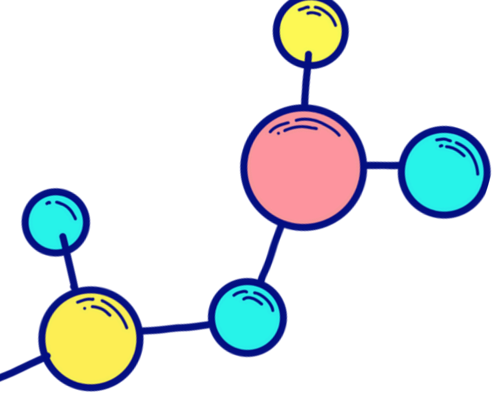
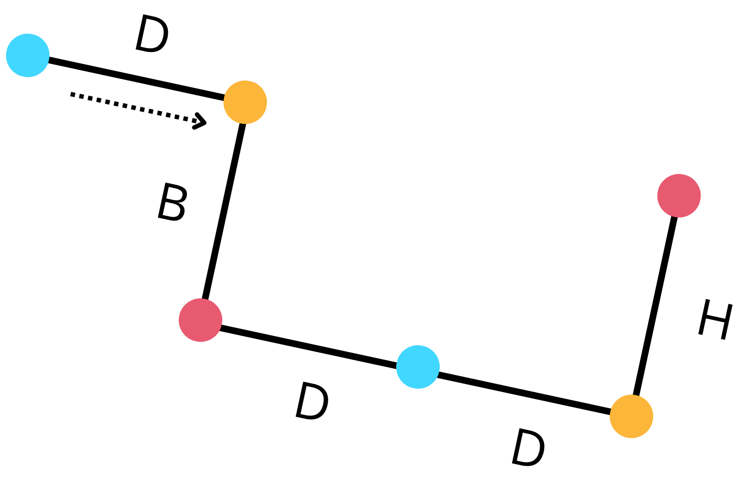


Lycée H. d'Estienne d'Orves
(Carquefou)
Lycée Grand Air (la Baule)

MATH.EN.JEANS

UN PROBLÈME DE POLYMÈRES



Par Raphaëlle MAGNIN, Pierre EVEN et
Adèle GRIMAULT

2023-2024

PROBLÈME

On s'intéresse à un problème de biologie. Des polymères sont constitués de chaînes d'atomes pouvant aller vers le haut (H), vers le bas (B) ou à droite (D). Ils ne peuvent pas retourner sur leurs pas. Combien de chaînes à 100 atomes existent ? A 1000 ?

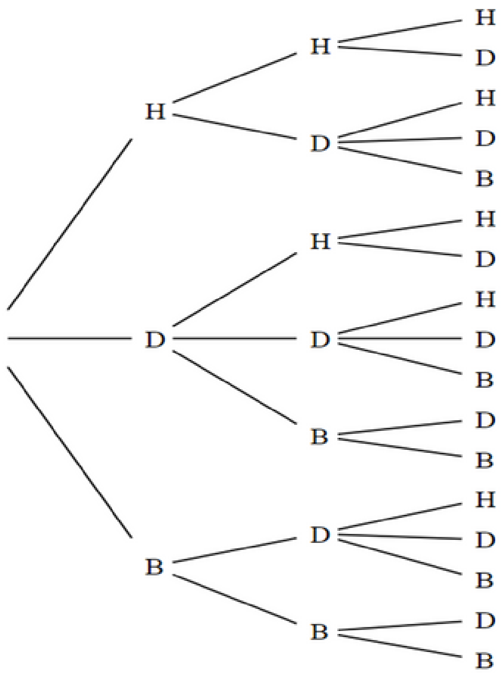
PLAN

1. Un graphe qui mène à une matrice d'adjacence
2. Sommes de suites
3. Une suite récurrente qui mène à une forme explicite

*Chaque partie correspond à une approche différente de la résolution du problème, elles sont par conséquents indépendantes les unes des autres

