# Thème : Quelques applications des congruences

## Corrigé de l’activité 8. Systèmes avec des congruences (2 exercices)

# Exercice 1 : Le théorème des restes chinois

On se propose de déterminer les valeurs de telles que

1. .
2. Résolvons dans l’équation .
   * + - et sont premiers entre eux, donc, d’après le théorème de Bézout, cette équation a des solutions.
       - Pour trouver un couple particulier de solutions, on peut faire par exemple cette table à la calculatrice :

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| -7 | -5,2 |
| -6 | -4,467 |
| -5 | -3,733 |
| **-4** | **-3** |
| -3 | -2,267 |
| -2 | -1,533 |
| -1 | -0,8 |

On a donc avec cette table le couple particulier de solutions

Alternative : « descendre » puis « remonter » l’algorithme d’Euclide  en remplaçant les coefficients de et dans l’équation diophantienne par leurs valeurs absolues (il faut juste considérer qu’on obtiendra ).

On pose . On écrit la succession de divisions euclidiennes en commençant par  :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | Conclusion : avec et |
|  |  |  |
|  |  | soit |
|  |  |  |
|  |  | soit |
|  |  |  |
| On arrête au dernier reste non nul (ici **1**). |  | Puis on isole **1** et on remonte en remplaçant l’entier qui correspond à un reste dans l’algorithme d’Euclide, à chaque étape. |

Ainsi le couple est un couple particulier de solutions de l’équation :

* On écrit l’équation sans second membre :

Par soustraction on a l’équation sans second membre.

Donc .

donc, d’après le théorème de Gauss, .

Il existe tel que . Donc .

En remplaçant en fonction de dans l’équation sans second membre :

Les solutions de l’équation sont donc de la forme

***Réciproque :***

Tous ces couples sont-ils solutions de l’équation complète  ?

On remplace par et par .

1. D'après la question 1), les solutions du système sont les entiers relatifs (ou bien, de façon équivalente ).

Ainsi :

quel que soit .

quel que soit .

1. Notons les numéros des jours où les deux phénomènes sont présents simultanément.

On a alors solutions du système .

Et donc d'après la question précédente, où décrit .

Si on considère que seules les valeurs positives des solutions conviennent, les valeurs de  vérifient :

avec

Donc pour les entiers on aura les valeurs de positives :

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| 1 | 124 |
| 2 | 289 |
| 3 | 454 |
| … | … |

Les deux phénomènes seront visibles simultanément aux jours n°124, 289, 454, …ainsi de suite tous les 165 jours.

1. a) Résolvons le système .

.

Soit l’équation à résoudre .

et ne sont pas premiers entre eux, donc d’après le théorème de Bézout, cette équation n’a pas de solution.

Alternative :

Impossible car n’est pas divisible par .

* 1. Le système à résoudre à la question 5)a) est un contre exemple.

Donc on ne peut donc pas prétendre qu’il y a toujours des solutions lorsque et ne sont pas premiers entre eux.

**Exercice 2 : Un engrenage**

Voir le fichier GeoGebra pf5372b08.systemes\_avec\_congruences\_geogebra.ggb

1. Résolvons dans l’équation .

et avec . Donc cette équation a des solutions.

* + - * On cherche un couple particulier de solutions de l’équation
      * Pour trouver un couple particulier de solutions, on peut faire par exemple cette table à la calculatrice :

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| -16 | -8,607 |
| -15 | -8,071 |
| -14 | -7,536 |
| **-13** | **-7** |
| -12 | -6,464 |
| -11 | -5,929 |
| -10 | -5,393 |

On a donc avec cette table le couple particulier de solutions

Alternative : « descendre » puis « remonter » l’algorithme d’Euclide  en remplaçant les coefficients et dans l’équation diophantienne par leurs valeurs absolues (il faut juste considérer qu’on obtiendra ).

On pose . On écrit la succession de divisions euclidiennes en commençant par  :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | Conclusion : avec et |
|  |  |  |
|  |  | soit |
|  |  |  |
|  |  | soit |
|  |  |  |
| On arrête au dernier reste non nul (ici **1**). |  | On isole 1 et on remonte en remplaçant l’entier qui correspond à un reste dans l’algorithme d’Euclide |

Ainsi le couple est un couple particulier de solutions de l’équation :

Donc le couple est un couple particulier de solutions de l’équation

On écrit l’équation sans second membre :

Par soustraction on a l’équation sans second membre.

Donc .

donc, d’après le théorème de Gauss, .

Il existe tel que

donc .

En remplaçant en fonction de dans l’équation sans second membre :

Les solutions de l’équation sont donc de la forme

***Réciproque :***

Tous ces couples sont-ils solutions de l’équation complète  ?

On remplace par et par .

quel que soit .

.

Résolvons l’équation

D’après la question 1),

Donc les solutions du système sont les entiers relatifs

Ainsi :

pour tout

1. a) La première conjonction des deux rayons à droite aura lieu quand prendra sa plus petite valeur positive.

On cherche la plus petite valeur de telle que :

Donc, puisque , c’est pour qu’aura lieu la première conjonction des rayons à droite.

Ainsi, la plus petite valeur de positive satisfaisant le système est

La première conjonction aura lieu à .

* 1. La deuxième conjonction aura lieu pour la valeur de suivante, c’est-à-dire .

La deuxième conjonction aura lieu à

Alternative :

La relation montre que la période des conjonctions est .

Puisque la première conjonction a lieu à , la seconde aura lieu à