

Mobilisation des quatre opérations à l'aide des schémas en barre – Poursuite du travail engagé

Participants :

- 5 enseignants de mathématiques du collège Ernest Renan : Peggy Clément, Pierre de Guido, Maxime Droguet, Pierre-Alain Dugas, Sandra Lethereau.
- 1 enseignante de l'école primaire la Sensive (même réseau que le collège Ernest Renan) : Claire Lemahieu.
- Sandra Ferré, accompagnatrice du laboratoire.

Nous avons lors de cette année scolaire 2023/2024 reconduit l'expérimentation menée l'année scolaire passée en sixième autour de l'utilisation des schémas en barre pour automatiser des procédures de modélisation visant à mobiliser les quatre opérations. Le livret d'entraînements produit l'année passée a été utilisé.

On rappelle qu'au départ, on peut être amené en classe à imposer l'utilisation du schéma en barre afin que les élèves apprennent à le maîtriser. Au fil de l'année, ils ont la possibilité de s'en servir ou pas, et donc de le mobiliser par eux-mêmes. On constate en particulier que des élèves fragiles s'en emparent volontiers tout au long de l'année, et que le schéma en barre est un point d'appui pour eux.

1) Garantir de la variété dans les énoncés des problèmes :

Suite à cette deuxième mise en œuvre du livret, nous avons de nouveau analysé nos entraînements. Au regard de la typologie de Vergnaud, nous nous sommes rendus compte que deux catégories de problèmes étaient sur-représentées : la composition de 2 états et la proportionnalité. Nous faisons d'ailleurs l'hypothèse que ceci vient de notre propension à créer plus intuitivement ces problèmes.

Nous avons donc cherché à ré-équilibrer et à faire apparaître des catégories de problèmes que nous n'avions pas encore intégrées (surlignées en jaune dans la typologie en page 4) :

- COMPARAISON d'états.
- COMPOSITION de transformations (positives ou négatives).
- Comparaison multiplicative N fois plus // N fois moins.

Volontairement, deux sous-catégories de la PROPORTIONNALITÉ (surlignées en bleu dans la typologie en page 4) n'ont pas été ajoutées car elles sont travaillées à d'autres moments de l'année, et pas nécessairement avec les schémas en barre :

- Produit cartésien : nous le travaillons dans le cadre de nos entraînements à la Course Aux Nombres et en activités rapides de manière plus générale.
- 4^{ème} de proportionnelle : au moment où nous faisons les entraînements (en début d'année), nous n'avons pas encore suffisamment réinvesti la proportionnalité pour intégrer cette sous-catégorie.

Nous avons eu quelques difficultés à catégoriser certains problèmes pour lesquels nous avons hésité :

- entre « COMPOSITION DE 2 états, Recherche d'une partie » et « COMPOSITION DE TRANSFORMATIONS, Recherche de la transformation composée ». C'est la notion de temporalité présente dans certains problèmes qui nous a fait les classer dans la deuxième catégorie.
- entre deux sous-catégories de la PROPORTIONNALITÉ : la « Configuration rectangulaire, Recherche du tout » et la « Multiplication, Recherche du nombre total d'éléments ». Quand il y a la présence d'un « de » dans l'énoncé, renvoyant à une multiplication, nous avons classé les problèmes dans la « Configuration rectangulaire, Recherche du tout ». Dans le cas d'un retour à l'image de l'unité, nous avons classé les problèmes dans la « Multiplication, Recherche du nombre total d'éléments ».

