académie Nantes

RÉGION ACADÉMIQUE
PAYS DE LA LOIRE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION NATIONALE,
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE

éduscol

Modéliser en mathématiques

Yann Bertrand - *groupe de recherche « mathématiques et numérique » de l'académie de Nantes - TraAM 2019-2020*

« Le four solaire (une propriété de la parabole)»

Terminale S

Testé avec des élèves de terminale S regroupés
dans l'atelier « Activité Interdisciplinaire » du Lycée Aristide Briand de Saint-Nazaire

Durée

5h réparties sur 5 semaines

Le contexte

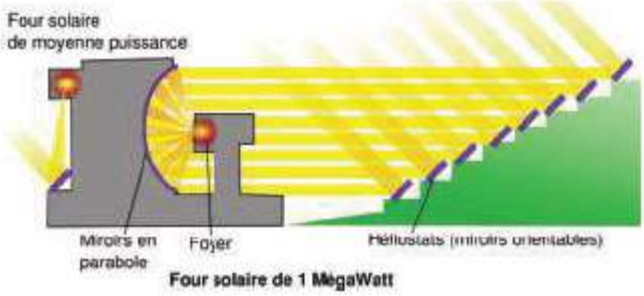
L'activité qui suit a été proposée lors de l'atelier « Activité Interdisciplinaire » du lycée Aristide Briand de Saint-Nazaire. Cet atelier regroupe des élèves volontaires de terminale S qui se destinent à faire des études scientifiques exigeantes (classes préparatoires, licence de mathématiques, ...). Les séances ont lieu une fois par semaine. Les activités proposées font des ponts avec les autres domaines des sciences (SVT, sciences physiques, ...).

L'énoncé du problème

Dans un premier temps, une courte vidéo sur le four solaire de Font-Romeu est montrée aux élèves. Lors du débriefing les élèves conjecture la propriété suivante de la parabole.

« les rayons réfléchis issus de la rencontre entre une parabole et des rayons incidents parallèles à l'axe de symétrie de cette parabole convergent tous vers un point»

(photos tirées de l'article Wikipédia Four solaire d'Odeillo)



D'après le film, que vous pourrez retrouver à l'adresse ci-dessous, un miroir parabolique est capable de concentrer les rayons du soleil en un point.

https://www.youtube.com/watch?v=AzHAoGCSXMY

Déroulé de la séquence

Visionnage de la vidéo : 5 minutes

Discussion avec la classe et rédaction de la conjecture :10 minutes

Dessin sur papier : 15 minutes
Une feuille de papier est distribuée aux élèves sur laquelle se trouve la parabole d'équation $y = x^2$. Les élèves dessinent plusieurs rayons parallèles à l'axe de la parabole puis les rayons réfléchis correspondants plus ou moins précisément. Ils constatent qu'effectivement ces rayons réfléchis semblent converger vers une zone (un point pour les élèves les plus soigneux). Ce premier travail est l'occasion de discuter avec la classe du modèle choisi pour la réflexion du rayon incident sur la parabole. Un point est fait sur la réflexion d'un rayon sur une surface plane en prenant l'exemple de la boule de billard.
Aucun élève ne s'est lancé dans des calculs pour trouver les équations des rayons réfléchis. Ils ont tous fait des dessins approximatifs avec plus ou moins de succès !

Dessin sur Geogebra : 25 minutes
Les élèves ont ensuite fait le même travail en utilisant le logiciel Geogebra. La mauvaise maîtrise par les élèves des différents outils de Geogebra et le manque de temps n'ont pas permis d'obtenir des fichiers très satisfaisants. L'animation proposée en annexe de ce document est une correction de ce travail. Elle a permis de poursuivre l'activité avec la classe car elle a servi de support visuel.

Démonstration : 4 h (réparties sur 4 semaines)
Les autres séances ont été consacrées à la démonstration du résultat.
Dans un premier temps, les différentes étapes de cette démonstration ont été définies par les élèves. Pour cela, ils ont judicieusement suivi le cheminement d'un rayon quelconque.
Dans un deuxième temps, ils ont démontré ces différentes étapes en travaillant en autonomie (seul ou à plusieurs).
Un temps important aura été laissé aux élèves pour leurs recherches. Les démonstrations n'ont pas été faites à leur place mais régulièrement des synthèses étaient proposées par le professeur ainsi que des rappels des différents résultats de seconde ou première S nécessaires.

