son périmètre est $2\,\pi\,x$.
- la longueur du côté du carré est $2(10 - x)$ et son périmètre est $4 \times 2(10 - x)$.
- l'égalité des périmètres est donc traduit par l'équation $2\,\pi\,x = 8(10 - x)$.

**Conclusion : le tableur peut aider les élèves à passer de la succession d'essais à la modélisation d'un problème par une équation.**

**Note au sujet de la différenciation pédagogique :**

**Différenciation de processus :** laisser les élèves s'engager vers une méthode par essai-erreur, à la main, à la calculatrice ou avec un tableur ou les accompagner vers une modélisation algébrique constitue une différenciation de processus perceptible et qui peut être exprimée clairement aux élèves.

### 3) Deuxième piste de différenciation : des indices ou des questions « coups de pouce »

*Compétences mathématiques mises en jeu : chercher, raisonner, modéliser*

Parfois, dans les manuels scolaires ou dans les fiches d'énoncés d'exercices donnés en classe, certains problèmes sont « fermés » par des questions successives guidant la démarche de l'élève.

Ces questions « intermédiaires » peuvent être utiles pour permettre aux élèves bloqués d'avancer mais elles mériteraient de ne pas être données en première intention, pour ne pas orienter a priori la démarche de l'élève.

Dans l'énoncé étudié ici : *« [AB] est un segment de longueur 10 cm. On a construit un carré centré en B et un cercle centré en A tels que le carré et le cercle sont tangents en M. On cherche la position du point M pour que le carré et le cercle aient le même périmètre. »*, il est intéressant de laisser les élèves s'engager sans obliger à une démarche particulière.

Si l'élève peine à démarrer, on peut l'inviter à essayer quelques valeurs pour la distance AM (voir paragraphe 2 ci-dessus), éventuellement aidé d'un tableur. Si la modélisation de problème par l'algèbre a déjà été travaillée et que l'on souhaite ne pas repasser nécessairement par un temps « d'essai-erreur », on peut aussi proposer aux élèves des aides « coups de pouce » ici formulées sous forme de questions pour les accompagner dans la mise en équation du problème. Il peut apparaitre judicieux de donner ces coups de pouce progressivement. Exemple de formulations :

| |
|---|
| Aide 1 : On peut noter $x$ la longueur AM. Comment peut-on alors exprimer le périmètre du cercle en fonction de $x$ ? |

| |
|---|
| Aide 2 : Peux-tu exprimer le périmètre du carré en fonction de $x$ ? |

| |
|---|
| Aide 3 : Quelle équation permet donc de traduire l'égalité entre les deux périmètres ? |

**Note au sujet de la différenciation pédagogique :**

Proposer des aides ponctuelles et individuelles permet une certaine différenciation de processus et peut contribuer à s'adapter aux besoins de chaque élève.

**Annexes : Les solutions algébriques des trois problèmes**

On suppose $M \in [AB]$. On pose $x = AM$ (en cm) on a donc $BM = AB - AM = 10 - x$
Le côté du carré est $2(10 - x)$
Le rayon du cercle / disque / boule est $x$.

**Problème 1 : égalité des périmètres**

- Périmètre du cercle : $Pc = 2\pi\, x$
- Périmètre du carré : $Ps = 4 \times 2(10 - x) = 8(10 - x)$

L'égalité des périmètres se traduit par l'équation $2\pi\, x = 8(10 - x)$
On résout cette équation :

$$\begin{aligned} 2\pi x &= 8(10 - x) \\ 2\pi x &= 80 - 8x \\ x(2\pi + 8) &= 80 \\ x &= \frac{80}{2\pi + 8} \\ x &= \frac{40}{\pi + 4} \\ x &\approx 5{,}60\ cm \end{aligned}$$

**Problème 2 : égalité des surfaces**

- Aire du disque : $Ac = \pi\, x2$
- Aire du carré : $As = 4(10 - x)2$

L'égalité des aires se traduit par l'équation $\pi\, x2 = 4\,(10 - x)2$
Comme $x \in [0\,;\ 10]$, on peut prendre la racine carrée (quantités positives) :
On résout cette équation :

$$\begin{aligned} \pi x^2 &= 4(10 - x)^2 \\ \sqrt{\pi}x &= 2(10 - x) \\ \sqrt{\pi}x &= 20 - 2x \\ x\left(\sqrt{\pi} + 2\right) &= 20 \\ x &= \frac{20}{\sqrt{\pi} + 2} \\ x &\approx 5{,}30\ cm \end{aligned}$$

**Problème 3 : égalité des volumes**

- Volume de la boule : $Vb = (4/3)\,\pi\, x^{3}$
- Volume du cube : $Vc = (2(10 - x))^3 = 8(10 - x)^3$

L'égalité des volumes se traduit par l'équation $\frac{4}{3}\,\pi\, x^{3} = 8(10 - x)^3$

$$\pi\, x^{3} = 6(10 - x)^3$$

Comme $x \in [0\,;\ 10]$, on peut prendre la racine cubique :

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\pi}x &= \sqrt[3]{6}(10 - x) \\ x(\sqrt[3]{\pi} + \sqrt[3]{6}) &= 10\sqrt[3]{6} \\ x &= \frac{10\sqrt[3]{6}}{(\sqrt[3]{\pi} + \sqrt[3]{6})} \\ x &\approx 5{,}55\ cm \end{aligned}$$