

Expérimentation pédagogique sur le thème

Favoriser et développer l'esprit critique

« Expérimentation sur les suites numériques, ou confronter la conjecture à la démonstration (transposable au collège) »

Lycée - 1ères STMG et Enseignement Spécifique

1. INTRODUCTION

Les différentes activités ont plusieurs objectifs communs :

- émettre des conjectures, parfois vraies, parfois fausses ;
- vérifier que notre intuition commune n'est pas infaillible ;
- déterminer des méthodes permettant de valider, ou d'invalidier, notre conjecture ;
- montrer l'intérêt de la démonstration.

L'idée générale est de montrer qu'une conjecture évidente peut s'avérer valable ou non, et de transmettre cela aux élèves. Il est assez complexe de trouver des exemples dans lesquels une conjecture semblant évidente s'avère fausse. Le but n'est pas de faire concevoir aux élèves qu'une conjecture ne peut être qu'une aberration, mais de faire en sorte qu'ils comprennent qu'une conjecture ne demeure qu'une hypothèse, tant qu'elle n'est pas démontrée.

Plusieurs activités seront présentées, certaines où les conjectures s'avèrent fausses, d'autres où l'on peut démontrer leur véracité, et d'autres encore où le doute demeure.

L'objectif principal est donc de travailler sur le sens critique des élèves, et de vérifier à quel endroit l'on place le curseur de certitude (ou de confiance).

2. LES DIFFERENTES ACTIVITES

Les activités ont été travaillées avec des classes de 1ère (STMG ou enseignement spécifique de Générale). Le thème travaillé correspond à une introduction sur les suites numériques.

a. PRESENTATION DE LA SITUATION

La séquence travaillée autour des suites numériques s'établit comme suit :

- activité introductive permettant d'introduire les notations, les notions, les calculs de termes ;
- différenciation entre les suites définies de façon explicite, ou par récurrence ;
- ensemble d'exercices permettant de manipuler ces notions.

Les activités qui sont ici présentées sont travaillées après ces préliminaires.

b. PREMIERE ACTIVITE : LA SUITE DE SYRACUSE (environ 30 min)

Lien vers l'activité : [LA SUITE DE SYRACUSE](#)

L'exercice est présenté comme tel et laissé à traiter par les élèves, de sorte qu'ils puissent construire (valider selon eux) eux-mêmes leur conjecture.

Lors de la séance, je passe vérifier le travail des élèves, car certains ne parviennent pas à revenir sur une série de 4 ; 2 ; 1, ce qui est souvent lié à une erreur de lecture de l'énoncé (ils utilisent régulièrement la mauvaise formule pour calculer u_{n+1}).

La conjecture de Syracuse étant émise, je ne rajoute rien sur le fait qu'il ne s'agisse que d'une conjecture, et qu'elle n'a pas été démontrée.

Les élèves sont ensuite invités à tester leur conjecture, pour la séance suivante, sur d'autres exemples, afin de la "valider".

Quelques freins liés à l'activité

- Comme prévu, certains élèves sont gênés par le mode de génération de la suite (première situation ou la relation de récurrence peut changer selon le terme obtenu à l'itération précédente). Malgré tout, l'entraide et le fait de laisser les élèves en autonomie permet de venir aider les membres du groupe en ayant besoin :
- On pourrait penser que le travail se termine rapidement pour les éléments plus efficaces, mais la notion de conjecture demandée peut être "validée" par plusieurs choix de premiers termes de la suite. On peut par exemple proposer 100 comme premier terme, ou 27.
- Pour les situations que les élèves n'auraient pas réussies à terminer, [un fichier tableur](#) est préparé, pour s'éviter les calculs intermédiaires, et "valider la conjecture".

c. DEUXIEME ACTIVITE : SUITE de NOMBRES PREMIERS (environ 1h)

Lien vers l'activité : [SUITE DE NOMBRES PREMIERS](#)

La deuxième activité est un exercice adapté du baccalauréat, lors duquel on demande de vérifier si les termes de la suite définie de façon explicite, pour tout entier naturel non nul, $u_n = n^2 - n + 41$ sont premiers.

L'activité leur étant donné comme tel, les élèves ont, à leur disposition, [un tableau de nombre premiers](#) projeté sur le tableau. A eux de se débrouiller pour voir si l'affirmation est valable ou non.

Lors de cette activité, deux clans se créent dans la classe :

- Un groupe "lâche l'affaire" et considère que le nombre de tests réalisés suffit pour conclure que l'affirmation est vraie
- Un autre groupe persévère et vérifie que l'assertion est fausse pour $n=41$.

