# Gazette n°4 : Consolider le concept d'aire

## 1 L'aire, une notion abstraite

Dans la vie courante, les élèves de cycle 3 sont confrontés régulièrement à la grandeur « longueur ». Ils peuvent aussi être amenés à mesurer des longueurs à l'aide d'outils de mesure (mètre ruban par exemple). La longueur constitue ainsi un objet familier d'étude pour lequel l'expérience sensible des élèves est un réel atout pour l'enseignement.
À l'inverse, les élèves de cycle 3 ne rencontrent que très rarement la grandeur « aire » dans le contexte extra-scolaire. Il s'agit d'une notion que les élèves étudient en classe de mathématiques et côtoient sporadiquement dans d'autres disciplines. De plus, les élèves n'ont pas accès à des outils de mesure d'aire. La notion d'aire est par conséquent une notion abstraite pour les élèves.

## 2 Autres difficultés pour l'enseignement

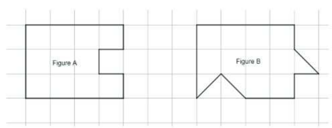
Le recours précoce aux formules et leur usage quasi exclusif à partir du cycle 4 dans la détermination de mesures d'aire entrainent souvent une perte de sens puisqu'il n'y a pas nécessité d'y recourir. La confusion entre périmètre et aire en découle et est accentuée par :

- le fait que l'aire est calculée en ayant recours à des longueurs ;
- la coexistence de formules d'aire et de périmètre exprimées avec les mêmes variables ($\mathscr{L}$, $\ell$, $r$).
- la fausse propriété « élève » mais souvent constatée sur des figures usuelles selon laquelle comparer les aires revient à comparer les périmètres (plus le périmètre est grand plus l'aire est grande) ;
- la proximité des écritures des unités conventionnelles d'aire et de longueur (cm, cm$^2$).

## 3 Première conclusion et stratégies

Force est de constater les difficultés importantes des élèves sur le concept d'aire à tous les niveaux de la scolarité. Les raisons évoquées dans le paragraphe précédent en constituent les principales causes.
Même si le concept d'aire a été correctement construit (et c'est généralement le cas), il est nécessaire de proposer régulièrement, et sur plusieurs années, des activités diversifiées qui permettent d'appréhender le concept d'aire sous toutes ses formes pour en consolider le sens.
La question suivante des évaluations nationales de sixième réussie par 51,6 % des élèves en France en 2023 conforte cette analyse.

**15 /** Observer les figures ci-dessous.




**Laquelle de ces quatre affirmations est vraie ?**

- ☐ L'aire de la figure A est plus grande que celle de la figure B.
- ☐ L'aire de la figure A est plus petite que celle de la figure B.
- ☐ L'aire de la figure A est la même que celle de la figure B.
- ☐ On ne peut pas savoir quelle est la plus grande aire car les deux figures ne sont pas superposables.

La procédure de « décomposition/recomposition », porteuse de sens, étudiée pourtant très tôt au cycle 3 n'est pas automatisée chez de nombreux élèves.

Cette gazette sur les aires préfigure une ressource didactique plus complète sur la consolidation du concept d'aire par la pratique de questions « flash » à l'image de celle sur « les fractions et les décimaux ». Il va de soi qu'une notion ne se travaille pas uniquement par la pratique de questions « flash ». En effet, le concept d'aire se construit à travers des activités et diverses situations. À ce titre, des activités de manipulation sont particulièrement propices et fécondes en apprentissages pour installer notamment des procédures de décomposition/recomposition au cœur du concept d'aire. La pratique régulière de questions « flash » constitue cependant une opportunité pour réactiver régulièrement, tout au long des cycles 3 et 4, une diversité de questions et tout particulièrement celles qui permettent d'entretenir le sens.

Le travail sur les grandeurs constitue aussi une occasion de travailler le concept de fraction et de nombre décimal. Vous trouverez dans la ressource de la Course aux nombres sur les fractions et les décimaux (lien) des questions qui portent à la fois sur les concepts d'aire et de nombre décimal.

Les questions proposées ci-dessous ont vocation à montrer la diversité de questions (sans exhaustivité) qui peuvent être posées. Pour chacune d'elles, les intentions didactiques sont explicitées.

