

Utilisation des schémas en barre pour la production d'expressions numériques et littérales

Participants :

- 4 enseignants de mathématiques du collège Ernest Renan :
Peggy Clément, Pierre de Guido, Maxime Droguet, Pierre-Alain Dugas, Sandra Léthéreau
- 1 enseignante de l'école primaire la Sensive (même réseau que le collège Ernest Renan) :
Claire Lemahieu.
- Sandra Ferré, accompagnatrice du laboratoire.

Contexte :

Ce travail fait suite à celui engagé l'année précédente (année scolaire 2022-2023) et qui avait pour objet d'automatiser des procédures de modélisation dans le but de faciliter la mobilisation des 4 opérations à l'aide du schéma en barre (SEB) en sixième, que nous vous conseillons de lire en amont de la lecture du présent document.

La logique de mise en œuvre est tout naturellement de mettre en place l'expérimentation destinée aux sixièmes avant celle décrite ici, qui s'adresse aux élèves du niveau 5ème.

Afin de maîtriser suffisamment les schémas en barre pour qu'ils soient pleinement efficaces dans le cadre de la découverte du calcul littéral, il est important que les élèves aient pu se familiariser avec cet outil dès la sixième.

Objectifs:

- Entretenir la modélisation des opérations et amener les élèves vers l'automatisation de celles-ci dans la poursuite de l'expérimentation en sixième, dans des situations et des registres de représentation variés (énoncé en français, figure de géométrie, tableaux, ...).
- Amener les élèves à acquérir des automatismes procéduraux dans la compétence Modéliser pour la production d'expressions numériques, puis d'expressions littérales.

Partie 1 : Poursuite du travail entamé en 6^{ème} en 2022-2023

- **Objectif** : *Entretenir la modélisation des opérations et amener les élèves vers l'automatisation de celles-ci dans la poursuite de l'expérimentation en sixième, dans des situations et des registres de représentation variés (énoncé en français, figure de géométrie, tableaux, ...).*

1) Réactivation

La réactivation en 5^{ème} du travail sur le choix de la bonne opération pour résoudre un problème à l'aide des SEB réalisé l'année précédente en 6^{ème} s'est faite en trois phases :

1/ Rappel sur les 4 modèles de SEB en question rapide (voir document : *Labomaths_2023-2024-Partie 5ème-Explication SEB*).

2/ Série de 2 entraînements sur le même principe que l'expérimentation de 6^{ème} (voir document : *Labomaths_2023-2024-Partie 5ème-Entraînements A et B*).

3/ Test complet n°3 qui permet en début de 5^{ème} de s'assurer d'un niveau satisfaisant de maîtrise de l'outil (document : *Labomaths_2023-2024-Partie 5ème-Test automatismes n°3*).

2) Test 3 : résultats et analyse

Lors du test 3, nous avons ressenti une meilleure compréhension de l'outil SEB par les élèves par rapport au test 2, ainsi que des résultats globalement meilleurs dans le choix de la bonne opération. Nous n'avons cependant pas d'analyse chiffrée pour confirmer cette impression.

Nous prévoyons pour l'année 2024-2025 de réaliser une analyse quantitative afin de confirmer (ou infirmer) cette évolution : nous souhaitons comparer pour chaque élève les résultats obtenus au test 3 (en début de 5^{ème}) avec ceux du test 2 (en milieu de 6^{ème}). Nous souhaitons également mesurer le pourcentage d'élèves qui recourent spontanément au SEB lorsque la consigne ne l'impose pas, et ce à plusieurs étapes (fin de 6^{ème}, puis en 5^{ème}, lors des séquences sur les expressions numériques et sur les expressions littérales).

Partie 2 : Production d'expressions numériques

▪ **Objectif :** Amener les élèves à acquérir des automatismes procéduraux dans la compétence Modéliser pour la production d'expressions numériques.

1) Analyse a priori

Afin de proposer des exercices variés en termes de difficulté et de registre, nous avons défini :

- trois niveaux de difficulté,
- trois registres de représentation.

