MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE,
DE LA JEUNESSE
ET DES SPORTS

Liberté
Égalité
Fraternité

Les guides fondamentaux pour enseigner

La résolution de problèmes mathématiques au collège

x

a^2

Cet ouvrage a été coordonné par le service de l’instruction publique et de l’action pédagogique et le service de l’accompagnement des politiques éducatives de la direction générale de l’enseignement scolaire du ministère de l’Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports.

Cet ouvrage synthétise des contributions de chercheurs et chercheuses, d’inspecteurs et d’inspectrices, d’enseignantes et d’enseignants. Ce document a fait l’objet d’une relecture critique de plusieurs membres du Conseil scientifique de l’éducation nationale.

Sommaire

Avant-propos

Les études internationales (Pisa, Timss) et nationales montrent une baisse inquiétante du niveau de nos élèves dans le domaine des mathématiques, mais aussi une faible performance dans le champ interdisciplinaire. Timss (niveaux CM1 et 4ᵉ) révèle que les élèves français sont sous-performants dans les domaines « nombre » et plus encore dans le domaine « présentation de données » alors que ce sont deux domaines travaillés depuis l'école primaire. D'une manière générale, la résolution de problèmes, qui est pourtant au cœur de l'enseignement des mathématiques, est un point de faiblesse de nos élèves – situation analysée dans de nombreux rapports depuis plusieurs décennies[1].

Les études Timss dégagent trois échelles indépendantes : connaître ; appliquer ; raisonner. Dans le domaine « connaître », les élèves français ne se distinguent pas du score moyen global des autres pays, mais marquent le pas dans les domaines « appliquer » et « raisonner ».

L'étude Pisa (élèves de 15 ans) dégage quant à elle des étapes dans le raisonnement mathématique : formuler, employer, interpréter et évaluer, qui sont dans la continuité des études Timss. Là encore, les élèves français peinent à mettre en œuvre leurs connaissances et compétences acquises dans des situations concrètes[2].

Le présent guide propose un certain nombre d'exercices typiques des évaluations internationales (Timss niveau 4ᵉ et Pisa) et dégage, à travers des exemples concrets, des pistes d'enseignement qui pourront remédier aux principales difficultés des élèves mises en exergue dans ces évaluations.

Par ailleurs, en comparant les évaluations internationales de CM1 et de 4ᵉ, on peut s'apercevoir que nombre de problèmes sont apparentés entre les deux niveaux (statistiques, gestion des données, problèmes arithmétiques mettant en jeu la maîtrise du calcul, des décimaux et des fractions, problèmes de partage, problèmes de géométrie, etc.) et nécessitent une maîtrise des outils numériques ou une aisance calculatoire. Ces évaluations indiquent aussi que des points résistants d'enseignement sont largement identifiés dès les classes de CM. Les enseignants des collèges et des écoles ont donc tout intérêt à proposer dans leurs classes des exercices appartenant aux banques de problèmes libérés par l'IEA[3] (International Association for the Evaluation of Educational Achievement) et issus des évaluations Timss CM1 ou 4ᵉ. Ces exercices sont d'excellents supports pour la formation entre pairs, que ce soit dans les laboratoires de mathématiques quand ils existent, ou au sein des équipes des établissements et des professeurs de la circonscription de proximité.

1 — Voir le rapport Villani-Torossian : *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques* : https://www.education.gouv.fr/21-mesures-pour-l-enseignement-des-mathematiques-3242

2 — Quatre sujets sont particulièrement ciblés dans l'évaluation du Pisa 2022. Ils ne sont pas nouveaux par rapport aux catégories de contenus mathématiques, mais méritent une attention plus grande des équipes enseignantes de 3ᵉ et 2ᵈᵉ : phénomènes de croissance (variations et relations), approximation géométrique (espace et formes), simulations informatiques (quantité), prise de décisions conditionnelles (incertitude et données).

3 — https://www.iea.nl/fr/intro

Ce guide s'adresse donc aux professeurs de l'enseignement secondaire, mais aussi aux professeurs de l'école primaire et à leurs formateurs. Il aborde l'enseignement de la résolution de problèmes au collège dans les six premiers chapitres consacrés à des exemples mathématiques qui intègrent les six concepts clés du programme Pisa[4] et développe dans le chapitre 7 quelques démarches didactiques plus théoriques qui permettront aux enseignants de prendre du recul sur leurs pratiques.

Ce guide s'appuie sur des analyses mathématiques, épistémologiques et didactiques, mais aussi sur les résultats de la recherche sur l'enseignement des mathématiques et dans le domaine de la psychologie des apprentissages.

Les six premiers chapitres proposent donc à la fois des entrées historiques, des points de vue de chercheurs, des rappels de mathématiques, des encarts didactiques, parfois des focus, mais surtout des exercices qui ont été analysés systématiquement sous le même angle : pourquoi proposer ce genre de problèmes en classe, quels en sont les ressorts de continuité ou de progressivité, mais surtout quelles stratégies d'enseignement mettre en place concrètement ? Les analyses faites n'ont pas la prétention d'être exhaustives et les professeurs – dans le cadre des formations entre pairs – pourront avantageusement les compléter.

Les propositions d'exercices ont été sélectionnées afin de répondre à plusieurs objectifs :

— mettre en valeur le continuum didactique qu'il convient de promouvoir entre l'école primaire (particulièrement les classes de cours moyen) et les classes de collège, tant au sein des contenus mathématiques que dans l'organisation des formations à destination des professeurs ;
— dégager le chemin didactique qui amène, en prolongement de la résolution de problèmes arithmétiques à l'école primaire, à l'émergence de la variable algébrique au collège ;
— encourager le triptyque « manipuler, verbaliser, abstraire » à travers des problèmes de nature arithmétique ou faisant intervenir les grandeurs ;
— donner à la modélisation un rôle essentiel pour permettre à l'élève de s'engager, d'essayer, de se forger des représentations mentales qui lui permettront d'avancer dans la résolution de problèmes ;
— étayer les élèves de stratégies efficaces ;
— renforcer les liens entre les mathématiques et les compétences en esprit critique dans une perspective d'éducation citoyenne.