La présentation des questions est organisée en cinq parties :

✓ Construire la grandeur aire par des gestes de comparaison.

✓ Développer le sens de la mesure.

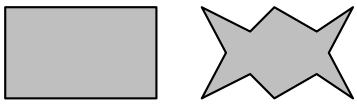
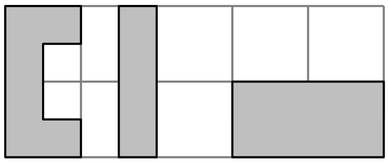
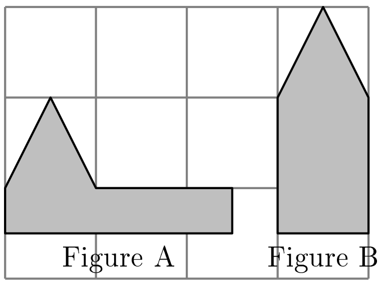
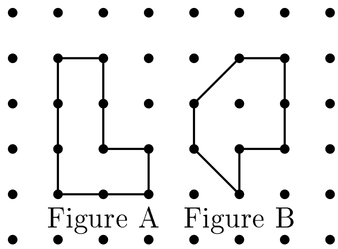
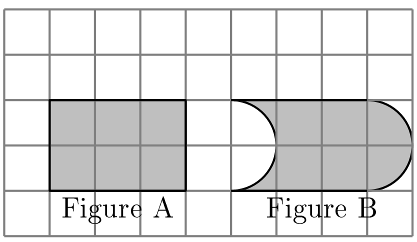
✓ Comprendre et utiliser les unités conventionnelles.

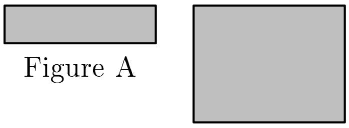
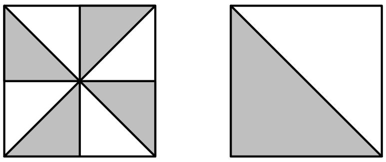
✓ Appréhender les formules de calcul d'aire.

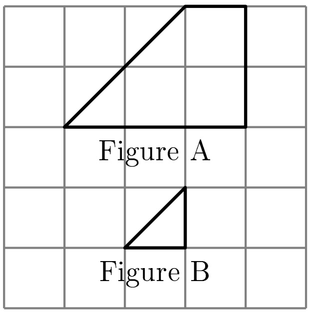
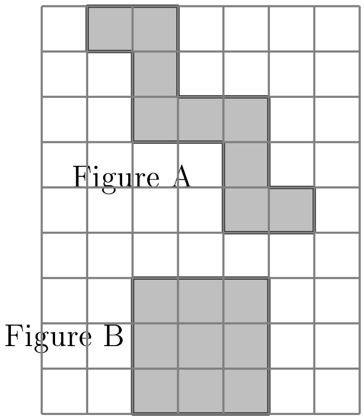
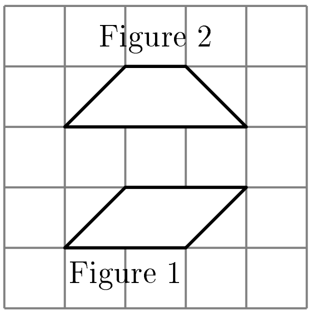
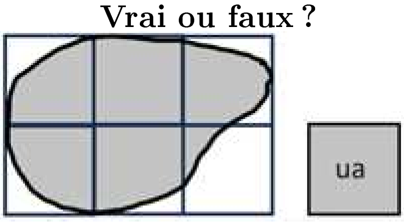
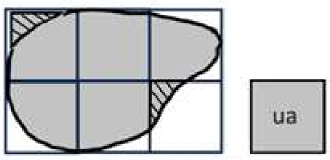
✓ Dissocier l'aire et le périmètre.

