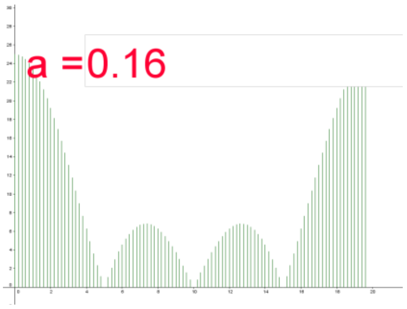
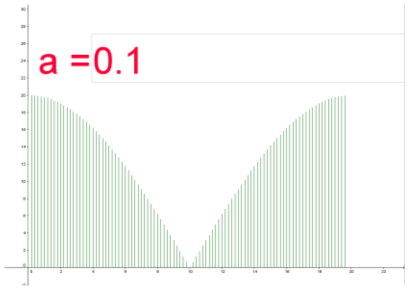
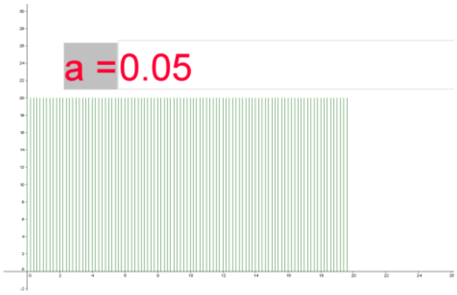
BTS SN – L'impulsion de Dirac et un signal porte







1 Thème abordé

1.1 Problématique, situation d'accroche

Définir l'impulsion de Dirac vue en physique.

1.2 Frontières de l'étude et prolongements possibles

L'impulsion de Dirac n'est pas une fonction mais une distribution.

Elle intervient en théorie de l'échantillonnage , elle constitue l'élément neutre du produit de convolution.

L'impulsion de Dirac permet d'introduire la notion de « bruit blanc », présentant tous les spectres de fréquence.

2 Objectifs pédagogiques

2.1 Disciplines impliquées

Mathématiques et physique.

2.2 Prérequis

En mathématiques : notion d'échantillonnage, manipulation du sigle Σ .

En physique : représentation spectrale (première année), échantillonnage.

2.3 Capacités

Savoir représenter un signal échantillonné, savoir calculer une TFD dans un cas simple.

2.4 Compétences

Calculer : utilisation de la formule définissant la TFD.

3 Outils

Géogébra, Xcas.

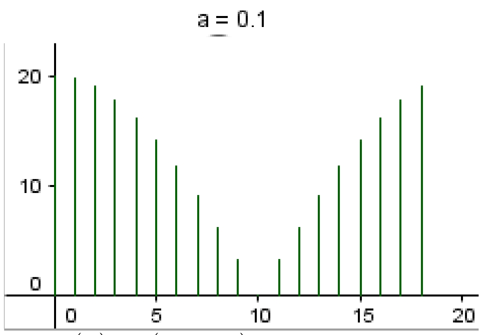
4 Contenu de la fiche

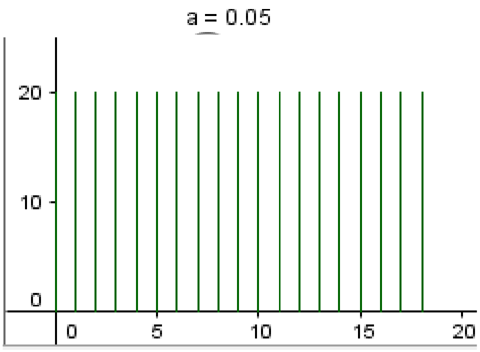
Soit a un nombre réel strictement positif. On considère le signal "porte" défini sur $\mathbb{R}$ par

$$s(t) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{si } 0 \leqslant t < a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On échantillonne ce signal à une fréquence de Fe = 20Hz pour N=20 points.

1) Représenter le signal échantillonné pour a = 0.1 et a = 0.05.
2) Justifier, sur au moins l'un des deux cas, le graphique obtenu par TFD.





