Le métier de mathématicien

Laure Saint-Raymond et Anne-Laure Dalibard

11 mars 2012

1 Notre domaine de recherche

Nous travaillons toutes les deux à l'analyse théorique de modèles issus de l'océanographie. Dans ce domaine, le rôle des mathématiciens est complémentaire de ceux des océanographes et des numériciens : le rôle des océanographes est, entre autres, de proposer des modèles théoriques qui décrivent les phénomènes observés, tandis que celui des numériciens est de traduire les modèles théoriques en des modèles numériques permettant de prédire l'avenir (et en particulier d'anticiper des évènements exceptionnels).

Cependant, les modèles théoriques décrivant la dynamique océanique sont très complexes, et font intervenir plusieurs forces en compétition et de nombreuses échelles spatiales et temporelles. Dès lors, la simulation directe de ces modèles, à l'aide d'ordinateurs, n'est pas envisageable : elle nécessiterait une puissance de calcul que ne possèdent pas les meilleurs calculateurs actuels. L'enjeu est donc de proposer des modèles simplifiés, qui décrivent convenablement la dynamique tout en restant abordables numériquement.

Les contributions des mathématiques dans ce contexte sont de plusieurs natures :

- Vérifier la **stabilité** des modèles proposés par les océanographes.
  Cela inclut la validation des modèles théoriques et des approximations numériques.
- Proposer des modèles **plus simples** donnant de bonnes approximations
  Ces modèles plus simples permettent d'améliorer la rapidité des calculs, ainsi que la qualité des prédictions.
- Développer de nouveaux outils d'analyse sur des modèles très simplifiés et peu réalistes (appelés parfois "modèles-jouets"), en vue de les appliquer ensuite à des modèles plus complexes.

Dans la suite de cette partie, nous donnons quelques causes de la complexité des modèles océanographiques, ainsi que les simplifications habituellement utilisées par les mathématiciens. Nous exposons également quelques grands défis contemporains dans ce domaine.

1.1 L'océan, un système complexe

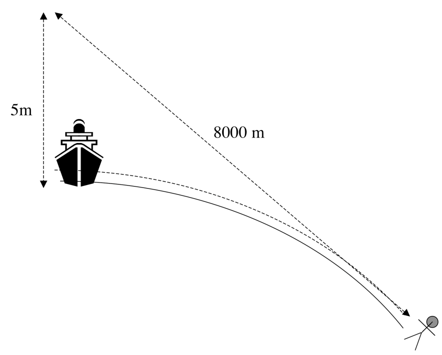

FIGURE 1 – La courbure terrestre

– L'importance de la **géométrie** dans la modélisation des courants marins est la première source de complexité. Évidemment, prendre en compte la géométrie sphérique de la Terre est primordial en vue d'une description précise, mais engendre des difficultés techniques conséquentes (voir figure 1).
  Par ailleurs, les fonds marins et les côtes présentent un relief très découpé (voir figure 2), dont la description en termes mathématiques est difficile.

Figure 2 – La côte découpée de la Bretagne

– Les océans sont en outre soumis à de nombreux **forçages**, qui sont en compétition les uns avec les autres. La force de Coriolis, due à la rotation de la Terre, joue un rôle capital dans la dynamique. Il est bien connu, par exemple, qu'elle dicte le sens de rotation des "gyres" (tourbillons marins à l'échelle d'un océan, voir la figure 3) : sens horaire dans l'hémisphère Nord, anti-horaire dans l'hémisphère Sud. Le couplage avec l'atmosphère se traduit entre autres

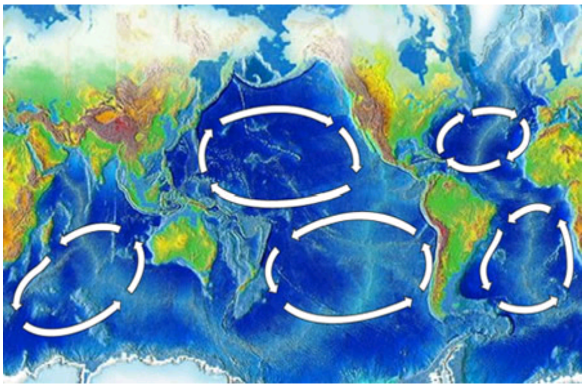

Figure 3 – Les gyres dans les hémisphères Nord et Sud

par l'entraînement par le vent des courants de surface, et est ainsi un des premiers moteurs de la circulation globale. Enfin, l'attraction gravitationnelle de la Lune est responsable des phénomènes de marées (voir figure 4), bien que son incidence sur la dynamique globale soit moindre.
– La co-existence de nombreuses échelles spatiales et temporelles s'ajoute aux difficultés précédentes. Sur une échelle spatiale planétaire, le mouvement principal est dominé par la rotation terrestre. La description des grands courants océaniques (Gulf Stream, Kuroshio, etc.) est plutôt pertinente sur des échelles de l'ordre de 1000 km. Cette échelle intermédiaire est également adaptée à l'analyse de phénomènes quasi-périodiques, du type "El Niño". Pour finir, les phénomènes côtiers (houle, déferlement des vagues, marées) sont modélisés sur des échelles spatiales de l'ordre de 10 km. Évidemment, certains modèles couplent plusieurs échelles simultanément : la propagation des tsunamis, par exemple, a lieu sur des milliers de kilomètres, tandis que leur déferlement est très localisé en espace.