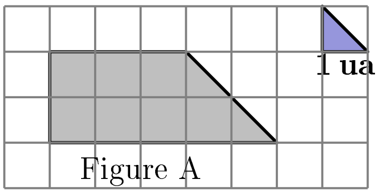
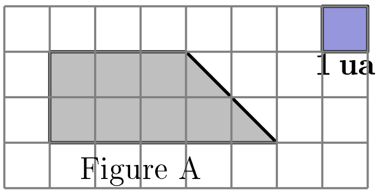
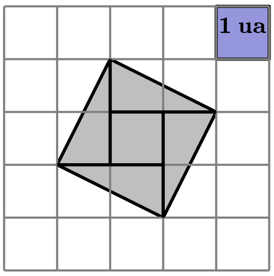
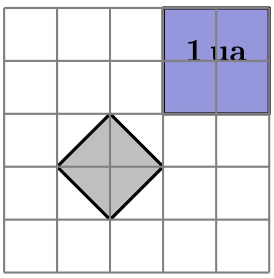
Nous espérons que ce document vous sera utile et nous vous souhaitons une bonne lecture.

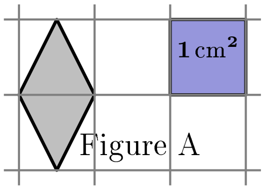
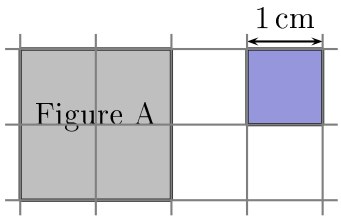
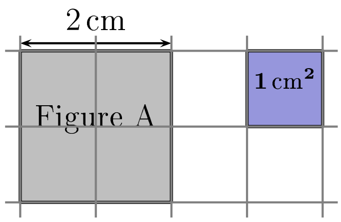
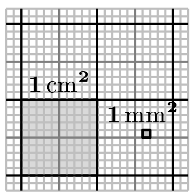
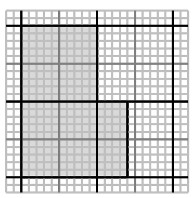
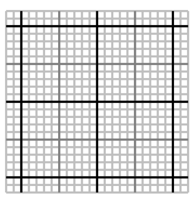
L'équipe du groupe de travail « Fondamentaux et automatismes » de l'APMEP

| | **Énoncé** | **Réponse** | **Intention** |
|---|---|---|---|
| **Construire la grandeur par des gestes de comparaison** | Quelle figure a la plus grande aire ?  Figure A Figure B | Figure A | Une figure peut contenir l'autre. On travaille le geste de superposition mentale des surfaces.<br>L'aire est une grandeur associée à une surface. On doit la dissocier de la forme et de la longueur du contour. |
| | Range les figures de l'aire la plus petite à l'aire la plus grande.  Figure A Figure B Figure C | L'aire de B est plus petite que l'aire de A qui est elle-même plus petite que l'aire de C. | Le geste de superposition mentale nécessite ici de faire pivoter des figures pour percevoir les inclusions (en classe : faire verbaliser les inclusions).<br>Cette question permet aussi de dissocier l'aire du périmètre (figures A et C). |
| | Compare les aires de ces deux figures.   | L'aire de B est plus grande que l'aire de A. | On travaille le geste de comparaison par décomposition/recomposition en se basant sur des figures simples : triangles, rectangles (le quadrillage en fond constitue un appui visuel pour ce geste). |
| | Compare les aires de ces deux figures.   | Les aires de ces deux figures sont égales. | Même type de travail en utilisant le support du papier pointé. Les surfaces élémentaires utilisées sont à matérialiser davantage. En effet les éléments de contours ne sont pas toujours de simples prolongements de lignes apparentes.<br>La comparaison à une troisième aire (celle d'un carré) est une procédure efficace. |
| | Compare l'aire de ces deux figures.   | Les aires de ces deux figures sont égales. | Même type de travail en bloquant la possibilité d'utiliser le quadrillage comme contour dans la décomposition.<br>En classe, faire verbaliser la décomposition/recomposition. |