Synthèse de la démonstration faite par les élèves

Objectif : Dans ce qui suit, on souhaite démontrer que les rayons réfléchis issus de la rencontre entre une parabole et des rayons incidents parallèles à l'axe de symétrie de cette parabole convergent tous vers un point.

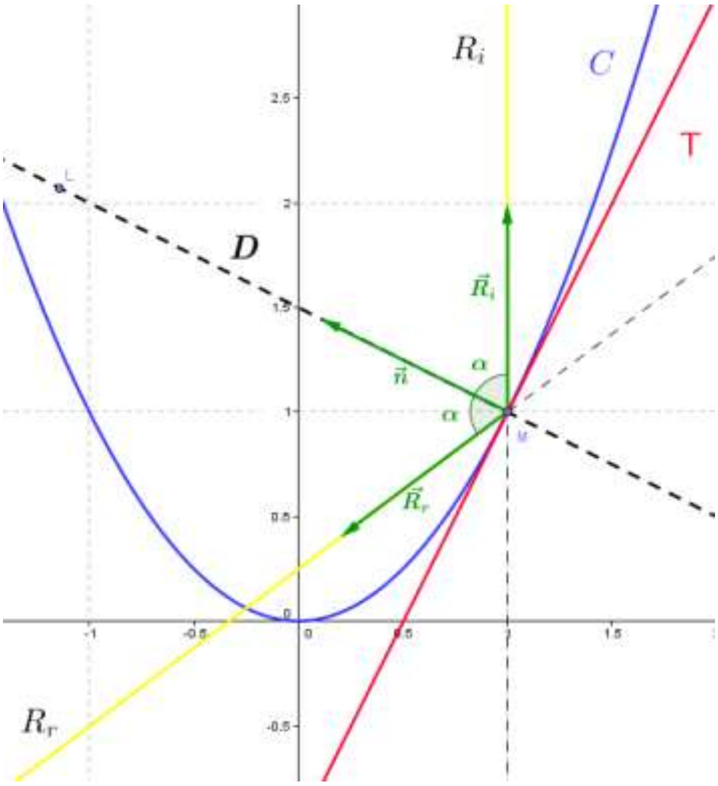
Notons *f* la fonction définie sur ℝ par $f(x) = ax^2$.
Soit *C* la parabole d'équation $y = ax^2$.
Soit un rayon incident R_i parallèle à l'axe de la parabole, c'est à dire, parallèle à l'axe des ordonnées.
Supposons que ce rayon ait pour équation $x = k$ où k est un nombre réel .
Soit $\overrightarrow{\mathrm{R_i}}$ le vecteur de coordonnées (0;1).
$\overrightarrow{\mathrm{R_i}}$ est donc un vecteur directeur de cette droite R_i.

Soit M le point d'intersection de *C* et R_i.
M a pour coordonnées $(k; ak^2)$.

Notons R_r le rayon réfléchi.

On rappelle que, selon la loi de Descartes, *le rayon réfléchi* R_r *est le symétrique du rayon incident* $\mathrm{R_i}$ *par rapport à la normale à la tangente à la surface réfléchissante.*

On souhaite déterminer l'équation réduite de ce rayon réfléchi R_r de manière à calculer les coordonnées de son point d'intersection avec l'axe des ordonnées.



Pour cela, on a besoin de trouver, dans un premier temps, l'équation de la tangente *T* à la courbe C au point M puis les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{R_i}}$, $\vec{n}$ et $\overrightarrow{\mathrm{R}_r}$ vecteurs directeurs respectivement de $\mathrm{R_i}$, de la normale à T au point M et de R_r.