Les trois niveaux de difficulté :

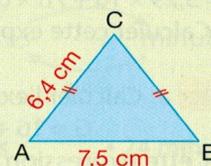
- niveau 1 : le résultat du calcul est le total,
- niveau 2 : le résultat du calcul n'est pas le total,
- niveau 3 : introduction de la division en difficulté supplémentaire.

Les trois registres :

- énoncés sous forme de texte,
- situations géométriques
- programmes de calcul.

Exemple d'exercice avec situation géométrique de niveau 1 :

14 a. Donner une expression pour calculer le périmètre du triangle représenté ci-contre.
b. Calculer ce périmètre.



Exemple d'exercice avec programme de calcul de niveau 2 ou 3 :

Exercice 10 :

Voici trois programmes de calcul :

Programme A

Choisir un nombre
Multiplier par 3
Ajouter 2

Programme B

Choisir un nombre
Diviser par 5
Soustraire 2

Programme C

Choisir un nombre
Ajouter 4
Multiplier par 5

Emma choisit un nombre et lui applique le programme A. Il obtient 20.

- 1) a) Réaliser un SEB permettant de représenter cette situation.
b) Ecrire l'expression numérique permettant de calculer le nombre de départ.

Karim choisit un autre nombre et lui applique le programme B. Il obtient 4.

- 2) a) Réaliser un SEB permettant de représenter cette situation.
b) Ecrire l'expression numérique permettant de calculer le nombre de départ.

Exemple d'exercice avec énoncé texte de niveau 2 :

36 Voici les achats que Clara veut effectuer avec un billet de 50 €.



1. Expliquer à l'aide d'ordres de grandeur pourquoi le billet de 50 € suffira.
2. a. Écrire l'expression R qui permet de calculer la somme que l'on rendra à Clara.
b. Calculer R.

Exemple d'exercice avec énoncé texte de niveau 3 :

Pour parcourir 7 km en footing, Lucas part de chez lui, fait 5 tours de circuit, puis rentre chez lui.

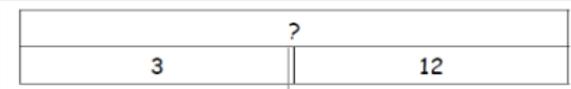
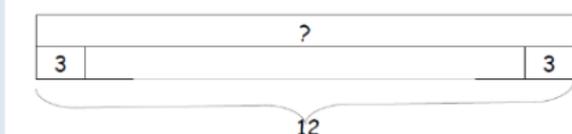
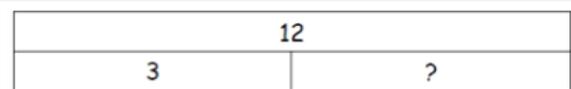
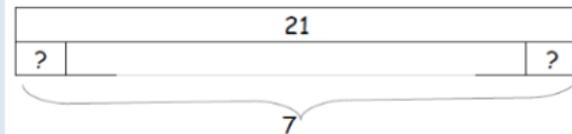
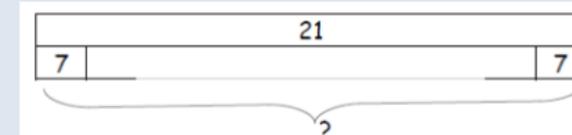


Écrire une expression qui permet de calculer la longueur d'un tour de circuit, puis calculer cette longueur en respectant les règles de priorités de calcul.

Nous avons par ailleurs anticipé les difficultés suivantes :

i) Comment faire passer les élèves de proto-SEB ou SEB élémentaires (on entend par proto-SEB les cinq schémas décrits dans le document « *Mobilisation des quatre opérations à l'aide des schémas en barres – Analyse* », pour lesquels le SEB induit une unique opération) **à des SEB complexes** (le SEB complexe induit en général a minima deux opérations, quitte à ce que ce soit deux additions successives) ?

Ce que nous appelons les « proto-SEB » :

<p>Addition</p> 	<p>Multiplication</p> 
<p>Soustraction</p> 	<p>Division partition</p> 
	<p>Division quotient</p> 

ii) Comment s'appuyer au mieux sur le SEB pour aboutir à une expression numérique ?