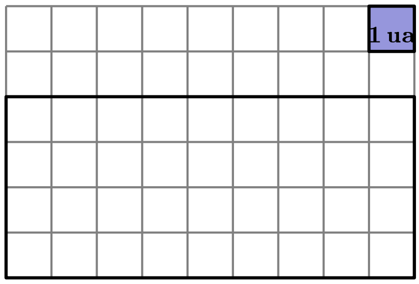
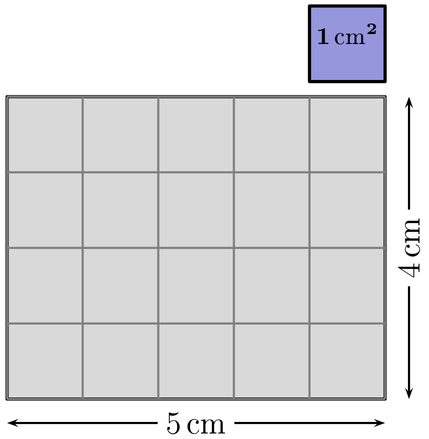
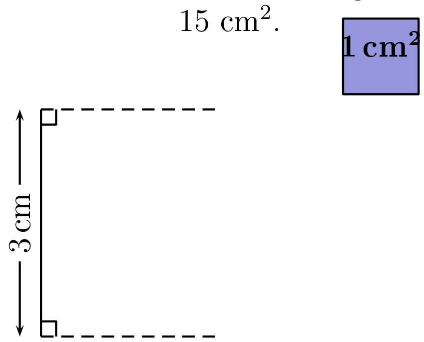
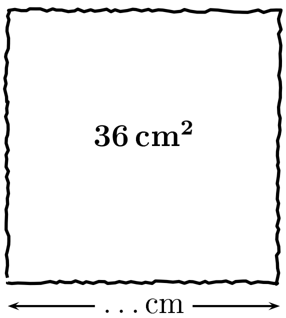
| Énoncé | Réponse | Intention |
|---|---|---|
| **Vrai ou faux ?**<br>L'aire de la figure B est environ 3 fois celle de la figure A.<br><br>Figure A<br>Figure B | Vrai | On travaille le geste de pavage (report avec juxtaposition sans chevauchement) d'une surface par une autre et expression de la comparaison multiplicative qui en découle. Travail qui doit précéder l'introduction de la mesure. |
| **Vrai ou faux ?**<br>Les aires de ces deux surfaces grisées sont égales.<br> | Vrai | En classe de sixième, question qui génère des discussions riches sur les procédures possibles :<br>geste de décomposition/recomposition de la première surface grisée pour obtenir l'autre<br>ou<br>comparaison de chaque aire de la surface grisée avec l'aire du carré.<br>Dans les deux cas, l'invariance de l'aire par symétrie axiale est utilisée en acte (sans formalisation). |

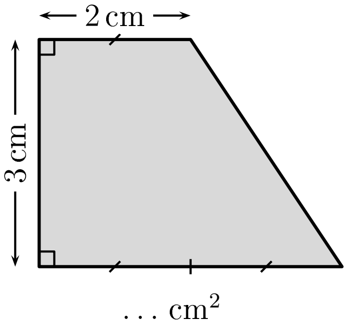
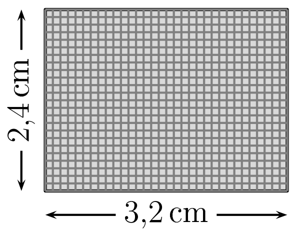
| | Énoncé | Réponse | Intention |
|---|---|---|---|
| **Développer le sens de la mesure** | Complète la phrase.<br><br><br>L'aire de la figure A est . . . fois plus grande que l'aire de la figure B. | 8 | Approche de la mesure par le travail du geste de pavage (report avec juxtaposition sans chevauchement) et expression de la comparaison multiplicative qui en découle. |
| | Compare les aires de ces deux figures.<br><br> | Les deux figures ont la même aire. | La comparaison de l'aire de chaque figure à l'aire d'un carreau est incitée. On entre dans la comparaison des aires par la comparaison de mesures.<br>En classe, faire verbaliser la comparaison à une même unité. |
| | Compare les aires de ces deux figures.<br><br> | Les deux figures ont la même aire. | L'unité n'est pas directement apparente et peut être l'aire d'un carreau ou d'un demi-carreau. Une procédure de décomposition/recomposition avec retournement d'un objet est aussi possible et constitue l'occasion de discuter différentes procédures. |
| | **Vrai ou faux ?**<br><br><br>L'aire de la figure grisée est plus grande que 5 ua.<br>☐ Vrai ☐ Faux | Faux | On estime une mesure en travaillant encore le geste de décomposition/recomposition qui construit la grandeur.<br><br> |