2) Analogies, concordance et discordance :

Pour cette partie, nous nous sommes très largement appuyés sur la lecture des deux ressources citées en fin de document et dont nous recommandons la lecture pour davantage de détails.

a) Généralités :

On peut « distinguer **trois facteurs caractérisant les énoncés qui influent sur la résolution des problèmes et sont porteurs d'enjeux en termes d'apprentissage**. Il s'agit de **trois formes d'analogie avec des connaissances acquises dans des contextes tant scolaires qu'extra-scolaires** qu'il est nécessaire – parce qu'elles vont interférer avec les apprentissages nouveaux – que l'enseignant prenne en compte pour élaborer des séquences d'apprentissage et pour comprendre les difficultés rencontrées par les élèves. À la lecture de l'énoncé, l'élève élabore une **représentation de la situation** en établissant des **analogies reposant sur ses connaissances préalables**. Ce processus est utilisé de manière privilégiée dans les raisonnements mathématiques car il est peu coûteux et rend disponible des stratégies calculatoires. Ces **analogies** sont **facilitantes** pour la résolution **lorsque les connaissances préalables et la notion scolaire concordent**. On se situe alors à **l'intérieur du domaine de validité de l'analogie**. **En revanche, dans de nombreuses situations, cette fois hors du domaine de validité de l'analogie, les connaissances quotidiennes font obstacle à la résolution et conduisent à des solutions erronées.** »ⁱ

Les trois formes d'analogies sont l'analogie de substitution, l'analogie de scénario, et l'analogie de simulation. Sans les détailler complètement, car ce n'est pas l'objet ici, nous donnons quelques éléments ci-dessous en lien avec les notions de concordance et de discordance d'énoncés.

b) Caractéristiques des trois analogies et exemples d'énoncés :

▪ analogie de substitution

« L'analogie de substitution fait appel au fait que chaque opération arithmétique est associée à une connaissance extra-mathématique, issue de la vie quotidienne, qui vient se substituer à la notion scolaire » i. C'est ainsi par exemple que lorsqu'on lit le mot « gagner » dans un énoncé, on va penser spontanément vers une addition, là où « perdre » amènerait intuitivement à une soustraction.

« Il est important de noter que les analogies de substitution sont opérantes dans un ensemble considérable de situations, ensemble dans lequel elles concordent avec la notion mathématique. Les énoncés sont alors qualifiés de concordants. À l'extérieur, ils sont qualifiés de discordants, l'analogie de substitution étant obstructive pour la résolution. » i

□ Énoncé concordant : « *Marin avait 9 livres. Puis il a donné 4 livres à Raphaël. Combien de livres a maintenant Marin ?* »

□ Énoncé discordant : « *Marin avait des livres. Raphaël lui a donné 5 livres. Maintenant Marin a 8 livres. Combien Marin avait-il de livres au début ?* »

▪ analogie de scénario

« Les scénarios peuvent être plus ou moins en concordance avec les opérations mathématiques appropriées pour la résolution : par exemple, un scénario impliquant des contenants et des contenus, comme des vases et des fleurs, évoque une multiplication ou une division. Chaque énoncé possède ainsi une structure sémantique, non mathématique, qui est induite à partir des éléments situationnels de cet énoncé. On parle fréquemment « d'habillage » pour désigner ces éléments situationnels ; ce qui présuppose – à tort – que ceux-ci n'interfèrent pas avec la notion mathématique en jeu. » i

□ Énoncé concordant : « *J'ai 12 oranges à ranger dans 4 paniers. Combien y a-t-il d'oranges dans chaque panier ?* »
L'analogie de scénario joue ici « un rôle facilitateur du fait de la relation fonctionnelle existant entre les oranges et les paniers. »ⁱⁱ

□ Énoncé discordant : « *J'ai 12 oranges et 4 pommes. Combien ai-je de fois plus d'oranges que de pommes ?* »
Cet énoncé « va mettre en difficulté nombre d'élèves de cycle 3 car l'analogie de scénario joue un rôle obstructif »ⁱⁱ.