En fin de séance, j'explique comment on aurait pu vérifier que l'affirmation n'avait aucune chance d'être valable pour $n=41$, et demande aux élèves pour quels "type d'entiers" elle n'est évidemment pas valable (les multiples de 41).

d. TROISIEME ACTIVITE : SECTEURS de DISQUE (environ 1h)

Lien vers l'activité : [SECTEURS DE DISQUE](#)

L'activité en question peut être travaillée au collège ou au lycée, avec des consignes différentes, et des objectifs différents. L'énoncé, en apparence très simple, permet d'obtenir une conjecture évidente, et sur laquelle l'ensemble des groupes classe s'entend, mais qui s'avère fausse.

Je laisse volontairement les élèves faire leur propre conjecture, et l'ensemble du groupe classe est unanime : le nombre de secteurs de disques se calcule ainsi pour n points placés, il y a 2^{n-1} secteurs de disque.

Précision : les élèves entrevoient plutôt une relation de récurrence (à chaque point supplémentaire placé, on double le nombre de secteurs de disque)

Après établissement de la conjecture sur le nombre de secteurs de disque, je demande aux élèves de compter ce nombre de secteurs en rajoutant un point. Certains en comptent 32, d'autres 31... Les élèves en ayant compté 31 secteurs sont persuadés d'avoir mal compté, ce qui leur est confirmé par les autres. Ils recomptent et retrouvent 31...

Le fichier joint est préparé pour compter de façon claire le nombre de secteurs de disque obtenus pour 6 points. Il sera projeté pour que l'on puisse compter ensemble et vérifier que la conjecture est fausse. Je redemande alors aux élèves ayant compté 32 secteurs de vérifier, afin de se mettre tous en accord sur 31 secteurs.

e. BILAN

Sur l'ensemble des activités, et des conjectures menées, on réalise un bilan avec la classe :

- la première reste à l'état de conjecture que je précise s'appeler la conjecture de Syracuse ;
- la deuxième s'avère fausse, preuve à l'appui ;
- la troisième s'avère également fausse (par l'expérimentation).

J'en profite pour insister sur le manque de véracité d'une conjecture, et qu'une démonstration est nécessaire.

Pour ce qui est de la troisième activité, une formule est proposée au groupe, qui coïncide avec les puissances de 2, mais qui ne coïncide plus dès que $n > 5$: pour tout entier naturel strictement positif, le nombre de secteurs pour n points placés sur le cercle est : $S_n = \frac{n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24}{24}$.

Une [démonstration de la formule](#) proposée est fournie en pièce jointe. Pour ma part, je n'ai pas insisté sur la démonstration de cette formule, qui est clairement hors programme, mais qui peut éventuellement être travaillée, je pense, dans l'option Maths Expertes. Il a seulement été précisé que l'on pouvait le prouver avec un travail de dénombrement, mais qui n'est pas actuellement à notre portée. Pour valider la formule, nous l'avons seulement testée en classe avec un émulateur de calculatrice projeté au tableau. Je m'attendais à quelques réticences sur ce dernier point, imaginant que les élèves ne seraient pas convaincus par cette conclusion, mais ils l'ont visiblement bien acceptée.

Je profite également de cette étude pour montrer l'intérêt de la condition "non diamétralement opposés" notée dans l'activité (voir fichier [Geogebra](#)).

La poursuite de l'étude se fait par la démonstration de la monotonie de plusieurs suites (créée par conjecture, puis validée). Ces démonstrations semblent légitimes auprès des élèves, par l'ensemble de l'étude réalisée.

3. BILAN GENERAL

Pour les élèves :

Bilan positif, les élèves se sont bien investis, et ont collaboré, en ayant malgré tout divergé sur leurs points de vue.

Pour l'enseignant :

Bilan positif également, permettant de légitimer la notion de démonstration, notamment sur la monotonie des suites. Un frein reste à noter sur la maîtrise du calcul algébrique.

Malgré tout, l'objectif annoncé initialement est atteint : les élèves ont travaillé leur esprit critique, et se sont accordés à ce qu'une hypothèse devait être vérifiée par une démonstration.

Les activités proposées sont bien évidemment transférables au collège, avec un autre vocabulaire, mais demeurent accessibles à partir de la classe de 4^{ème}, à condition d'avoir commencé le calcul littéral, et d'avoir traité les nombres premiers