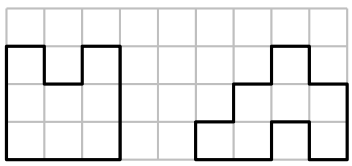
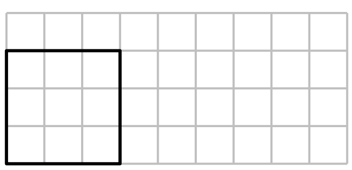
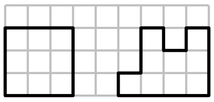
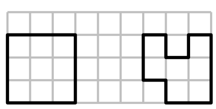
| | Énoncé | Réponse | Intention |
|---|---|---|---|
| **Développer le sens de la mesure** | Quelle est l'aire de la figure A ?<br><br><br>. . . ua<br><br>Quelle est l'aire de la figure A ?<br><br><br>. . . ua | 16 ua pour l'unité d'aire définie par le « triangle »<br><br>8 ua pour l'unité d'aire définie par le « carré ». | La mesure dépend de l'unité. Si l'unité est deux fois plus grande, la mesure est deux fois plus petite. |
| | Quelle est l'aire de la figure grisée ?<br><br><br>. . . ua | 5 ua | Le contour de la figure ne suit pas le quadrillage : on dissocie l'aire d'un carreau de l'objet carreau pour la comparaison. |
| | Quelle est l'aire de la figure grisée ?<br><br><br>. . . ua | $\frac{1}{2}$ ua | On travaille le fractionnement de l'unité en appui sur la mesure des aires. |

| | Énoncé | Réponse | Intention |
|---|---|---|---|
| **Comprendre et utiliser les unités conventionnelles** | Quelle est l'aire de la figure A ?<br><br><br>… cm$^2$ | 1 cm$^2$ | Le cm$^2$ est une unité d'aire. Le voir comme une aire nécessite de le détacher de la surface particulière d'un carré. |
| | Quelle est l'aire de la figure A ?<br><br><br>… cm$^2$ | 4 cm$^2$ | On installe la mesure en cm$^2$ par les mêmes gestes de pavage et comparaison multiplicative, mais en référence à un étalon particulier. |
| | Quelle est l'aire de la figure A ?<br><br><br>… cm$^2$ | 4 cm$^2$ | Le maintien d'un travail sur le sens de la mesure doit se poursuivre.<br>On peut alors questionner la relation entre variation des côtés et variation de l'aire. |
| | Complète.<br><br><br>2 cm$^2$ = …… mm$^2$ | 2 cm$^2$<br>=<br>200 mm$^2$ | Visualisation de la relation entre des unités d'aire conventionnelles pour créer une image mentale utile pour la conversion.<br>Les activités de conversion doivent régulièrement s'appuyer sur une représentation pour convoquer le sens du calcul effectué. |
| | Quelle est l'aire, en cm$^2$, de la figure grisée tracée sur papier millimétré ?<br> | 2,4 cm$^2$ | Le travail effectué pour construire le nombre décimal par la détermination d'aire est réinvesti (Cf ressource sur les fraction et décimaux).<br>$\mathcal{A} = 2 + \frac{4}{10}\,\text{cm}^2 = 2{,}4\,\text{cm}^2$<br>$\mathcal{A} = 240\,\text{mm}^2 = \frac{240}{100}\,\text{cm}^2 = 2{,}4\,\text{cm}^2$. |
| | Trace une figure d'aire 3,2 cm$^2$.<br> | | L'erreur qui consiste à tracer une figure d'aire 3 cm$^2$ et 2 mm$^2$ doit être déconstruite. On insistera pour cela sur les éléments suivants :<br>$\frac{1}{10}\ \text{cm}^2 = 10\,\text{mm}^2$<br>$1\,\text{mm}^2 = \frac{1}{100}\,\text{cm}^2 = 0{,}01\,\text{cm}^2$. |