▪ analogie de simulation

« Il s'agit cette fois de repérer la mise en œuvre de la simulation mentale de la situation décrite par l'énoncé, et donc d'interroger plus en profondeur les valeurs numériques de l'énoncé, variables didactiques pourtant usuellement utilisées par les enseignants pour moduler la difficulté des problèmes qu'ils proposent à leurs élèves. » i

- Énoncé concordant : « *Quel est le prix de 3 objets à 50 cruzeiros ?* »
- Énoncé discordant : « *Quel est le prix de 50 objets à 3 cruzeiros ?* »

« Dans le premier cas, la simulation mentale (50 additionné 3 fois) conduit assez aisément à la solution, sans même qu'il soit nécessaire de faire appel à la multiplication ou à des propriétés de cette opération, alors que dans le second cas, la simulation (cette fois, 3 additionné 50 fois) mène à une impasse puisqu'il est nécessaire pour aboutir au résultat de s'appuyer sur la multiplication, ou du moins sa propriété de commutativité. Lorsque la simulation mentale mène à la solution sans coût calculatoire excessif, l'analogie de simulation est facilitatrice pour la résolution. Lorsque l'élève ne peut se représenter mentalement les valeurs numériques et leur relation mathématique, la simulation est trop coûteuse, il doit alors faire appel aux propriétés des opérations arithmétiques. » i

3) Synthèse des modifications actées pour les entraînements :

Nous n'avons fait varier les contenus qu'à partir de l'entraînement J5 car c'est à partir de celui-ci qu'apparaissent des énoncés. Auparavant, les entraînements portent simplement sur le passage du schéma en barre vers l'opération.




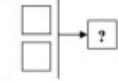
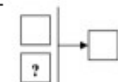
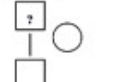


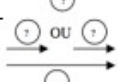
Sur 32 énoncés, 13 ont été modifiés pour y apporter de la variété, et parfois de la discordance.

Les énoncés modifiés sont soulignés. Ceux qui sont de plus discordants sont **en rouge**.





Exemple : le problème J6 – 3 est un énoncé modifié et discordant. C'est le troisième problème de J6 dans le livret d'entraînements.

Catégorie de problèmes (typologie de Vergnaud)	Énoncés du livret d'entraînements
TRANSFORMATION d'état, Recherche de l'état final	4 (J5 – 5 ; <u>J6 – 3</u> ; J8 – 1 ; <u>J10 – 5</u>)
TRANSFORMATION d'état, Recherche de la transformation	2 (<u>J5 – 3</u> ; <u>J7 – 1</u>)
TRANSFORMATION d'état, Recherche de l'état initial	1 (J10 - 2)
COMPOSITION DE 2 états, Recherche du tout	2 (J5 – 1 ; J6 – 2)
COMPOSITION DE 2 états, Recherche d'une partie	2 (J7 – 4 ; J10 - 4)
Comparaison d'état, Recherche de l'un des états	2 (<u>J7 – 5</u> ; <u>J8 – 3</u>).
Comparaison d'état, Recherche de la comparaison	1 (<u>J8 – 5</u>) Discordance peu marquée
COMPOSITION DE TRANSFORMATIONS, Recherche de la transformation composée.	1 problème → J6 - 5
COMPOSITION DE TRANSFORMATIONS, Recherche de l'une des composantes.	1 problème → J9 - 1
Comparaison multiplicative N fois plus // N fois moins / Recherche du résultat.	2 problèmes (<u>J9 – 2</u> ; <u>J9 – 4</u>)
Comparaison multiplicative N fois plus // N fois moins / Recherche du rapport.	2 (<u>J9 – 3</u> ; <u>J10 – 3</u>)
PROPORTIONNALITÉ, configuration rectangulaire, recherche du tout.	2 (J6 – 4 ; <u>J7 – 2</u>)
PROPORTIONNALITÉ, configuration rectangulaire, recherche d'une partie.	1 (<u>J5 – 6</u>)
PROPORTIONNALITÉ, Multiplication, recherche du nombre total d'éléments.	2 (J5 – 2 ; J8 - 4)
PROPORTIONNALITÉ, Division partition, Recherche de la valeur d'une part.	4 (J5 – 4 ; J6 – 1 ; J7 – 3 ; J8 - 2)
PROPORTIONNALITÉ, Division quotient, recherche du nombre de parts.	3 (J6 – 6 ; J9 – 5 ; J10 - 1)