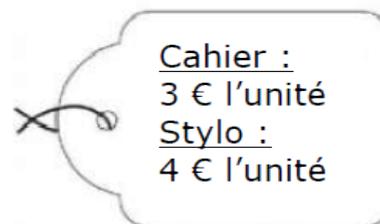
2) Déroulé de la première séance

Il s'agit de l'exercice d'entrée, qui confronte pour la première fois les élèves à la production d'une expression numérique. C'est un exercice à énoncé-texte de niveau 1.

Exercice 6

Pour la rentrée, j'ai du acheter 5 cahiers et 7 stylos.
Ecrire une expression permettant de calculer le prix que je vais payer.

Conseil : Réaliser un schéma en barre pour représenter cette situation.



La séance est découpée en six temps :

- consignes concernant l'exercice 6 : « vous allez travailler en binômes pour produire un SEB complexe rassemblant plusieurs calculs ». On peut faire référence à des situations déjà vécues en classe,
- travail en binôme pour produire le SEB complexe (et si possible l'expression),
- plénière de mise en commun des productions des SEB par les élèves. On utilise pour cela une caméra à document. Cette plénière a pour objet de retenir un SEB correct validé par tous les élèves,
- production de l'expression numérique en binôme,
- correction en plénière,
- poursuite du travail sur l'exercice 7.

Exercice 7

Pour chaque situation ci-dessous :

- réaliser un schéma en barre permettant de représenter la situation
- écrire l'expression numérique permettant de répondre à la question.
- calculer le résultat en respectant les priorités opératoires.

Situation 1

J'ai acheté 3 stylos à 2 € le stylo et 4 cahiers à 5 euros le cahier.
Combien ais-je dépensé ?

Situation 2

J'ai 3 stylos bleus, 2 stylos noirs, 4 stylos rouges et 5 stylos verts.
Combien ais-je de stylos en tout ?

Situation 3

J'avais 3 stylos en début d'année. J'en ai acheté 2 de plus à Noël et 4 de plus en février. Mais j'en ai perdu 5 en tout.
Combien me reste-il de stylos à la fin ?

Situation 4

J'ai acheté 3 cahiers rouges, 2 cahiers verts et 4 cahier violets. Chaque cahier coûte 5 euros.
Combien ais-je dépensé ?

3) Productions d'un binôme d'élèves (différentes étapes de réflexion)

Total de prix de 3 cahiers.

E1

Au début, les élèves sont bloqués. Le professeur leur demande de faire un SEB pour les cahiers. Ils le font et ajoutent spontanément celui des crayons (E1).

E2

Ils tentent d'additionner les 2 schémas en les superposant (E2). Le professeur fait remarquer que d'après ce schéma, le prix pour les crayons est le même que pour les cahiers (longueur du rectangle « total »).

E3

Ils juxtaposent et fusionnent les deux SEB élémentaires et obtiennent le SEB complexe correspondant à l'expression numérique attendue (E3).

4) Analyse a posteriori

La mise en place de visites croisées pendant lesquelles un enseignant observe la séance en se basant sur une grille de lecture nous a permis de faire ressortir des « phrases éclairantes » et des difficultés persistances.

« Les phrases éclairantes »

- en s'appuyant sur le « déjà su/vu » :

« C'est comme le test 3 » → référence au travail déjà réalisé sur les SEB.

« Un calcul avec plusieurs opérations comme le jeu des 4 » → référence à l'activité de découverte

Expliquer ET répéter qu' « on veut un seul calcul avec plusieurs opérations » et qu'« on n'a le droit d'utiliser qu'une fois la touche EXE de la calculatrice » → une phrase souvent utilisée

- aspect spécifique au SEB :

« Un SEB qui en rassemble plusieurs » → le passage par plusieurs SEB élémentaires qu'on « fusionne » ensuite aide de nombreux élèves.

« C'est quoi le total », « Le total, on le connaît ou c'est ce qu'on cherche ? » → l'automatisme procédural du SEB.