**Appréhender les formules de calcul d'aire**

| **Énoncé** | **Réponse** | **Intention** |
| --- | --- | --- |
| Quelle est l'aire de ce rectangle ?   … ua | $(9 \times 4)\,\text{ua} = 36\,\text{ua}$ | On modélise le calcul d'aire par une multiplication. Les dimensions du rectangle ne sont pas explicitement convoquées. La modélisation, par une multiplication, du dénombrement d'objets disposés dans une configuration rectangulaire est un pré-requis essentiel pour aborder la formule de l'aire d'un rectangle. |
| Quelle est l'aire du rectangle ?   … cm$^2$ | $5\,\text{cm} \times 4\,\text{cm} = 20\,\text{cm}^2$ | On modélise encore le calcul d'aire par une multiplication. L'utilisation des dimensions du rectangle pour dénombrer le nombre de carrés d'1 cm$^2$ pavant ce rectangle permet d'introduire l'écriture $5\,\text{cm} \times 4\,\text{cm} = 20\,\text{cm}^2$. Pour encourager cette démarche, on peut supprimer le quadrillage dans le rectangle. |
| Termine le tracé du rectangle pour que son aire soit égale à 15 cm$^2$.   | | Cette question aide à construire la formule de l'aire d'un rectangle. |
| Donne la mesure du côté d'un carré d'aire 36 cm$^2$.   | | 36 a été choisi pour que l'élève puisse être tenté de diviser par 4 (travail sur la distinction aire et périmètre dans les formules). |

| | Énoncé | Réponse | Intention |
|---|---|---|---|
| **Appréhender les formules de calcul d'aire** | Calcule l'aire de ce trapèze.<br><br><br>$\dots\ \mathrm{cm}^2$ | $3\,\mathrm{cm} \times 2\,\mathrm{cm}$<br>$+$<br>$(3\,\mathrm{cm} \times 2\,\mathrm{cm}) \div 2$<br>$=$<br>$9\,\mathrm{cm}^2$ | La décomposition en deux sous-figures contribue à installer le concept d'aire. Cette question permet aussi de travailler le lien entre les formules pour l'aire d'un rectangle et l'aire d'un triangle rectangle. L'aire d'un triangle rectangle doit être comprise comme la moitié de l'aire d'un rectangle. |
| | **Avec des nombres décimaux non entiers** | | |
| | Quelle est l'aire, en $\mathrm{mm}^2$, puis en $\mathrm{cm}^2$, de ce rectangle ?<br><br> | $24\,\mathrm{mm} \times 32\,\mathrm{mm}$<br>$= 768\,\mathrm{mm}^2$<br>$= 7{,}68\,\mathrm{cm}^2$ | Cette question peut constituer une activité courte ayant pour objectif d'étendre la formule de l'aire d'un rectangle de dimensions entières à des rectangles de dimensions décimales non entières. Ce n'est pas la compétence « calculer » que l'on cherche à développer. La calculatrice peut être autorisée.<br>$24\,\mathrm{mm} \times 32\,\mathrm{mm} = 768\,\mathrm{mm}^2 = \dfrac{768}{100}\,\mathrm{cm}^2 = 7{,}68\,\mathrm{cm}^2.$<br>Comme 2,4 est 10 fois plus petit que 24 et que 3,2 est 10 fois plus petit que 32 alors $2{,}4 \times 3{,}2$ est 100 fois plus petit que $24 \times 32$.<br>L'aire de ce rectangle s'obtient donc par le calcul : $2{,}4\,\mathrm{cm} \times 3{,}2\,\mathrm{cm} = 7{,}68\,\mathrm{cm}^2$. |

| | Énoncé | Réponse | Intention |
|---|---|---|---|
| **Dissocier l'aire et le périmètre** | Quelle est la figure qui a la plus grande aire ?<br><br>Figure 1 Figure 2 | Figure 1 | L'aire de la figure 1 est plus grande que celle de la figure 2 alors que son périmètre est plus petit.<br>Les figures usuelles rencontrées entretiennent l'idée que le périmètre et l'aire varient conjointement (plus le périmètre d'un carré est grand, plus son aire est grande). Cette erreur conduit à une difficile dissociation de ces deux grandeurs. Un travail spécifique est nécessaire. |
| | Trace une figure qui a la même aire que la figure 1 mais qui a un périmètre plus grand.<br><br>Figure 1 | <br>Figure 1 | Cette question convoque explicitement l'aire et le périmètre. Le travail conjoint sur les deux grandeurs en fixant l'aire et en faisant évoluer le périmètre met en exergue la dissociation des deux grandeurs.<br><br>La question qui s'ensuivrait pourrait être :<br>« Trace une figure qui a une aire plus petite que la figure 1 mais qui a un périmètre plus grand »<br><br>Figure 1 |