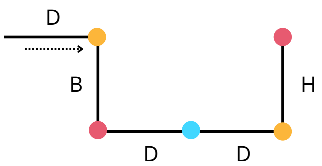
1- Un graphe qui mène à une matrice d'adjacence

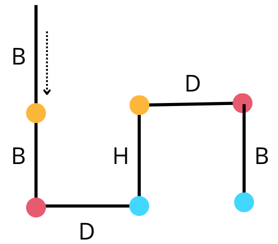
tout d'abord on essaye de faire un arbre des possibilités pour modéliser la situation ainsi que des exemples de chaines :



on appelle la possibilité d'aller en haut H, celle d'aller en bas B et celle d'aller à droite D et n le nombre d'atome par chaîne.

n=5





n=6

on observe que :

- quand on allé à D à n, on a trois possibilités à n+1 :

- aller à droite
- aller en haut
- aller en bas

- quand on allé en H à n, on a deux possibilités à n+1 :

- aller à droite
- aller en haut

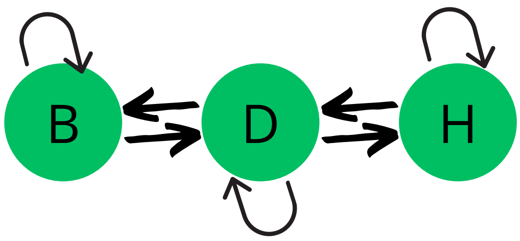
ici on ne peut pas aller en bas car cela reviendrait à revenir en arrière

- quand on allé à B à n, on a deux possibilités à n+1 :

- aller à droite
- aller en bas

ici on ne peut pas aller en haut car cela reviendrait à revenir en arrière

on modélise cette situation par un graphe :



et ce graphe par une matrice d'adjacence :

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} D & B & H \end{array} \\ \begin{array}{c} D \\ B \\ H \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

comme une matrice d'adjacence à la puissance **n** nous donne le nombre de chemins partant de X et arrivant à Y à n et que au départ de notre polymère on a trois possibilités :

- aller à droite
- aller en haut
- aller en bas

tout comme à D, c'est comme si notre chaîne partait de D. Donc pour obtenir le nombre de chaînes de n atomes possibles on met notre matrice à la puissance n qui nous intéresse et on additionne les chemins partant de **D** et arrivant à **D**, les chemins partant de **D** et arrivant à **H** et les chemins partant de **D** et arrivant à **B**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$$

exemple à n = 2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

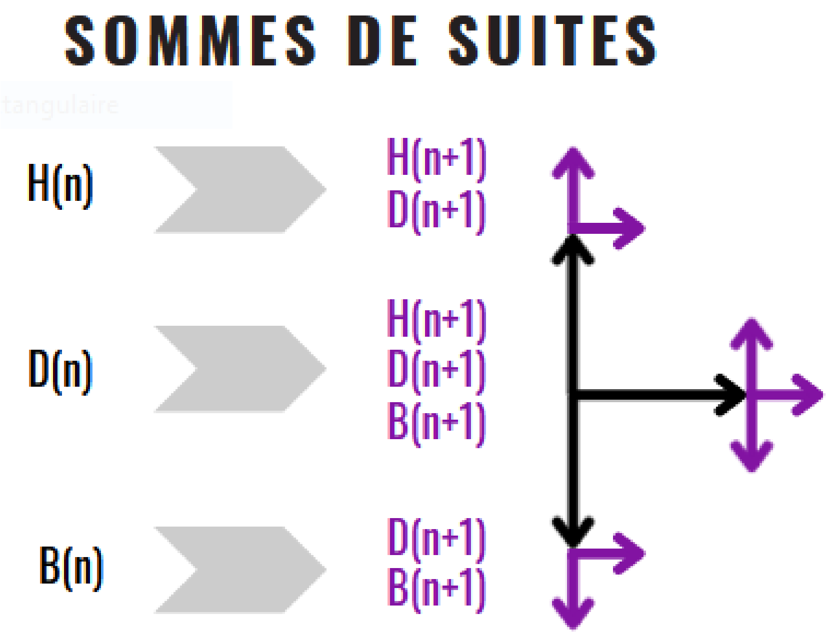
$$\begin{pmatrix} 1\times1+1\times1+1\times1 & 1\times1+1\times1+1\times0 & 1\times1+1\times0+1\times1 \\ 1\times1+1\times1+0\times1 & 1\times1+1\times1+0\times0 & 1\times1+1\times0+0\times1 \\ 1\times1+0\times1+1\times1 & 1\times1+0\times1+1\times0 & 1\times1+1\times0+1\times1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3+2+2= 7