- pour s'auto-corriger :

« On ne doit utiliser que des nombres de l'énoncé » pour ceux qui ont utilisé 15 et 28 dans le SEB ou l'expression.

« On ne veut qu'un seul ?, il n'y a qu'un seul résultat recherché ».

- spécifiquement pour le passage à l'expression :

« On doit voir les 3 opérations comme dans le SEB » pour renvoyer les élèves vers le SEB qui vient d'être corrigé.

Le jeu des 4 :

Écrire un maximum de nombres successifs en utilisant seulement quatre fois le chiffre 4, ainsi que les quatre opérations et les parenthèses.

Exemple :

$$0 = 4 - 4 + 4 - 4$$

$$1 = (4 + 4) / (4 + 4)$$

Le bilan de l'expérimentation

- Points positifs :

Nous avons relevé plus d'engagement de la part des élèves : ils ont tous produit quelque chose.

Par ailleurs, les SEB ont permis la mise en place d'une procédure-type facilement mobilisable.

Enfin, on constate que la difficulté se « répartit » désormais sur plusieurs étapes, ce qui facilite une aide ciblée et le lancement dans l'activité au démarrage.

- Une limite :

Tous les élèves n'adhèrent pas au SEB (mais ce sont généralement des élèves qui n'en ressentent pas le besoin). Et donc, que fait-on, impose-t-on ou non le SEB ? Dans l'équipe, nous avons fait le choix de l'imposer suffisamment souvent pour qu'ils s'y accoutument, mais aussi de leur offrir la possibilité de ne pas l'utiliser systématiquement.

Pour certains de ces élèves, le SEB sert de vérification.

Une piste serait à explorer : le passage à la géométrie étant difficile pour certains élèves, nous envisageons l'année prochaine d'utiliser la géométrie dynamique (exemple du triangle qui se déploie pour visualiser son périmètre ...)

5) Les exercices au long cours

Afin d'entretenir et de renforcer les connaissances acquises, on propose régulièrement aux élèves des exercices de niveaux et de registres variés sur une durée d'environ 1 mois entre la fin de la séquence sur les expressions numériques et le début de celle sur les expressions littérales.

Ces exercices peuvent être réalisés en classe ou donnés en travail personnel à la maison (voir document : *Labomaths_2023-2024-Partie 5ème-Exercices au long cours*).

Partie 3 : Production d'expressions littérales

▪ **Objectif** : Amener les élèves à acquérir des automatismes procéduraux dans la compétence Modéliser pour la production d'expressions littérales.

1) Analyse a priori

On imagine que le fait d'avoir travaillé davantage (que les années passées) sur la modélisation d'expressions numériques permet aux élèves de n'avoir plus qu'un objectif nouveau quand la lettre est introduite (cf André Tricot : «réduire la charge cognitive »), les élèves devraient ainsi être mieux concentrés sur l'introduction de la lettre.

La **charge cognitive** correspond à la quantité de ressources cognitives investies par un individu lors de la réalisation d'une tâche.

Elle dépend :

- de la complexité de la tâche (le nombre d'éléments à traiter et à mettre en relation)
- des ressources de l'individu (ses connaissances à propos de cette tâche)
- et de la manière dont la tâche est présentée.

Chercher à résoudre un problème représente une tâche cognitive. Apprendre, c'est-à-dire modifier ses connaissances, en est une autre. La résolution de problèmes est le moyen. L'apprentissage est le but. La résolution de problèmes et l'apprentissage sont donc deux activités différentes, chacune comportant sa charge cognitive propre. Comme notre capacité à traiter l'information est limitée, si le moyen est trop exigeant, il n'y aura peu ou pas de ressources pour apprendre.

→ **objectif = réduire la charge cognitive associée à la résolution de problèmes.**

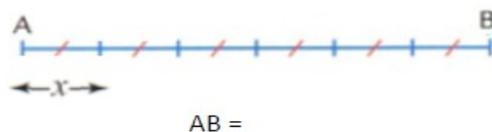
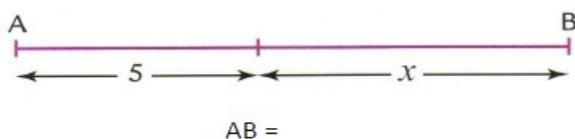
Extrait de l'interview d'André Tricot - 07/01/2020 - La main à la pâte

On peut donc raisonnablement s'attendre à une relative facilité des élèves à produire des formules littérales (par rapport aux années passées) et à un engagement plus fort.