Ce guide complète les ressources institutionnelles déjà à disposition des professeurs, à savoir le programme de mathématiques, les documents ressources, les repères annuels de progression des cycles 3 et 4, les attendus de fin de cycle, les guides CP et CM sur le même sujet.

4 — Comprendre la quantité, les systèmes de numération et leurs propriétés algébriques ; comprendre le potentiel de l'abstraction et de la représentation symbolique ; reconnaître les structures mathématiques et leurs régularités ; reconnaître les relations fonctionnelles entre quantités ; recourir à la modélisation mathématique pour percevoir le monde réel ; voir la variation comme fondement de la statistique.

Plan du guide

L'introduction de ce guide aborde d'un point de vue généraliste la question de la résolution de problèmes en mettant en perspective, d'une part, les leviers d'apprentissage et d'autre part, des objectifs plus lointains, comme la formation des citoyens et le développement des compétences du XXI^e^ siècle.

Le chapitre 1 aborde des problèmes autour des **données et statistiques** qui mettent en jeu des capacités comme la lecture de graphiques, l'extraction de données, l'utilisation d'indicateurs statistiques pertinents (moyenne glissante) pour outiller les élèves et leur permettre de devenir des citoyens capables de comprendre et d'analyser les nombres qui les entourent.

Le chapitre 2 traite des problèmes mobilisant des notions autour des **nombres** telles que les ratios, les probabilités, les pourcentages ou les fractions que l'on retrouve souvent dans les évaluations internationales. La modélisation y tient une place particulière et permet de prendre en compte les discontinuités bien identifiées (statut de la lettre, sens du signe égal, etc.).

Le chapitre 3 aborde des problèmes qui mettent en avant le passage de l'**arithmétique** à l'**algèbre**, point de rupture didactique pour l'élève. Être en capacité de généraliser des expressions, reconnaître des structures, modéliser une situation par une expression algébrique ou une équation pour résoudre un problème sont des capacités attendues en fin de collège, mais qui se préparent dès l'école primaire.

Le chapitre 4 traite des **patterns**, un sujet peu présent dans les classes en France (bien que présent sous le vocable « suites organisées » à l'école primaire), alors que les patterns sont le socle de nombreuses évaluations dans le monde anglo-saxon. Rattachés à tort aux jeux de logique, ils sont en lien avec l'enseignement de l'algorithmique et développent les pensées algorithmique et algébrique chez les élèves.

Le chapitre 5 aborde des problèmes de **géométrie** dans ses rapports aux instruments (numériques, tracés) pour construire le raisonnement et aller vers la démonstration. Les problèmes de ce chapitre illustrent aussi des situations où ce qui est visible n'est pas suffisant pour raisonner juste ; il faut donc aussi imaginer et abstraire.

Le chapitre 6 traite des problèmes en lien avec les **grandeurs**, sujet clairement identifié dans les programmes de l'école et du collège. Les problèmes de ce chapitre visent à travailler, d'une part, les grandeurs indépendamment de leurs mesures et d'autre part, les grandeurs quotients dans le contexte linéaire ou non linéaire.

Le chapitre 7 a une vocation transversale. Son objectif est de donner aux enseignants un certain nombre de pistes destinées à mettre en œuvre des stratégies d'enseignement favorisant les transferts d'apprentissage par la résolution de problèmes.

Le guide se termine par une bibliographie.

Introduction

Un problème se caractérise par un état initial – la « situation-problème » –, un objectif à atteindre – la « solution » –, et des moyens à disposition pour atteindre cet objectif – des règles mathématiquement valides dont découlent des stratégies de résolution. La notion de problème suppose également celle d'obstacle : à la différence d'une activité automatisée ou des exercices d'entraînement, une personne face à un problème ne perçoit pas immédiatement de chemin de résolution. Il en résulte qu'un problème pour un élève et à un niveau scolaire donné ne reste pas nécessairement un problème (au sens des didacticiens) pour un autre élève ou à un autre niveau scolaire[5].

Résoudre des problèmes au collège : pourquoi et comment ?

Les mathématiques émergent historiquement à travers les problèmes eux-mêmes et il est essentiel, d'un point de vue didactique, de ne pas séparer l'un de l'autre, car l'activité de résolution de problèmes va bien au-delà d'une perspective applicative destinée à s'assurer que l'élève mobilise à bon escient une notion ou des stratégies étudiées durant la phase de cours. Elle participe pleinement à la construction même des notions et de leur ancrage : il serait vain, par exemple, de vouloir comprendre la notion de fonction sans vivre à travers les problèmes la puissance de cette notion elle-même. Ces apprentissages mathématiques bénéficient alors de l'engagement actif dans la tâche que la résolution de problèmes favorise. Ils bénéficient aussi des démarches réflexives autour des erreurs, ainsi que des retours d'informations reçus lors de tentatives de trouver la solution. L'engagement actif et le retour sur les erreurs sont deux piliers de l'apprentissage[6].

5 — Alan H. Schoenfeld, *Mathematical Problem Solving*, Academic Press Inc, 1985.
6 — Stanislas Dehaene, *Apprendre ! Les talents du cerveau, le défi des machines*, Odile Jacob, Paris, 2018.