Etape 1: *Recherche de l'équation de la tangente T au point M de coordonnées* $(k; ak^2)$

D'après le cours de première, *T* a pour équation $y = f'(k)(x - k) + f(k)$ où $f(x) = ax^2$
Comme $f'(x) = 2ax$, on en déduit comme $f(k) = ak^2$ et $f'(k) = 2ak$ que l'équation de cette droite *T* est :

$$\mathrm{T} : y = 2ak(x - k) + ak^2$$

Etape 2: *Recherche d'un vecteur directeur de T de norme 1*

Le vecteur $\overrightarrow{u'}$ de coordonnées $(1; 2ak)$ est un vecteur directeur de *T*.
Comme $||\overrightarrow{u'}|| = \sqrt{1 + (2ak)^2}$, on en déduit que le vecteur $\vec{u} = \frac{1}{||\overrightarrow{u'}||}\overrightarrow{u'}$ de coordonnées $(\frac{1}{\sqrt{1+(2ak)^2}}; \frac{2ak}{\sqrt{1+(2ak)^2}})$ est aussi un vecteur directeur de T (car il est colinéaire à $\overrightarrow{u'}$) et il est de norme 1.
En effet, $||\vec{u}||^2 = (\frac{1}{\sqrt{1+(2ak)^2}})^2 + (\frac{2ak}{\sqrt{1+(2ak)^2}})^2$

$$||\vec{u}||^2 = \frac{1}{1+(2ak)^2} + \frac{(2ak)^2}{1+(2ak)^2}$$

$$||\vec{u}||^2 = \frac{1+(2ak)^2}{1+(2ak)^2} = 1 \text{ donc } ||\vec{u}|| = 1$$

Etape 3: *Recherche d'un vecteur directeur de la droite D, normale à T au point M*

Le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(-\frac{2ak}{\sqrt{1+(2ak)^2}}; \frac{1}{\sqrt{1+(2ak)^2}})$ est un vecteur de norme 1 et orthogonal à $\vec{u}$.

en effet, $\vec{n}.\vec{u} = -\frac{2ak}{\sqrt{1+(2ak)^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1+(2ak)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+(2ak)^2}} \times \frac{2ak}{\sqrt{1+(2ak)^2}} = 0$

$$||\vec{n}||^2 = (-\frac{2ak}{\sqrt{1+(2ak)^2}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{1+(2ak)^2}})^2 = ||\vec{u}|| = 1$$

Donc $\vec{n}$ est un vecteur unitaire et c'est un vecteur directeur de la droite *D* perpendiculaire à *T* passant par M.

Etape 4: *Recherche d'un vecteur directeur $\overrightarrow{\mathrm{R}_r}$ du rayon réfléchi R_r*

On recherche les coordonnées d'un vecteur directeur de R_r de manière à ce qu'il ait pour abscisse 1.
Notons β son ordonnée. Ainsi $\overrightarrow{\mathrm{R}_r}$ a pour coordonnées $(1; \beta)$.

On rappelle que selon la loi de Descartes, *le rayon réfléchi* R_r *est le symétrique du rayon incident* R_i *par rapport à la normale à la tangente à la surface réfléchissante.*

Notons α l'angle entre les droites D et R_i. α est donc aussi égal à l'angle formé entre D et R_r.
Calculons le cosinus de l'angle α.

On a $\cos(\alpha) = \frac{\vec{n}.\overrightarrow{\mathrm{R}_\iota}}{||\vec{n}|| \times ||\overrightarrow{\mathrm{R}_\iota}||}$

$\cos(\alpha) = \frac{\vec{n}.\overrightarrow{\mathrm{R}_\mathrm{i}}}{1 \times 1}$ car $\overrightarrow{\mathrm{R}_\iota}$ et $\vec{n}$ ont pour norme 1 par construction

donc $\cos(\alpha) = \vec{n}.\overrightarrow{\mathrm{R}_\mathrm{i}} = \frac{1}{\sqrt{1+(2ak)^2}}$ **(1)** car $\vec{n}$ $(-\frac{2ak}{\sqrt{1+(2ak)^2}}; \frac{1}{\sqrt{1+(2ak)^2}})$ et $\overrightarrow{\mathrm{R}_\mathrm{i}}(0; 1)$

Selon la loi de Descartes, on peut aussi écrire que $\vec{n}.\overrightarrow{\mathrm{R}_r} = ||\vec{n}|| \times ||\overrightarrow{\mathrm{R}_r}|| \times \cos(\alpha)$