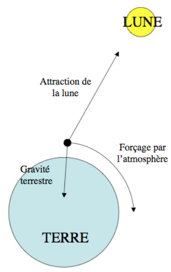

FIGURE 4 – Attraction de la lune

En conséquence, une description universelle des courants océaniques, à l'aide d'un jeu unique d'équations, serait non seulement inabordable – tant d'un point de vue numérique que mathématique – mais surtout non pertinente. Le rôle de la modélisation est dès lors primordial : il s'agit d'isoler des sous-problèmes (par exemple en choisissant a priori des échelles spatiales et temporelles), qui ne conservent qu'une partie des difficultés décrites ci-dessus, et pour lesquels l'analyse est possible.

Voici quelques exemples de simplifications utilisées couramment par les mathématiciens :

- Géométrie non prise en compte
- Absence de couplages
- Approximation d'eau peu profonde

  échelle verticale (profondeur de l'eau) $\sim$ 10 km
  échelle horizontale (étendue de l'océan) $\sim$ 1000 km

1.2 Défis actuels

- Compte tenu du paragraphe précédent, le premier défi sera évidemment de prendre en compte des modèles de plus en plus complexes. Les applications naturelles en climatologie et en météorologie nécessitent par exemple d'avoir une modélisation assez fine de l'interaction entre l'océan et l'atmosphère, tenant compte des phénomènes d'évaporation, du vent, etc. De même, les caractéristiques de l'eau à l'intérieur des océans (sa teneur en sel, sa température, sa densité) jouent un rôle important dans la dynamique globale, et ne sont que rarement intégrées dans les modèles analysés par les mathématiciens.
- L'autre point crucial sera de comprendre et d'anticiper des phénomènes exceptionnels. Il est bien connu que l'on ne peut pas prédire avec précision la dynamique globale sur des échelles de temps très longues : par exemple, les prévisions météo ne sont fiables que sur quelques jours ! Néanmoins, on peut espérer avoir des prévisions à plus long terme grâce à une approche statistique. On considère que la dynamique des courants océaniques possède des caractéristiques aléatoires, et on essaie de calculer un mouvement moyen, qui donnera des "tendances générales" à long terme. Le calcul de la déviation, c'est à dire de l'écart par rapport à ce mouvement moyen, permettra quant à lui de quantifier la fréquence des phénomènes exceptionnels.

2 Au quotidien

Au quotidien, l'essentiel de notre travail est de réfléchir à un bureau avec un papier et un crayon ! Mais cela n'exclut pas de travailler à plusieurs, autour d'un tableau par exemple (voir figure 5). Confronter sa pensée à celle de ses collaborateurs est souvent bénéfique, et fait naître de nouvelles idées. Une fois que nous avons démontré au brouillon un résultat qui nous semble intéressant (cela prend le plus souvent plusieurs mois, et parfois plusieurs années !), nous l'écrivons

FIGURE 5 – Séance de travail au département de mathématiques de l'École normale supérieure

sous forme d'article. Cet article sera ensuite soumis à une revue spécialisée en mathématiques pour être publié.

Par ailleurs, nous ne savons ni l'une ni l'autre faire de simulation numérique, et notre travail est donc assez proche de celui des mathématiciens "purs", bien que nous appartenions à un domaine des mathématiques traditionnellement considéré comme "appliqué".

Les voyages tiennent un place importante dans la vie des mathématiciens : en effet, les mathématiques sont une discipline très internationale, et il est fréquent d'avoir des collaborateurs étrangers. Correspondre avec eux par courrier électronique ou par visio-conférence n'est pas toujours suffisant : nous voyageons donc pour leur rendre visite, ou pour aller présenter nos résultats lors de conférences internationales. Cependant, il n'y a pas de "quota" de voyages (dans un sens ou dans l'autre !) : certains mathématiciens aiment beaucoup voyager et passeront une grande partie de l'année à l'étranger, et d'autres préfèrent travailler dans leur laboratoire.

Selon nous, l'atout majeur du métier de mathématicien (et de chercheur en général) réside sans conteste dans la stimulation intellectuelle qu'il procure : on apprend en permanence, soit pour se tenir au courant des dernières avancées dans notre domaine, soit pour utiliser de nouveaux outils afin de résoudre le problème sur lequel on travaille. À cela s'ajoute l'esthétique de la construction mathématique en elle-même, et évidemment le plaisir de la découverte !

Sources

- Figure 2 : http ://www.carphaz.com/
- Figure 3 : http ://fr.wikipedia.org/wiki/Gyre_océanique
- Figure 5 : ©Steve Murrez