Les temps de résolution de problèmes n'ont pas à être réservés à des moments particulièrement avancés d'un cours. Au contraire, la résolution de problèmes peut intervenir à tout moment, y compris dès les étapes introductives, sans attendre une maîtrise complète des notions du chapitre. Un problème peut être tout à fait adapté pour introduire de nouvelles notions. La résolution de problèmes donne du sens, permet d'apprendre et de vérifier ce qu'on a appris. L'engagement actif auquel elle incite peut aller de pair avec des temps d'explicitation de l'enseignant lors de moments d'institutionnalisation ou de mises en commun pour les élèves. Ainsi, cette activité se prête à l'articulation d'une recherche de solutions par les élèves avec des étayages de l'enseignant, comprenant des moments d'explicitation. Cette phase parfois négligée est indispensable pour les apprentissages des stratégies transférables, des propriétés pertinentes ainsi que pour la consolidation des connaissances : il est important de savoir ce que l'on apprend à travers les problèmes et de disposer d'une trace écrite exploitable par les élèves. Cela suppose que la résolution de problèmes et la construction de stratégies débutent en classe et non pas dans des situations où l'élève serait mis en situation inédite dans un cadre isolé. Pour les devoirs de réflexion en autonomie, cela indique aussi qu'il faut penser à la mise en place de points d'étapes avec les élèves : un devoir de réflexion est donc accompagné.

Plus généralement, l'accompagnement par l'enseignant est essentiel pour soutenir la compréhension des élèves, d'autant plus que l'interprétation d'un problème exerce une influence prépondérante dans sa résolution. En effet, qu'il soit verbal (les problèmes dits « à énoncé ») ou privilégiant d'autres modes de représentation (par exemple des tableaux, des schémas, des diagrammes), un problème fait l'objet d'une interprétation par le biais de concepts mobilisés par l'élève. Ces concepts sur lesquels l'élève s'appuie peuvent être des concepts mathématiques (par exemple une situation du champ multiplicatif), des concepts abordés par d'autres disciplines scolaires (par exemple la couche d'ozone) ou encore des concepts de la vie quotidienne (par exemple une situation d'achat)[7]. L'interprétation construite par l'élève va contraindre les stratégies de résolution qu'il est susceptible de mettre en œuvre, car seules seront accessibles les stratégies concordantes avec ses interprétations.

Or les interprétations construites par les élèves peuvent être en décalage avec la perspective adoptée par le concepteur du problème. De tels décalages sont fréquents, car un élève, en apprentissage, ne dispose pas toujours de conceptions suffisamment élaborées des notions mathématiques impliquées dans le problème à résoudre. La notion « d'angle mort de l'expertise[8] » traduit l'idée qu'il peut être difficile pour un enseignant, expert de son domaine, de percevoir les difficultés des élèves, car cela demande une difficile décentration.

7 — Emmanuel Sander, Jean-Francois Richard, *Les Apprentissages numériques*, in Raphaëlle Miljkovitch, Françoise Morange-Majoux, Emmanuel Sander (dir.), *Psychologie du développement*, p. 252-258, Elsevier-Masson, Paris, 2017.

8 — Mitchell Nathan, Anthony J. Petrosino, "Expert Blind Spot among Preservice Teachers", *American Educational Research Journal*, 40 (4), p. 905-928, 2003. Retrieved July 21, 2021, from http://www.jstor.org/stable/3699412

Les interprétations reflètent des catégorisations des situations-problèmes qui ont une pertinence dans la vie quotidienne, mais qui ne recouvrent que partiellement celles des notions mathématiques concernées. Par exemple, l'énoncé : « Combien de verres de 0,25 L puis-je remplir avec une carafe de 2 L ? » peut se catégoriser sur le plan des connaissances de la vie quotidienne comme un problème de multiplication lacunaire, ce qui amène l'élève à rechercher le nombre d'itérations nécessaires pour aboutir à la quantité totale (« par combien dois-je multiplier 0,25 pour trouver 2 ? »), alors que l'enseignant a conçu un problème de division. Ces décalages d'interprétation sont parfois compatibles avec l'atteinte de la solution, parfois conduisent à des erreurs. Par exemple, le même élève qui trouverait la réponse 8 par tâtonnement au problème précédent échouerait dès lors que la valeur de la contenance du verre serait non plus de 0,25, mais de 0,23. Il y a donc un fort enjeu à accompagner les élèves dans la construction d'interprétations qui soient en concordance avec les notions mathématiques travaillées sous peine de les voir en difficulté dès lors que des changements sur le plan mathématique rendent inefficaces les stratégies disponibles, comme dans cet exemple.

Prendre en compte la contrainte exercée par les conceptions intuitives

L'interprétation d'un problème est contrainte par les conceptions intuitives attachées aux notions mathématiques impliquées dans ce problème. Depuis les années 1980, de nombreux travaux ont en effet montré que les notions enseignées sont l'objet de conceptions reposant sur des connaissances familières, issues de la vie quotidienne et qui orientent la manière dont un élève se représente initialement une notion.

Il peut s'agir par exemple de l'idée que le signe égal sépare un processus du résultat de ce processus, qu'un ensemble est une collection de plusieurs objets, que soustraire, c'est chercher le résultat d'un retrait, qu'additionner, c'est chercher le résultat d'un ajout, que multiplier, c'est réaliser une addition répétée, que diviser, c'est rechercher la taille de la part dans un scénario de partage équitable ou encore qu'un nombre décimal est composé de deux nombres entiers séparés par une virgule, qu'une fraction est un rapport d'une partie sur une totalité[9]. De telles conceptions intuitives ont un champ de validité, c'est-à-dire un ensemble de situations pour lesquelles la référence à la conception intuitive conduit à la même conclusion que la référence à la notion scolaire. À l'intérieur de ce champ de validité, les problèmes vont être en général plutôt facilement résolus par les élèves, car la concordance entre la conception intuitive et la notion scolaire permet d'aboutir à la solution recherchée.

