Synthèse de la démonstration faite par les élèves

Objectif : Dans ce qui suit, on souhaite démontrer que les rayons réfléchis issus de la rencontre entre une parabole et des rayons incidents parallèles à l'axe de symétrie de cette parabole convergent tous vers un point.

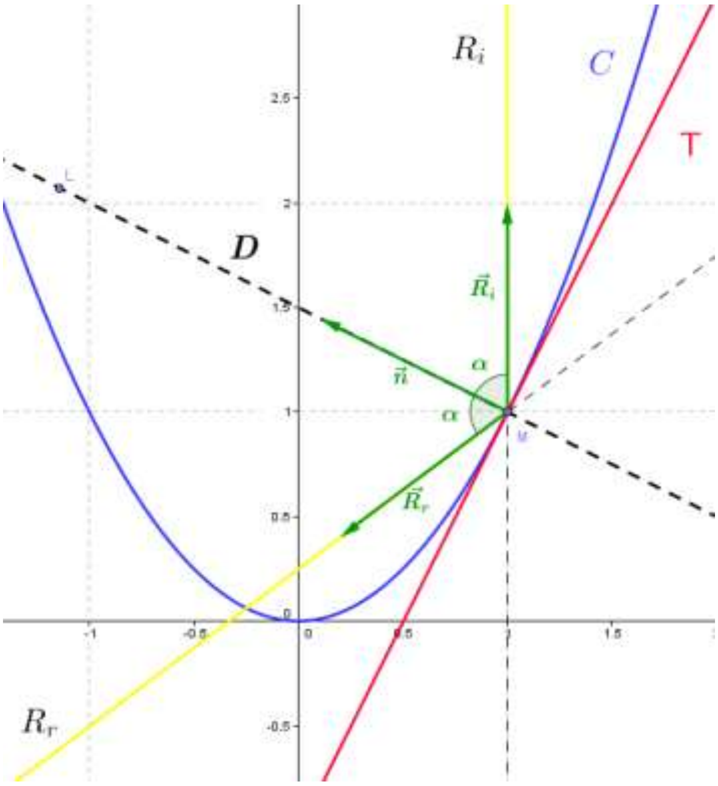
Notons f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = ax^2$.
Soit C la parabole d'équation $y = ax^2$.
Soit un rayon incident R_i parallèle à l'axe de la parabole, c'est à dire, parallèle à l'axe des ordonnées.
Supposons que ce rayon ait pour équation $x = k$ où k est un nombre réel .
Soit $\overrightarrow{R_i}$ le vecteur de coordonnées (0;1).
$\overrightarrow{R_i}$ est donc un vecteur directeur de cette droite R_i.

Soit M le point d'intersection de C et R_i.
M a pour coordonnées $(k; ak^2)$.

Notons R_r le rayon réfléchi.

On rappelle que, selon la loi de Descartes, *le rayon réfléchi* R_r *est le symétrique du rayon incident* R_i *par rapport à la normale à la tangente à la surface réfléchissante.*

On souhaite déterminer l'équation réduite de ce rayon réfléchi R_r de manière à calculer les coordonnées de son point d'intersection avec l'axe des ordonnées.



Pour cela, on a besoin de trouver, dans un premier temps, l'équation de la tangente T à la courbe C au point M puis les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{R_i}$, $\vec{n}$ et $\overrightarrow{R_r}$ vecteurs directeurs respectivement de R_i , de la normale à T au point M et de R_r.