C'est bien le nombre de possibilités au rang 2

2- Somme de suites qui mène à la matrice :

Tout d'abord, simplifions : On utilise la lettre **H** pour dire aller vers le **Haut** , la lettre **D** pour aller vers la **Droite**, et la lettre **B** pour aller vers le **Bas**



Autrement dit :

- Pour aller vers H au rang n+1, il faut être passé par H et D au rang n
- Pour aller vers D au rang n+1, il faut être passé par H, D et B au rang n
- Pour aller vers B au rang n+1, il faut être passé par D et B au rang n

on a donc :

$$H_{n+1} = H_n + D_n$$

$$D_{n+1} = H_n + D_n + B_n$$

$$B_{n+1} = D_n + B_n$$

On veut associer nos suite à une matrice :

$$H_{n+1} = 1H_n + 1D_n + 0B_n$$

$$D_{n+1} = 1H_n + 1D_n + 1B_n$$

$$B_{n+1} = 0H_n + 1D_n + 1B_n$$

Ainsi, les différents coefficient nous permettent d'obtenir notre matrice d'adjacence telle que :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

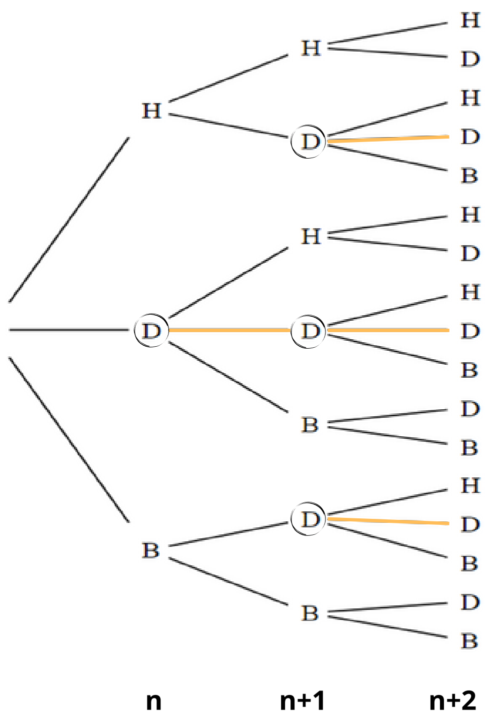
On peut ainsi exprimer nos suites de manière explicite :

$$S_n = A_n \times S_0$$

$$\begin{pmatrix} d_n \\ h_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3- Une suite récurrente qui mène à une forme explicite :

En reprenant notre arbre des possibilités on observe :