9 — Douglas Hofstadter, Emmanuel Sander, *L'Analogie - Cœur de la pensée*, chap. 7, « Les analogies naïves », Odile Jacob, Paris, 2013.

En revanche, hors du champ de validité de la conception intuitive, la difficulté de résolution va être accrue. Ainsi le fait que la conception intuitive de la multiplication soit l'addition répétée permet de comprendre pourquoi un problème comme « Si un litre d'essence coûte 1,27 euro, combien coûte 0,21 litre ? » est difficile à résoudre pour une majorité de collégiens, qui ont même tendance à poser une division, alors que la multiplication est systématiquement identifiée par les mêmes élèves lorsque 0,21 est remplacé par une valeur entière, par exemple lorsque le problème devient « Si un litre d'essence coûte 1,27 euro, combien coûtent 3 litres ?[10] ». Concernant la division, il a été montré que le problème « Avec 25 roses, combien de bouquets de 5 roses puis-je faire ? » est réussi par presque tous les élèves de collège, alors que la réussite chute pour un énoncé tel que « Je partage 5 kg de cookies entre 15 amis, combien chacun recevra-t-il ?[11] » (la majorité des élèves effectuent 15/5, cas stéréotypé du partage de 15 objets entre 5 individus). Il convient dans la même perspective de distinguer l'usage du terme scolaire par l'élève (par exemple « diviser », « fraction » ou « nombre décimal ») de sa conception personnelle de la notion (par exemple, respectivement, « partager équitablement », « rapport d'une partie sur une totalité », « deux nombres entiers séparés par un signe »).

En effet, les conceptions intuitives restent influentes y compris après enseignement. L'enseignement a prise sur elles, mais elles ne peuvent pas pour autant être purement éradiquées, si bien qu'il reste utile de prendre en compte leur influence, y compris bien après qu'elles ont été abordées en cours, car les situations qui se situent hors du domaine de validité de la conception peuvent conduire les élèves à des difficultés majeures. La conception intuitive de la division comme la recherche de la taille de la part persiste, y compris après enseignement, à faire obstacle à la possibilité d'imaginer une telle situation[12]. Par exemple, concevoir un énoncé de problème dans lequel une division « rend plus grand », au sens où le résultat est plus élevé que la valeur initiale, est un exercice difficile y compris pour de nombreux adultes. Ainsi des problèmes de quotition, pourtant aussi concrets que, par exemple, « Dans 1,5 mètre de tissu, combien peut-on découper de bandes de 0,14 mètre ? », sont rarement imaginés.

10 — Alan Bell, Malcolm Swann, Glenda Taylor, "Choice of Operation in Verbal Problems with Decimal Numbers", *Educational Studies in Mathematics*, 12, p. 399-420, 1981.

11 — Efraim Fischbein, Maria Deri, Maria Sainati Nello, Maria Sciolis Marino, "The Role of Implicit Models in Solving Verbal Problems in Multiplication and Division", *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, p. 3-17, 1985.

12 — Jacques Lautrey, Sylvianne Rémi-Giraud, Emmanuel Sander, Andree Tiberghien, *Les Connaissances naïves*, Armand Colin, Paris, 2008.

Il est donc nécessaire de travailler également, durant le cours, des situations de résolution de problèmes hors du champ de validité de la conception intuitive dans la mesure où celle-ci est limitante dans de nombreuses situations. Il pourra s'agir par exemple de soustraire pour trouver combien on a gagné, d'additionner pour trouver combien on avait au début, de multiplier ou de diviser par une valeur inférieure à 1, d'introduire une fraction dont le numérateur est plus grand que le dénominateur, etc. Cela implique de travailler au dépassement des limites imposées par la conception intuitive et d'accompagner la construction d'une conception plus large et concordante avec la notion mathématique. La modélisation (voir p. 18) de situations se situant, pour certaines, dans le champ de validité de la conception intuitive et hors de celle-ci, pour d'autres, est une manière de favoriser cet apprentissage.

Favoriser le transfert

Bien que l'on s'accorde généralement à considérer qu'un objectif majeur de l'enseignement est de décontextualiser des compétences, il est établi par ailleurs que le transfert entre problèmes qui reposent sur la même structure mathématique mais dont l'habillage varie est souvent pauvre[13]. Autrement dit, rien ne garantit que la stratégie mise en œuvre par un élève pour résoudre un problème dans un contexte donné se transfère à un autre contexte pourtant identique sur le plan de la structure mathématique. Or il est attendu de l'élève qu'il élabore une conception des notions étudiées qui ne le rende pas totalement dépendant d'une invitation de l'enseignant (« inspirez-vous de ce qu'on a fait avant la récréation ») ou de traits de surface partagés (« ah, c'est un problème de mélange ! »). Sinon, son autonomie serait extrêmement réduite et les échecs nombreux.

Un obstacle majeur au transfert tient à la relation entre la représentation du problème travaillé en cours et celle du problème à résoudre. Les élèves retiennent des problèmes résolus les propriétés qui leur ont servi à les interpréter, et ces mêmes propriétés sont ensuite des indices de récupération lors de la résolution d'un nouveau problème. Ainsi, les indices sur lesquels se fondent les élèves pour encoder un problème peuvent être très différents de ceux de l'expert ou de l'enseignant. Par encodage de la situation, on entend les propriétés perçues comme structurantes et pertinentes du point de vue de la personne qui résout et selon lesquelles elle va structurer sa représentation du problème. Un tel encodage contraint les stratégies de résolution envisageables et les possibilités de transfert.

13 — Miriam Bassok, Ling-Ling Wu, Karen L. Olseth, "Judging a Book by its Cover: Interpretative Effects of Content on Problem Solving Transfer", *Memory & Cognition*, 23, p. 354-367, 1995.