Etape 1: *Recherche de l'équation de la tangente T au point M de coordonnées* $(k; ak^2)$

D'après le cours de première, T a pour équation $y = f'(k)(x-k) + f(k)$ où $f(x) = ax^2$
Comme $f'(x) = 2ax$, on en déduit comme $f(k) = ak^2$ et $f'(k) = 2ak$ que l'équation de cette droite T est :

$$\mathrm{T} : y = 2ak(x-k) + ak^2$$

Etape 2: *Recherche d'un vecteur directeur de T de norme 1*

Le vecteur $\overrightarrow{u'}$ de coordonnées $(1; 2ak)$ est un vecteur directeur de T.
Comme $||\overrightarrow{u'}|| = \sqrt{1+(2ak)^2}$, on en déduit que le vecteur $\vec{u} = \frac{1}{||\overrightarrow{u'}||}\overrightarrow{u'}$ de coordonnées $(\frac{1}{\sqrt{1+(2ak)^2}}; \frac{2ak}{\sqrt{1+(2ak)^2}})$ est aussi un vecteur directeur de T (car il est colinéaire à $\overrightarrow{u'}$) et il est de norme 1.
En effet, $||\vec{u}||^2 = (\frac{1}{\sqrt{1+(2ak)^2}})^2 + (\frac{2ak}{\sqrt{1+(2ak)^2}})^2$

$$||\vec{u}||^2 = \frac{1}{1+(2ak)^2} + \frac{(2ak)^2}{1+(2ak)^2}$$

$$||\vec{u}||^2 = \frac{1+(2ak)^2}{1+(2ak)^2} = 1 \text{ donc } ||\vec{u}|| = 1$$

Etape 3: *Recherche d'un vecteur directeur de la droite D, normale à T au point M*

Le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(-\frac{2ak}{\sqrt{1+(2ak)^2}}; \frac{1}{\sqrt{1+(2ak)^2}})$ est un vecteur de norme 1 et orthogonal à $\vec{u}$.

en effet, $\vec{n}.\vec{u} = -\frac{2ak}{\sqrt{1+(2ak)^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1+(2ak)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+(2ak)^2}} \times \frac{2ak}{\sqrt{1+(2ak)^2}} = 0$

$$||\vec{n}||^2 = (-\frac{2ak}{\sqrt{1+(2ak)^2}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{1+(2ak)^2}})^2 = ||\vec{u}|| = 1$$

Donc $\vec{n}$ est un vecteur unitaire et c'est un vecteur directeur de la droite D perpendiculaire à T passant par M.

Etape 4: *Recherche d'un vecteur directeur $\overrightarrow{\mathrm{R}_r}$ du rayon réfléchi R_r*

On recherche les coordonnées d'un vecteur directeur de R_r de manière à ce qu'il ait pour abscisse 1.
Notons β son ordonnée. Ainsi $\overrightarrow{\mathrm{R}_r}$ a pour coordonnées $(1; \beta)$.

On rappelle que selon la loi de Descartes, *le rayon réfléchi R_r est le symétrique du rayon incident $\mathrm{R_i}$ par rapport à la normale à la tangente à la surface réfléchissante.*

Notons α l'angle entre les droites D et $\mathrm{R_i}$. α est donc aussi égal à l'angle formé entre D et R_r.
Calculons le cosinus de l'angle α.

On a $\cos(\alpha) = \frac{\vec{n}.\overrightarrow{\mathrm{R}_l}}{||\vec{n}|| \times ||\overrightarrow{\mathrm{R}_l}||}$

$\cos(\alpha) = \frac{\vec{n}.\overrightarrow{\mathrm{R_i}}}{1 \times 1}$ car $\overrightarrow{\mathrm{R}_l}$ et $\vec{n}$ ont pour norme 1 par construction

donc $\cos(\alpha) = \vec{n}.\overrightarrow{\mathrm{R_i}} = \frac{1}{\sqrt{1+(2ak)^2}}$ **(1)** car $\vec{n}$ $(-\frac{2ak}{\sqrt{1+(2ak)^2}}; \frac{1}{\sqrt{1+(2ak)^2}})$ et $\overrightarrow{\mathrm{R_i}}(0; 1)$

Selon la loi de Descartes, on peut aussi écrire que $\vec{n}.\overrightarrow{\mathrm{R}_r} = ||\vec{n}|| \times ||\overrightarrow{\mathrm{R}_r}|| \times \cos(\alpha)$