Sur le même principe que lors du travail sur les expressions numériques, nous nous sommes attachés à **proposer des exercices variés en niveaux de difficulté et appartenant à des registres différents.**

Exemple d'exercice avec situation géométrique de niveau 1 :

Exprimer les longueurs ou les aires en fonctions de x ou y , à l'aide d'un schéma en barre.



Exemple d'exercice avec énoncé texte de niveau 2 :

Paul achète une brioche à 4€ et cinq croissants. Il donne un billet de 20€.

On note x le prix d'un croissant.

Exprimer, en fonction de x , la somme qu'on rend à Paul.

Exemple d'exercice avec programme de calcul de niveau 2 :

Soit x le nombre choisi au départ.

Pour chaque programme, écrire, en fonction de x , une expression du résultat.

- Je choisis un nombre
- Je le multiplie par 3
- J'ajoute 5 au résultat

- Je choisis un nombre
- Je lui ajoute 4
- Je multiplie le résultat par 2

2) Déroulé de la séance

L'exercice d'entrée est un exercice à énoncé texte de niveau 1.

Sur un site internet, un T-shirt est vendu 8 € et les frais d'envoi coûtent 10 € pour l'ensemble d'une commande.

1. Si on veut avoir **le prix à payer en un seul calcul**, que faut-il écrire dans la calculatrice lorsqu'on achète :

2 t-shirts → =

3 t-shirts → =

4 t-shirts → =

13 t-shirts → =

2. On nomme « n » le nombre de T-shirt achetés.

a. Modéliser le prix à payer à l'aide d'un schéma en barres.

b. Ecrire une expression littérale pour calculer le prix à payer en fonction de n .

Prix à payer =

Les élèves produisent les 4 expressions numériques demandées à la première question (avec un usage facultatif des SEB).

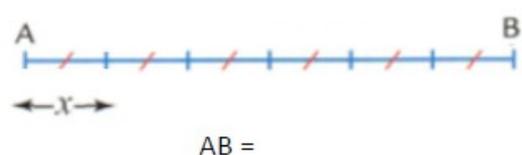
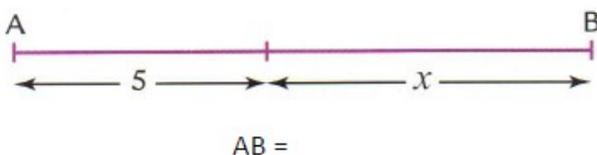
Le passage à l'expression littérale se fait par généralisation des 4 cas particuliers avec un passage obligé par le SEB.

3) Propositions d'exercices pour la suite de la séquence

Pour les exercices suivants, l'objectif visé est le passage direct à l'expression littérale avec utilisation facultative du SEB (en particulier dans le cadre de la remédiation).

Nous donnons tout d'abord aux élèves un exercice dans une situation géométrique (de niveau 1)

Exercice 1 : Exprimer les longueurs ou les aires en fonctions de x ou y , à l'aide d'un schéma en barre.