En effet, les encodages se font souvent selon des dimensions non pertinentes sur le plan mathématique, ce qui n'est pas surprenant, étant donné que lorsque les notions concernées sont peu acquises, d'autres indices, plus saillants mais moins pertinents sur le plan mathématique, peuvent venir se substituer. Ainsi, il a été montré que des élèves de collège à qui l'on demande de regrouper ensemble les problèmes mathématiquement reliés ont tendance à privilégier des aspects thématiques (par exemple, mettre ensemble des problèmes d'achat) plutôt que les principes de résolution (par exemple, un calcul de moyenne pondérée). Les critères de regroupement sont directement fonction de la performance scolaire : les élèves les plus performants s'appuient sur les principes de solution, alors que les moins performants privilégient des indices superficiels, non pertinents sur le plan mathématique[14].

Des travaux orientés spécifiquement sur le transfert d'apprentissage ont montré une tendance à réussir en priorité des problèmes présentant des traits de surface partagés avec un problème travaillé en classe et des échecs massifs lorsque le nouveau problème cesse de partager ces indices de surface avec le problème initial (par exemple, la stratégie de résolution d'un problème de calcul de concentration de solutions chimiques sera transférée avec succès vers un autre problème de mélange, mais rarement à un énoncé avec un habillage éloigné, tel que des calculs de rendement de comptes bancaires)[15]. La raison de ce phénomène est que là où l'enseignant perçoit la structure mathématique du problème, l'élève s'appuie sur d'autres indices, parfois peu pertinents, pour évoquer une situation déjà rencontrée, ce qui le conduit à ne pas évoquer la stratégie appropriée lorsqu'il rencontre un problème éloigné sur le plan des indices de surface qui pourtant partage la structure de solution d'un problème déjà travaillé en classe.

Un enjeu essentiel est donc que les élèves n'encodent pas les énoncés travaillés en classe selon les seuls traits superficiels, ce qui les mettrait en échec dès lors qu'un nouveau problème cesserait de partager l'habillage du problème d'entraînement, mais qu'ils soient en mesure de repérer des propriétés qui sont pertinentes sur le plan mathématique : c'est dans ce cadre que le professeur joue un rôle essentiel. Une manière d'améliorer la qualité de l'encodage est d'amener les élèves à résoudre des problèmes qui partagent le même principe mathématique mais sont dissociés sur le plan des traits superficiels. Cela laisse la possibilité d'évaluer si les élèves qui ont travaillé un principe dans un certain contexte ont suffisamment saisi les dimensions pertinentes pour mettre en œuvre les mêmes principes mathématiques dans des contextes superficiellement différents[16]. Par exemple, un énoncé tel que « Je paie 3 € pour 7 kg de tomates.

14 — Edward A. Silver, "Recall of Mathematical Problem Information: Solving Related Problems", *Journal of Research in Mathematical Education*, 12, p. 54-64, 1981.
15 — Stephen K. Reed, "A Structure Mapping Model for Word Problems", *Journal of Experimental Psychology: Learning Memory and Cognition*, 13, p. 124-139, 1987.
16 — Emmanuel Sander, « La résolution de problèmes arithmétiques à énoncés verbaux », Anae (approche neuropsychologique des apprentissages chez l'enfant), 156, 611-619, 2018.

Quel est le prix de 5 kg de tomates ? » conduit à un encodage de la situation concordant avec la procédure de règle de trois dans la mesure où l'on va rechercher successivement le prix d'un kilogramme de tomates $\left(\frac{3}{7}\text{€}\right)$ puis multiplier par la quantité recherchée (x 5). Un tel problème sera souvent bien résolu par les élèves, mais il sera intéressant de travailler également un énoncé tel que « 3 pastèques pèsent 7 kg. Combien faut-il acheter de pastèques pour totaliser un poids de 5 kg ? », qui est susceptible de poser des difficultés dans la mesure où l'on est tenté de chercher en premier lieu le poids moyen d'une pastèque ($\frac{7}{3}$ kg), alors que c'est la quantité de pastèque par kilogramme qui est la donnée pertinente.

Dans cette perspective, il a régulièrement été introduit dans les chapitres du guide, en sus des énoncés dont la résolution est développée, un ou plusieurs autres qui sont de même nature sur le plan des principes mathématiques en jeu et de la démarche de résolution, mais éloignés sur le plan des traits superficiels.

Mobiliser les quatre piliers de l'apprentissage

Les activités de résolution de problèmes offrent la possibilité de mobiliser et de bénéficier des quatre piliers de l'apprentissage que sont l'attention, l'engagement actif, le retour sur l'erreur et la consolidation[17]. L'attention est évidemment nécessaire, et, comme cela a été souligné au début de cette introduction, l'engagement actif est favorisé par les activités de résolution de problèmes. L'élève est en effet mis en position de recherche active de la solution, est amené à s'interroger, à remettre en cause ses interprétations premières, à approfondir ses premières analyses, à partager ses réflexions lors de moments de mises en commun.

Le retour sur l'erreur est également essentiel en résolution de problèmes. En rendant possible la prise de conscience du décalage entre les propres attentes de l'élève et les conséquences de ses actions, cela favorise une remise en cause et une évolution de ses conceptions ou de ses stratégies pour se retrouver plus en phase avec le retour de l'environnement. Il s'agit d'un retour d'expérience qui permet à l'élève de chercher à sortir de l'impasse dans laquelle il est susceptible de se trouver si son interprétation du problème est inappropriée ou s'il échoue à mobiliser une stratégie pertinente. Ce retour sur l'erreur peut être soutenu par des phases d'explicitation de l'enseignant relatives aux caractéristiques mathématiquement pertinentes de la situation. On rappelle dans cette introduction l'utilité d'activités régulières avec retour systématique sur le produit de cette activité et l'intérêt que les activités soient

17 — Stanislas Dehaene, *op. cit.*, p. 11.

distribuées de manière régulière. Un temps « aggloméré » peut être utile, notamment pour les élèves les plus fragiles, au moment où une nouvelle connaissance s'installe, mais elle sera toujours suivie de retours fréquents.