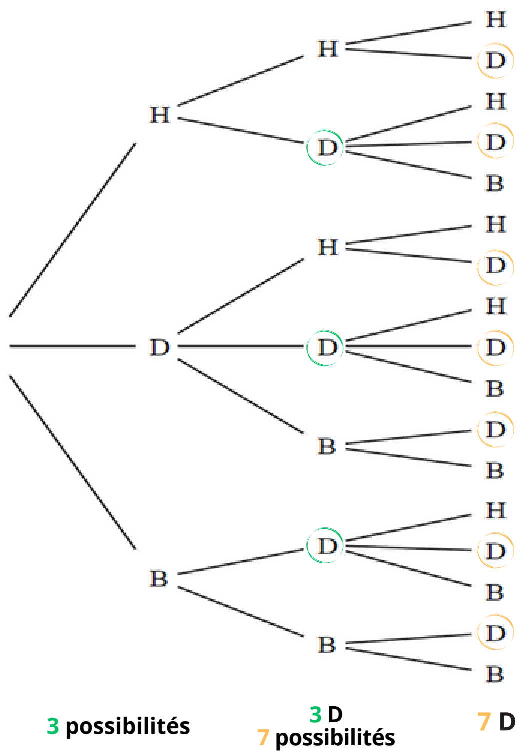


tous les directions nous donne 2 directions possibles. En conséquence le nombre de direction à n+1 qu'on nommera U_{n+1} est le double du nombre de possibilité à n (U_n) + plus une direction possible pour chaque D à n.
On a donc :

U_{n+1}= 2 x U_n + nombre de D à **n**

On observe également qu'à chaque nœud on a toujours une unique possibilité d'aller vers la droite. Et donc le nombre de possibilités à **n** nous donne le nombre de D à **n+1**.
On peut donc exprimer D :

nombre de D à n+1 = U_n



On en déduit une suite récurrente telle que :

$$u_{n+2} = 2\,u_{n+1} + u_n$$

A l'aide de cette suite on écrit un programme python :

```
# Créé par GRIMAULT1, le 19/12/2023 en Python 3.
from math import*
n = int(input("Entrez du texte : entrez le nombre de chaînes d'atomes"))
#  5 premières valeurs des possibilités calculées manuellement
X=[3,7,17,41,99]

# expression algorithmique de la suite Un+2=2(Un+1)+Un
for i in range (5,1001):
    x=X[i-2]+2*X[i-1]
    X.append(x)
print("le nombre de possibilités est :")
print(X[1000])
```

A l'aide de l'algorithme ci dessus on trouve U_{1000} =

173862817361510048113392732063287518809190824104684245763570072944177841306522186007881248757647526155598965224342185265607829530599877063992267115274300302346065892232737657351612082318884085720085755135975481584205200521472790368849847501114423133808690827279667023048950325351004049478273731369644053281603356987998498457434883570613383878936628838144874794543267245536801570068899

On cherche à exprimer cette suite de façon explicite :

Pour cela à l'aide de notre suite récurrente, on pose une matrice U_n telle que

$\mathbf{U_n} = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ on a donc $\mathbf{U_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ car $u_0=1$ et $u_1=3$

On peut trouver la forme explicite de cette suite de matrices en cherchant la matrice A telle que $U_n = A^n \times U_0$.

Comme $U_{n+1} = A \times U_n$, on pose un système d'équations avec les valeurs connues, et on trouve :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On a donc : $\mathbf{U_n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

On cherche une suite explicite :

Pour cela on utilise l'équation caractéristique de la suite :

$$x^2 = 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$

on trouve les racines de ce polynôme

$$R_1 = 1 - \sqrt{2} \qquad R_2 = 1 + \sqrt{2}$$

or pour une suite récurrente d'ordre 2, on peut trouver une suite explicite de la forme :

$$u_n = \alpha \times R_1^n + \beta \times R_2^n$$

Grâce aux valeurs trouvées manuellement de U_1 et U_2, on trouve un système d'équations :

$$\begin{cases} 3 = \alpha \times (1-\sqrt{2})^1 + \beta \times (1+\sqrt{2})^1 \\ 7 = \alpha \times (1-\sqrt{2})^2 + \beta \times (1+\sqrt{2})^2 \end{cases}$$

Par substitution on trouve α et β :

$$\alpha = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

$$\beta = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

on a donc :

$$U_n = \frac{1-\sqrt{2}}{2} \times (1-\sqrt{2})^n + \frac{1+\sqrt{2}}{2} \times (1+\sqrt{2})^n$$

On retrouve le même résultat qu'avec l'algorithme.