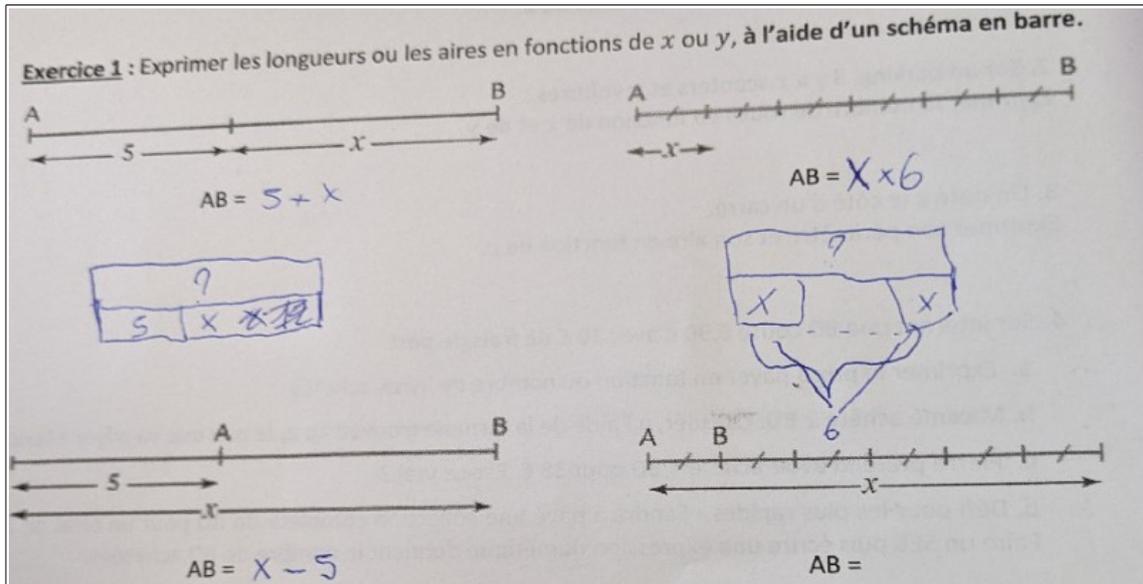


Les exercices que nous avons sélectionnés pour la suite de la séquence sont rassemblés dans les documents suivants :

- Exercices de niveau 1 : *Labomaths_2023-2024-Partie 5ème-Expressions littérales 1*
- Exercices de niveau 2 : *Labomaths_2023-2024-Partie 5ème-Expressions littérales 2*
- Exercices de niveau 3 : *Labomaths_2023-2024-Partie 5ème-Expressions littérales 3*

Tous les exercices ne sont pas obligatoirement à réaliser. Ils peuvent l'être en questions rapides de début de cours, en activité centrale de séance ou en travail personnel à la maison.

4) Analyse a posteriori



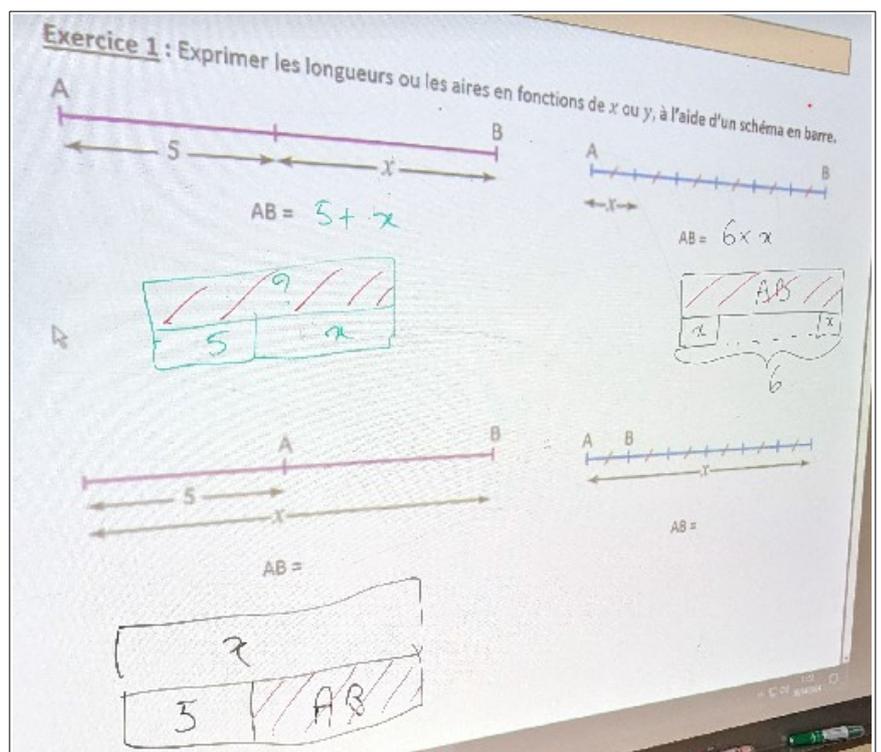
Nous avons constaté une bonne mobilisation des SEB pour produire des expressions, même si cela s'avère plus difficile (du fait de l'utilisation de la lettre) que pour les expressions numériques.