Le travail de consolidation n'est pas moins crucial en résolution de problèmes que dans d'autres activités mathématiques. En effet, il s'agit progressivement de se décharger d'aspects coûteux cognitivement de l'activité afin de libérer des ressources et d'être en mesure de centrer sa recherche sur les aspects plus conceptuels et plus propres au problème à résoudre. Les automatismes facilitent la résolution de problèmes, qui elle-même donne du sens aux notions. Ainsi, il s'agit de favoriser, par la pratique de la résolution de problèmes, le développement d'une reconnaissance de plus en plus directe des types de problèmes rencontrés et des stratégies efficientes pour les résoudre. Les élèves apprennent de cette manière à articuler des automatismes avec la résolution de problèmes. Ces automatismes peuvent se manifester sur différents plans, qu'il s'agisse d'aspects calculatoires, qui peuvent avoir été travaillés aussi durant les phases de cours, ou d'activités de modélisation (voir le paragraphe ci-dessous) pour lesquelles le codage des situations deviendra de moins en moins coûteux. Lors de la fréquentation des différents types de problèmes dans des contextes variés, l'écrit institutionnalisé (ce qu'il faut retenir, comprendre, apprendre) constitue un corpus de connaissances et de procédures automatisées, immédiatement disponibles en mémoire, contribuant au développement de l'autonomie des élèves en résolution de problèmes.

Considérer la modélisation comme une stratégie dans la résolution de problèmes

La modélisation constitue un enjeu et un soutien majeur aux apprentissages mathématiques et doit se construire de manière cohérente entre l'école primaire et le collège pour créer le continuum didactique utile aux apprentissages. Elle consiste à représenter en faisant apparaître les relations mathématiques entre les données d'un problème ; c'est en quelque sorte une représentation dans laquelle on peut faire du calcul et mener des raisonnements. Il s'agit d'une activité de codage du problème partagée au sein du collectif de la classe, qui favorise la prise de conscience des relations mathématiques qui lient les données – un des six concepts clés développés pour Pisa[18]. La modélisation conduit donc l'élève à inscrire l'énoncé dans le format du modèle, ce qui peut aider à rendre accessibles les stratégies de résolution associées aux différents cas de figure possibles à l'intérieur du modèle. Un modèle n'a pas vocation à représenter une situation dans sa diversité et sa complexité, mais à circonscrire les éléments pris en considération dans le problème à certaines caractéristiques pertinentes sur le plan mathématique, sur lesquelles prend appui le processus de résolution.

18 — Voir plus loin le paragraphe sur les compétences du XXIe siècle, p. 21.

Qu'il s'agisse de s'appuyer sur la modélisation en barres, sur les nombres rectangles[19] ou sur d'autres modélisations, l'enjeu pour l'élève est d'aller au-delà de l'interprétation première de la situation présentée, qui peut s'avérer inappropriée, pour élaborer une stratégie opportune de résolution, et de la coder selon un formalisme plus pertinent sur le plan mathématique. Par exemple, la conception intuitive de la multiplication comme une addition répétée rend difficile de saisir la propriété de commutativité, car il n'y a rien d'intuitif à ce que « a fois le nombre b soit égal à b fois le nombre a » ; en revanche, une modélisation par un nombre rectangle met en avant la commutativité dans la mesure où l'aire du rectangle demeure inchangée quel que soit le statut de a et de b dans l'énoncé. L'importance de travailler la modélisation découle de la difficulté de passer du registre des représentations à celui du calcul[20]. Il s'agit donc pour les élèves de représenter la situation dans un format qui mette en avant les propriétés mathématiquement pertinentes et dont peut découler une résolution.

Pour l'enseignant, placer l'emphase sur la modélisation dans les activités de résolution de problèmes permet de s'assurer que les élèves sont en mesure d'adopter un codage pertinent de la situation sur le plan mathématique et de s'engager dans la résolution. Cela permet également de faciliter le transfert d'apprentissage dans la mesure où une modélisation commune de deux énoncés qui diffèrent par leur habillage rend explicite la structure mathématique partagée et les similitudes des stratégies de résolution. La modélisation élaborée par un élève face à un problème qui lui est présenté rend possible de repérer si les difficultés rencontrées relèvent de la modélisation proprement dite ou davantage de l'élaboration des stratégies de résolution sur lesquelles la modélisation s'appuie. Si la modélisation est pertinente, les difficultés sont de l'ordre de la mise en œuvre de la procédure de résolution ; elles peuvent par exemple relever de difficultés calculatoires. En revanche, une modélisation inadéquate est indicatrice de difficultés de codage de la situation et appelle un travail de mise en lien de l'interprétation première de l'élève avec le modèle. La modélisation réalisée par l'élève peut avoir également une visée diagnostique pour l'enseignant ; elle est en effet informative d'éventuelles incompréhensions qui ont conduit cet élève à des choix représentationnels en décalage par rapport aux modélisations mathématiquement pertinentes.

Le recours à une représentation n'a pas vocation à perdurer. Cela rejoint la problématique récurrente du désétayage : certaines représentations finissent par devenir optionnelles lorsque les apprentissages sont suffisamment ancrés. Il s'agit en effet d'installer des représentations en cohérence avec les propriétés mathématiques que l'enseignant souhaite voir émerger dans les situations travaillées, afin d'améliorer la compréhension des notions traitées et rendre disponibles des stratégies de résolution adéquates. Lorsque la consolidation des apprentissages est suffisante, le recours au modèle peut alors cesser.