D'une part, $\vec{n}.\overrightarrow{\mathrm{R}_r} = ||\vec{n}|| \times ||\overrightarrow{\mathrm{R}_r}|| \times \frac{1}{\sqrt{1+(2ak)^2}}$ d'après **(1)**

Ainsi $\vec{n}.\overrightarrow{\mathrm{R}_r} = 1 \times ||\overrightarrow{\mathrm{R}_r}|| \times \frac{1}{\sqrt{1+(2ak)^2}}$ ou encore $\vec{n}.\overrightarrow{\mathrm{R}_r} = \sqrt{1+\beta^2} \times \frac{1}{\sqrt{1+(2ak)^2}}$ **(2)** car $||\overrightarrow{\mathrm{R}_r}|| = \sqrt{1+\beta^2}$

D'autre part, $\vec{n}.\overrightarrow{\mathrm{R}_r} = -\frac{2ak}{\sqrt{1+(2ak)^2}} \times 1 + \frac{1}{\sqrt{1+(2ak)^2}} \times \beta$ **(3)**

car $\vec{n}$ $(-\frac{2ak}{\sqrt{1+(2ak)^2}}; \frac{1}{\sqrt{1+(2ak)^2}})$ et $\overrightarrow{\mathrm{R}_r}$ $(1; \beta)$

D'où d'après **(2)** et **(3)**, on a :

$-\frac{2ak}{\sqrt{1+(2ak)^2}} \times 1 + \frac{1}{\sqrt{1+(2ak)^2}} \times \beta = \sqrt{1+\beta^2} \times \frac{1}{\sqrt{1+(2ak)^2}}$

$\Leftrightarrow -2ak + \beta = \sqrt{1+\beta^2}$ *après avoir multiplié par* $\sqrt{1+(2ak)^2}$

$\Rightarrow (-2ak+\beta)^2 = (\sqrt{1+\beta^2})^2$ *on a utilisé la fonction carrée*

$\Leftrightarrow \beta^2 - 2 \times 2ak \times \beta + (2ak)^2 = 1 + \beta^2$ *on a simplifié à droite et développé à gauche*

$\Leftrightarrow -2 \times 2ak \times \beta + (2ak)^2 = 1$ *on a ajouté* $-\beta^2$ *aux deux membres*

$\Leftrightarrow -4ak \times \beta = -(2ak)^2 + 1$ *on a ajouté* $-(2ak)^2$ *aux deux membres*

$\Leftrightarrow \beta = \frac{-(2ak)^2+1}{-4ak}$ *on a multiplié les deux membres par* $\frac{1}{-4ak}$

$\Leftrightarrow \beta = \frac{(2ak)^2 - 1}{4ak}$

$\Leftrightarrow \beta = \frac{4a^2k^2-1}{4ak}$ Donc le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{R}_r}$ a pour coordonnées $(1; \frac{4a^2k^2-1}{4ak})$

Etape 5: *Recherche de l'équation du rayon réfléchi R_r*

La droite R_r a pour équation réduite $y = \frac{4a^2k^2-1}{4ak}(x-k) + ak^2$
car l'ordonnée du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{R}_r}$ nous donne le coefficient directeur
et cette droite passe par le point $\mathrm{M}(k; ak^2)$

Etape 6: *Recherche des coordonnées du point F d'intersection de R_r et l'axe des ordonnées.*

si $x = 0$, on a $y = \frac{4a^2k^2-1}{4ak}(0-k) + ak^2 = \frac{-4a^2k^2+1}{4a} + ak^2 = \frac{-4a^2k^2+1}{4a} + \frac{4a\times ak^2}{4a} = \frac{-4a^2k^2+1+4a^2k^2}{4a} = \frac{1}{4a}$

Finalement le point F a pour coordonnées $(0;\frac{1}{4a})$
Ses coordonnées ne dépendent pas de k.
Cela signifie que tous les rayons réfléchis provenant de rayons incidents parallèles à l'axe des ordonnées convergent vers ce point F que l'on appelle le foyer.