# Thème : Quelques applications des congruences

## Activité 8. Systèmes avec des congruences (2 exercices)

Pré requis : Bézout, congruences.

Objectifs : Utiliser les congruences et leurs propriétés dans la résolution d'un problème concret.

# Exercice 1 : Le théorème des restes chinois

On se propose de déterminer les valeurs de telles que

1. Montrer que résoudre ce système revient à résoudre dans .

***Méthode :*** On réécrit ce système sans congruence en utilisant l’équivalence :

1. Résoudre dans l’équation .
2. En déduire les solutions du système
3. Application :

Le phénomène n°1 est observé la première fois au jour n°3. Il se répète ensuite avec une période de 11 jours.

Le phénomène n°2 est observé la première fois au jour n°4. Il se répète ensuite avec une période de 15 jours.

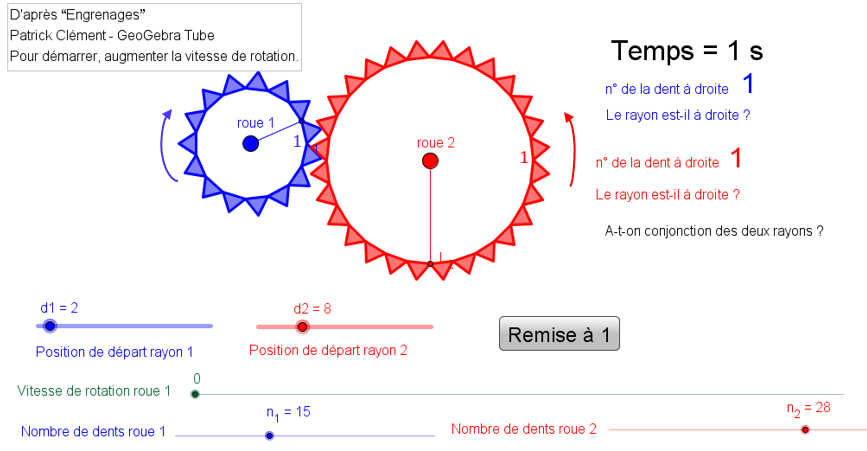
Quels sont les numéros des jours où ces deux phénomènes sont observables simultanément ?

1. Ce genre de problème est lié à des problèmes d’astronomie du type « Si un 1er astre, de période d’apparition *p* est apparu au jour et si un 2ème astre de période d’apparition *q* est apparu au jour , quels sont les jours où ces deux astres apparaitront en même temps ? » Les astronomes chinois l’avaient résolu.
   1. Résoudre le système .
   2. Le système a-t-il toujours des solutions lorsque *p* et *q* ne sont pas premiers entre eux ?

**Exercice 2 : Un engrenage**

1. Résoudre l’équation (E) :

où et sont des nombres entiers.

1. En déduire les solutions du système suivant (S) :
2. On a modélisé un engrenage composé de deux roues dentées avec le logiciel GeoGebra :

La roue 1 a 15 dents et la roue 2 a 28 dents. On règle la position du rayon sur la roue 1 à sa dent n°2 et sur la roue 2 à sa dent n°8. On augmente la vitesse de rotation de la roue 1 qui entraine la roue 2. Chaque seconde une dent prend la place de la précédente (les dents sont numérotées dans les « creux »). Au temps=1s, les dents n°1 des deux roues sont à droite.

* 1. A quel temps aura-t-on la première conjonction des rayons à droite, c’est-à-dire verra-t-on pour la première fois les deux rayons à droite en même temps ?
  2. A quel temps aura-t-on la deuxième conjonction ?