Dans ce guide, la modélisation dans la résolution des problèmes est considérée comme une stratégie d'enseignement.

19 — Produits de deux entiers strictement plus grands que 1 (nombres composés).

20 — Raymond Duval, « Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée », 1993 : https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/ST/IST93004/IST93004.pdf

Contribuer à la formation d'un esprit citoyen

La résolution de problèmes dans des contextes de la vie quotidienne offre l'occasion de montrer l'utilité pratique des mathématiques. Elle contribue aussi au développement de l'esprit critique des élèves dans une perspective d'éducation citoyenne : « L'enseignement mathématique permet justement aux élèves d'acquérir les compétences nécessaires pour interpréter correctement les données, les représentations graphiques ou les affirmations sur les risques qui abondent dans les médias. En cela, il nourrit leur esprit critique en leur fournissant des outils pour évaluer de manière fiable les informations proposées sous forme quantitative ou visuelle[21]. »

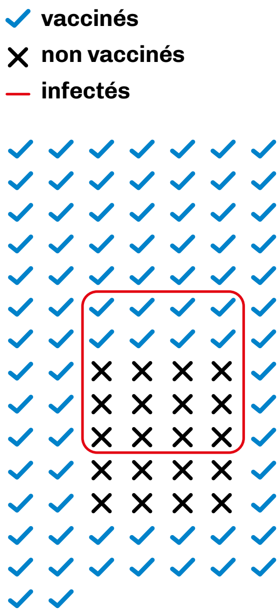
Il s'agit notamment pour les élèves d'aboutir à une approche mieux informée en contrant certains biais cognitifs qui conduisent, du fait d'interprétations inadéquates de données statistiques, à des jugements et des prises de décision erronés relatifs à des phénomènes sociétaux. Par exemple, le biais de ratio se traduit par une prise en compte, dans une fraction, non pas du seul rapport entre deux nombres, mais de la grandeur même des nombres au numérateur et/ou au dénominateur. Le biais de ratio conduit par exemple à estimer à tort que 38/112 est plus grand que 5/12, sous l'influence du fait que 38 et 112 sont tous deux de grands nombres par rapport à 5 et à 12. Il donne également l'impression erronée qu'un événement qui se produit 5 fois par semaine est plus rare qu'un événement qui se produit 200 fois par année.

Les problèmes travaillés dans ce guide, relatifs aux fractions, à la proportionnalité et aux ratios, contribuent à contrer ce biais par une meilleure compréhension des fractions.

Un autre biais influençant l'interprétation des statistiques est la négligence du taux de base. Ce biais conduit à ignorer les conséquences du fait que différents échantillons sont inégalement répartis dans une population. Par exemple, saisir que l'affirmation « 40 % des personnes infectées sont vaccinées » est compatible avec une grande efficacité d'un vaccin, demande d'aller à l'encontre de ce biais de négligence du taux de base. En effet, si on imagine par défaut une population dans laquelle il y a autant de personnes vaccinées que non vaccinées, l'avantage d'être vacciné paraît faible (40 % contre 60 %).

21 — *Éduquer à l'esprit critique – Bases théoriques et indications pratiques pour l'enseignement et la formation.* Publication du Conseil scientifique de l'éducation nationale : https://www.reseau-canope.fr/fileadmin/user_upload/Projets/conseil_scientifique_education_nationale/Ressources_pedagogiques/VDEF_Eduquer_a_lesprit_critique_CSEN.pdf

Le schéma ci-dessous illustre le fait que le raisonnement précédent est fallacieux lorsque les personnes vaccinées et non vaccinées sont réparties de manière bien plus inégale, par exemple dans une population à l'intérieur de laquelle 80 % des individus sont vaccinés.



Ce graphique permet de voir que 8 individus sur les 80 vaccinés sont infectés, soit 10 % des vaccinés, contre 12 individus sur 20 non vaccinés soit 60 % des non vaccinés. Des calculs directs de rapports de proportions permettent aux élèves d'aller au-delà de la conclusion hâtive, car dans ce cas de figure les chances d'être infectés sont 6 fois plus importantes si l'on n'est pas vacciné que si on l'est $\left(\frac{60\,\%}{40\,\%} \times \frac{80\,\%}{20\,\%}\right)$. Et si 95 % de cette population était vaccinée, l'affirmation « 40 % des personnes infectées sont vaccinées », qui semble pourtant toujours aussi inquiétante, se traduirait en fait par le constat qu'il y a cette fois près de 30 fois plus de risque pour une personne d'être infectée si elle est non vaccinée que si elle est vaccinée $\left(\frac{60\,\%}{40\,\%} \times \frac{95\,\%}{5\,\%}\right)$[22]. Il peut aussi être intéressant de travailler avec les élèves l'affirmation que dans une population intégralement vaccinée, 100 % des infectés sont vaccinés, ce qui est compatible avec tout niveau d'efficacité du vaccin.

Dans les différents chapitres de ce guide, a été soulignée la diversité des contextes où les mathématiques contribuent au développement de l'esprit critique et à la formation d'un esprit citoyen.

Développer les compétences du XXI^{e} siècle[23]

Les six compétences mathématiques que l'on retrouve dans les programmes français de l'école primaire au lycée (chercher, modéliser, représenter, calculer, raisonner et communiquer) sont travaillées à travers la résolution de problèmes avec l'objectif de développer des compétences transversales pérennes et transférables au-delà des mathématiques (par exemple, savoir utiliser l'information, communiquer clairement et de manière synthétique).

22 — C'est la notion de l'odd-ratio largement utilisée dans les études de biais.