Classification des problèmes du champ additif selon la typologie de Vergnaud

Problèmes du champ additif		Exemples	Classement
TRANSFORMATION d'état <i>(positive ou négative)</i>	Recherche de l'état final		Pierre arrive à l'école avec 8 billes. Il en perd 3 à la récréation. Combien en a-t-il maintenant ?
	Recherche de la transformation		Pierre arrive à l'école avec 8 billes. Après la récréation, il en a 11. Combien en a-t-il gagnées ?
	Recherche de l'état initial		Pierre gagne 3 billes à la récréation. Il en a maintenant 8. Combien en avait-il au départ ?
COMPOSITION de 2 états	Recherche du tout		Dans ce bouquet de fleurs, il y a 8 roses et 7 iris. De combien de fleurs ce bouquet est-il composé ?
	Recherche d'une partie		Dans le bouquet de 15 fleurs de maman, il y a 5 roses et des iris. Combien y a-t-il d'iris ?
COMPARAISON d'états	Recherche de l'un des états		Pierre a 8 billes. Sarah en possède 7 de plus que Pierre. Combien Sarah a-t-elle de billes ?
	Recherche de la comparaison		Mon ballon vaut 13 euros dans un magasin et 18 euros dans un autre. De combien est-il plus cher dans le second magasin ?
COMPOSITION de transformations <i>(positives ou négatives)</i>	Recherche de la transformation composée		Zoé a gagné 9 billes le matin et 7 billes l'après-midi. Combien Zoé a-t-elle gagné de billes dans la journée ?
	Recherche de l'une des composantes		Au jeu de piste, je joue 2 coups. Au deuxième coup, j'avance de 9. Au total, j'ai reculé de 4. Que s'est-il passé au premier coup ?

Classification des problèmes du champ multiplicatif selon la typologie de Vergnaud

Problèmes du champ multiplicatif		Exemples	Classement	
Comparaison multiplicative N fois plus // N fois moins	Recherche du résultat		J'ai 28 images. Marie en a 2 fois plus que moi. Combien Marie a-t-elle d'images ?	
	Recherche du rapport		J'ai 40 billes et Tom en a 80. Tom en a combien de fois plus que moi ?	
PROPORTIONNALITE	Produit cartésien	Recherche du nombre de couples possibles	$A \times B = ?$	Je possède 3 vestes et 4 pantalons. Combien puis-je faire de tenues différentes ?
		Recherche du nombre d'un élément	$C : A = ?$	Avec mes 3 vestes et mes pantalons, je peux former 12 tenues différentes. Combien ai-je de pantalons ?
	Configuration rectangulaire	Recherche du tout		Ma feuille de papier mesure 30 cm de long et 21 cm de large. Quelle est son aire ?
		Recherche d'une partie		Ma feuille de papier mesure 30 cm de long. Son aire est de 630 cm ² . Quelle est sa largeur ?
	Multiplication	Recherche du nombre total d'éléments	$1 \rightarrow a$ $b \rightarrow ?$	Un livre coûte 3 euros. Combien coûtent 5 livres ?
	Division partition	Recherche de la valeur d'une part	$c \rightarrow d$ $1 \rightarrow ?$	5 livres coûtent 15 euros. Combien coûte un livre ?
	Division quotient	Recherche du nombre de parts	$1 \rightarrow e$ $? \rightarrow f$	Un livre coûte 3 euros. Je paie 15 euros. Combien ai-je acheté de livres ?
	4ème de proportionnelle	(Sans passage à l'unité)	$g \rightarrow h$ $i \rightarrow ?$	Trois livres coûtent 15 euros. Combien coûtent 4 livres ?

- i <https://afdm.apmep.fr/rubriques/ouvertures/trois-formes-danalogie-guidant-la-resolution-de-problemes/#rref5>
- ii <https://centre-alain-savary.ens-lyon.fr/CAS/thematiques/mathematiques-en-education-prioritaire/compte-rendus- formations-de-formateurs-mathematiques/session-2019-2020/le-role-des-analogies-intuitives-dans-la-resolution-de-problemes-arithmetiques-aux-cycles-2-et-3>