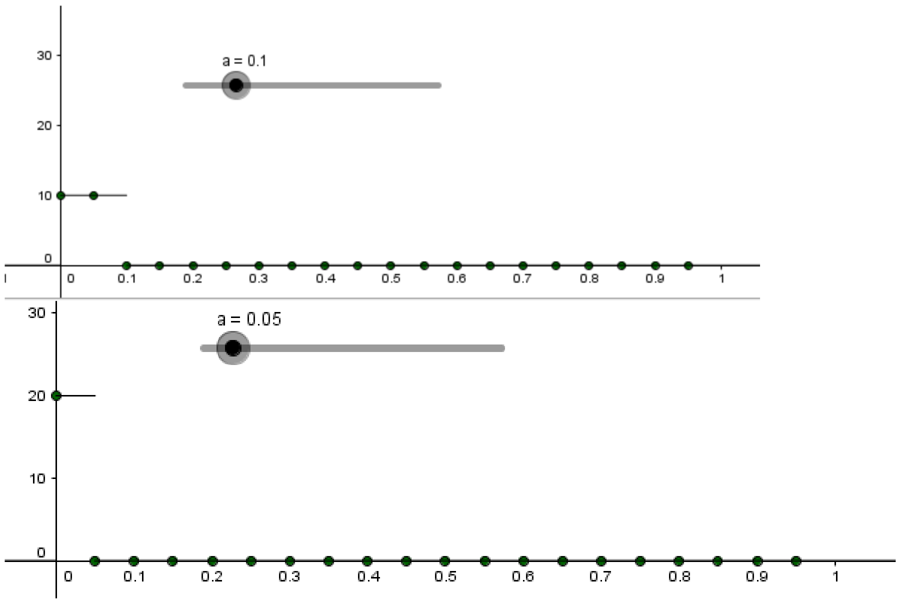
3)On note $s_1(t) = s(t - 0{,}1)$

Représenter ce signal échantillonné pour a=0,05 (Fe=20 Hz avec 20 points).

Expliquer comment déterminer la TFD de ce nouveau signal échantillonné à partir de la TFD obtenue à la question 2 .

<u>Eléments de réponse</u>

1)



2) Si a = 0.05, seule la valeur $x_0 = 20$ est non nulle

$$X_L = \sum_{k=0}^{19} x_k \omega^{-L*k} = x_0 = 20$$

donc X_L est constante.

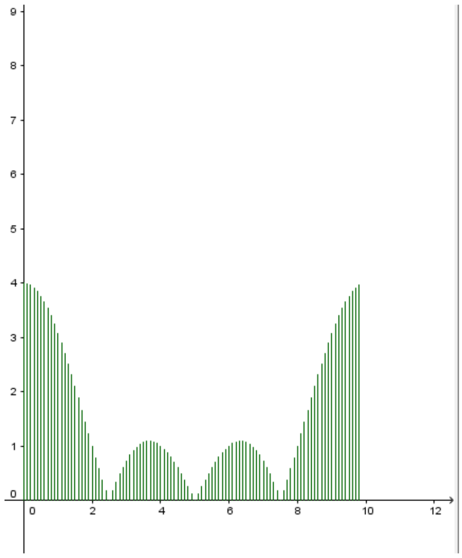
Prolongements

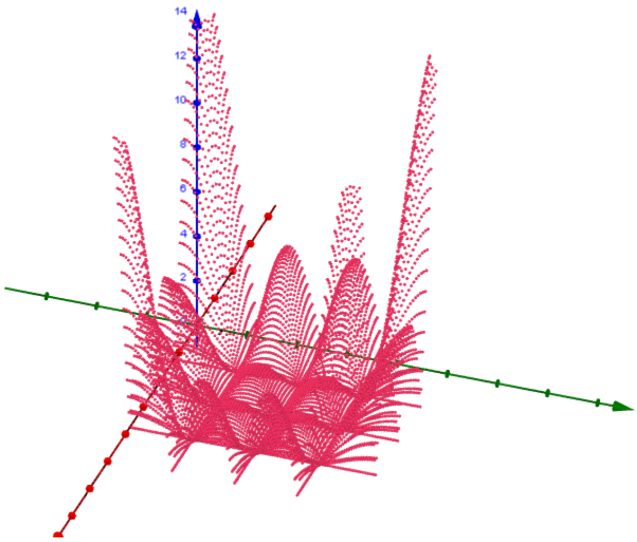
_ On obtient l'impulsion de Dirac par passage à la limite $d(t)=\lim_{a\to 0} s(t)$.

D'autres définitions sont possibles:par passage à la limite lorsque a tend vers 0 des fonctions suivantes: $\delta_a(x)=\frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+x^2}$, $\delta_a(x)=\frac{1}{a\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{a^2}}$, $\delta_a(x)=\frac{1}{2a}e^{-\frac{|x|}{a}}$, $\delta_a(x)=\frac{a}{\pi x^2}\sin^2(\frac{x}{a})$,

$\delta_a(x)=\frac{1}{\pi x}\sin(\frac{x}{a})$ (en lien avec le sinus cardinal).

_ On peut définir,de la même façon, l'impulsion de Dirac en deux dimensions (TFD d'une image).





Notions : les notions d'échantillon et de TFD interviennent dans cette fiche.

Activité de l'étudiant : l'étudiant est amené à analyser le graphique proposé, à montrer sa compréhension de ce qu'est un échantillon, à faire le lien avec la formule de TFD vue en classe (alternativement, on peut adapter cette activité pour servir d'introduction à la formule de TFD), à poser des calculs et éventuellement à les mener à bien.

Considérations didactiques : les étudiants peuvent être bloqués sur la détermination de l'échantillon, sur l'application de la formule générale du cours à un cas particulier. Poser au moins le calcul à conduire permet à tous les étudiants de comprendre qu'il y a une justification possible de ce qui est observé et à prendre en main la formule définissant la TFD, qui n'est que peu utilisée dans les autres situations.

Points méthodologiques : des coups de pouce doivent être anticipés (graphique montrant l'échantillonnage du signal : il reste à l'étudiant à trouver les différentes valeurs … ; formule de TFD avec la bonne taille d'échantillon; limitation à la valeur en 0).