Dans le cadre de la manipulation des SEB, on retrouve la principale phrase éclairante du professeur : « On se pose toujours la question : est-ce que je connais le total ou pas ? »

Tandis que les élèves, interviewés après la séance observée, reconnaissent que « le SEB est [parfois] compliqué à faire mais [qu']il aide à comprendre ». D'où l'importance de réactiver les SEB avant cette séquence.

Nous avons ici fait face à une nouvelle complexité : la présence de deux éléments non connus dans le SEB, d'une part ce que l'on cherche à exprimer (somme rendue par la boulangère, longueur d'un côté d'un triangle ...) et d'autre part la variable x .

Afin de simplifier cette représentation pour les élèves, il nous est paru intéressant de **hachurer ce qui est cherché** dans le SEB (c'est-à-dire le **résultat**) afin de le mettre en valeur et le faire correspondre au point d'interrogation « ? » qu'on utilisait dans les proto-SEB.



→ Par exemple, lors de la recherche de la longueur du segment [AB], nous nous sommes demandé s'il fallait ajouter un point d'interrogation en plus d'avoir hachuré AB, mais cela nous a paru inutilement surchargé.

→ Autre interrogation : devait-on intégrer dès la sixième (dans les proto-SEB) une case hachurée en plus OU à la place du point d'interrogation afin d'anticiper cette difficulté rencontrée en 5ème ? Nous envisageons d'expérimenter l'année prochaine ces différentes configurations avec plusieurs classes et comparer leur appropriation.

Tout ceci nous a menés à un questionnement sur les différents usages des lettres et sur le statut de l'inconnue (« le point d'interrogation ») et celui de la variable, (« x »).

Les différents usages des lettres (Eduscol mars 2016 - Du numérique au littéral) Cf ici

variable : la rencontre de la lettre comme variable est très précoce pour les élèves, elle a lieu dès l'utilisation de formules. La valeur de certaines lettres d'une formule dépend des valeurs attribuées aux autres (qui sont les variables),

indéterminée : la lettre ne représente plus des nombres particuliers, mais au contraire des nombres quelconques comme dans les identités remarquables pour lesquelles l'égalité est universellement vraie,

inconnue : résoudre une équation d'inconnue x , c'est trouver toutes les valeurs qui, substituées à x , donnent une égalité vraie,

paramètre : ici, la lettre représente une quantité supposée connue par rapport à d'autres lettres qui ont :

- soit le statut de variable comme dans la définition de la fonction linéaire de coefficient a déterminée par $x \rightarrow ax$, où x désigne la variable et a un nombre déterminé ;
- soit le statut d'inconnue, quand par exemple l'enseignant précise que toute équation du premier degré à une inconnue peut se ramener à une équation de la forme $ax = b$.

Un nouvel enjeu se dessine alors : faire prendre conscience aux élèves de ces différents statuts et de l'importance du vocabulaire utilisé, sans pour autant l'explicitier de façon formelle.

En conclusion, de la même manière que les activités développées en 6ème avaient conduit nos élèves à résoudre davantage de problèmes, le fait d'avoir conduit nos recherches en classe de 5ème leur a permis de se confronter davantage aux expressions numériques et littérales. Par ailleurs, l'utilisation des SEB et la poursuite de la mise en œuvre d'une procédure qui leur est familière depuis le début de la 6ème, voire depuis le CM pour certains, se sont révélées être un appui véritable dans le cadre de la production d'expressions.

Afin de poursuivre l'an prochain notre réflexion, nous envisageons d'aborder l'utilisation des SEB dans le cadre de la mise en équation de problèmes.