D'une part, $\vec{n}.\overrightarrow{\mathrm{R}_r} = ||\vec{n}|| \times ||\overrightarrow{\mathrm{R}_r}|| \times \frac{1}{\sqrt{1+(2ak)^2}}$ d'après **(1)**

Ainsi $\vec{n}.\overrightarrow{\mathrm{R}_r} = 1 \times ||\overrightarrow{\mathrm{R}_r}|| \times \frac{1}{\sqrt{1+(2ak)^2}}$ ou encore $\vec{n}.\overrightarrow{\mathrm{R}_r} = \sqrt{1+\beta^2} \times \frac{1}{\sqrt{1+(2ak)^2}}$ **(2)** car $||\overrightarrow{\mathrm{R}_r}|| = \sqrt{1+\beta^2}$

D'autre part, $\vec{n}.\overrightarrow{\mathrm{R}_r} = -\frac{2ak}{\sqrt{1+(2ak)^2}} \times 1 + \frac{1}{\sqrt{1+(2ak)^2}} \times \beta$ **(3)**

car $\vec{n}$ $(-\frac{2ak}{\sqrt{1+(2ak)^2}}; \frac{1}{\sqrt{1+(2ak)^2}})$ et $\overrightarrow{\mathrm{R}_r}$ $(1; \beta)$

D'où d'après **(2)** et **(3)**, on a :

$-\frac{2ak}{\sqrt{1+(2ak)^2}} \times 1 + \frac{1}{\sqrt{1+(2ak)^2}} \times \beta = \sqrt{1+\beta^2} \times \frac{1}{\sqrt{1+(2ak)^2}}$

$\Leftrightarrow -2ak + \beta = \sqrt{1+\beta^2}$ *après avoir multiplié par* $\sqrt{1+(2ak)^2}$

$\Rightarrow (-2ak+\beta)^2 = (\sqrt{1+\beta^2})^2$ *on a utilisé la fonction carrée*

$\Leftrightarrow \beta^2 - 2 \times 2ak \times \beta + (2ak)^2 = 1 + \beta^2$ *on a simplifié à droite et développé à gauche*

$\Leftrightarrow -2 \times 2ak \times \beta + (2ak)^2 = 1$ *on a ajouté* $-\beta^2$ *aux deux membres*

$\Leftrightarrow -4ak \times \beta = -(2ak)^2 + 1$ *on a ajouté* $-(2ak)^2$ *aux deux membres*

$\Leftrightarrow \beta = \frac{-(2ak)^2+1}{-4ak}$ *on a multiplié les deux membres par* $\frac{1}{-4ak}$

$\Leftrightarrow \beta = \frac{(2ak)^2 - 1}{4ak}$

$\Leftrightarrow \beta = \frac{4a^2k^2-1}{4ak}$ Donc le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{R}_r}$ a pour coordonnées $(1; \frac{4a^2k^2-1}{4ak})$

Etape 5: *Recherche de l'équation du rayon réfléchi R_r*

La droite R_r a pour équation réduite $y = \frac{4a^2k^2-1}{4ak}(x-k) + ak^2$
car l'ordonnée du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{R}_r}$ nous donne le coefficient directeur
et cette droite passe par le point $\mathrm{M}(k; ak^2)$

Etape 6: *Recherche des coordonnées du point F d'intersection de R_r et l'axe des ordonnées.*

si $x=0$, on a $y=\frac{4a^2k^2-1}{4ak}(0-k)+ak^2=\frac{-4a^2k^2+1}{4a}+ak^2=\frac{-4a^2k^2+1}{4a}+\frac{4a\times ak^2}{4a}=\frac{-4a^2k^2+1+4a^2k^2}{4a}=\frac{1}{4a}$

Finalement le point F a pour coordonnées $(0;\frac{1}{4a})$
Ses coordonnées ne dépendent pas de k.
Cela signifie que tous les rayons réfléchis provenant de rayons incidents parallèles à l’axe des ordonnées convergent vers ce point F que l’on appelle le foyer.