23 — « Le futur de l'éducation et des compétences », Projet Éducation 2030 de l'OCDE : https://www.oecd.org/education/OECD-Education-2030-Position-Paper_francais.pdf

Le développement des compétences langagières (présenter, argumenter, démontrer) est essentiel pour le citoyen : à travers la résolution de problèmes, l'élève construit son parcours de l'oralité tout au long de sa scolarité. La qualité de l'expression orale au sein de la classe – la verbalisation dans un premier temps, le débat mathématique dans un second temps – doit donc être un point de vigilance de la part des enseignants, pour contribuer, à travers les mathématiques, à l'acquisition de ces compétences par tous.

Les piliers de l'apprentissage (l'attention, l'engagement actif, le retour sur l'erreur, la consolidation), lorsqu'ils sont repérés par l'élève et l'enseignant, contribuent aussi aux compétences du XXI^e^ siècle, comme la prise d'initiative et la persévérance. Par exemple, la simple activité d'ordonner une liste raisonnablement longue de données (pour repérer une médiane), peut paraître sans intérêt voire décourageante si on ne dispose pas d'un logiciel ou que les données ne sont pas numérisées. Cependant, cette activité met en évidence, au-delà de la nécessaire persévérance, la nécessité de construire des stratégies efficaces qui renvoient à des activités algorithmiques comme le tri rapide, ou savoir disposer ses données en sous-catégories plus facilement traitables renvoyant au second principe de la *Méthode* de Descartes[24]. Enfin, la créativité et le raisonnement critique, quant à eux, sont au cœur de l'activité même mathématique et sont particulièrement illustrés dans la résolution de problèmes.

De plus, le cadre Pisa[25] place « la capacité de raisonner logiquement, de présenter des arguments de manière honnête et convaincante comme une compétence majeure dans le monde d'aujourd'hui ». La contribution des mathématiques y est essentielle, car « les élèves apprennent que si leur raisonnement et leurs hypothèses sont corrects, ils peuvent arriver à des résultats dont ils seront assurés de l'exactitude dans un vaste éventail de contextes de la vie de tous les jours ». Cette démarche contribue bien évidemment à la citoyenneté en construction, mais plus encore à l'autonomie à travers le raisonnement, car les conclusions du raisonnement mathématique sont « impartiales et n'ont nullement besoin d'être validées par une autorité externe ».

Aux côtés des compétences mathématiques, le programme Pisa précise six concepts clés qui structurent le raisonnement mathématique en lien avec ces compétences du XXI^e^ siècle, qui résonnent à travers les contenus des programmes du collège et la résolution de problèmes[26].

Les chapitres de ce guide prennent en compte ces concepts clés.

---

24 — « Diviser chacune des difficultés que j'examinerai, en autant de parcelles qu'il se pourrait et qu'il serait requis pour les mieux résoudre », second principe de la *Méthode*.

25 — https://pisa2022-maths.oecd.org/fr/

26 — Comprendre la quantité, les systèmes de numération et leurs propriétés algébriques ; comprendre le potentiel de l'abstraction et de la représentation symbolique ; reconnaître les structures mathématiques et leurs régularités ; reconnaître les relations fonctionnelles entre quantités ; recourir à la modélisation mathématique pour percevoir le monde réel ; voir la variation comme fondement de la statistique.

I

Données et statistiques

Les problèmes de ce chapitre visent à outiller les élèves afin d'en faire des citoyens capables de comprendre et analyser les données qu'ils rencontrent et l'utilisation qui en est faite dans les médias. La résolution de problèmes et la mobilisation des six compétences mathématiques sont incontournables dans ce thème, qui ne saurait se résumer au calcul d'indicateurs et à la représentation de données. Par ailleurs, l'utilisation d'un tableur permet de traiter des données réelles et nombreuses qui donnent tout leur sens à ces études, tout en sensibilisant les élèves à l'utilité des statistiques dans la vie courante et dans de nombreux domaines (écologie, consommation, etc.).

Entrée historique

Commerce, argent et démographie[27]

On situe vers le XIIIe ou le XIVe siècle le développement de l'assurance maritime. Les navires au long cours transportaient alors des cargaisons de plus en plus importantes et précieuses, tout en étant soumis à des risques non négligeables de naufrage ou de piratage. Diverses formules d'assurance ont alors vu le jour pour limiter les pertes, ce qui demandait de dresser les listes des navires perdus et des navires arrivés à bon port pour évaluer correctement les risques à partager entre plusieurs partenaires. D'autres exemples de recueil de données existent depuis l'Antiquité, notamment des recensements de personnes et de biens par des États dans le but de déterminer le montant des impôts.

Cependant, c'est à John Graunt (1620-1674)[28], un riche mercier londonien, que l'on attribue le premier traité de démographie mathématique, c'est-à-dire le premier travail dans lequel on effectue des calculs sur des données brutes pour en tirer de l'information.

27 — Contributions de Christine Proust, Marc Moyon, Dominique Tournès, Éric Vandendriessche.
28 — John Graunt, *Natural and Political Observations* [...] *made upon the Bills of Mortality*, Roycroft, London, 1662.

À partir des bulletins de mortalité qui avaient été dressés à Londres pour recenser les morts de la peste et des registres paroissiaux répertoriant les naissances, mariages et décès, Graunt a effectué les premières études statistiques sur la proportion de morts dus à la peste ou à d'autres causes, le nombre moyen d'enfants par ménage, le rapport du nombre de garçons et du nombre de filles à la naissance, ou encore l'évaluation de la population de Londres et de sa croissance en l'absence de recensement.

Un autre personnage important dans l'histoire de la statistique est William Playfair (1759-1823)[29], ingénieur et économiste écossais, qui a eu l'idée de représenter les données numériques par des grandeurs géométriques qui leur sont proportionnelles, afin de les rendre plus facilement perceptibles. Dans ses ouvrages, on trouve les premières apparitions connues d'un diagramme en bâtons (voir figure 1) et d'un diagramme circulaire (voir figure 2).

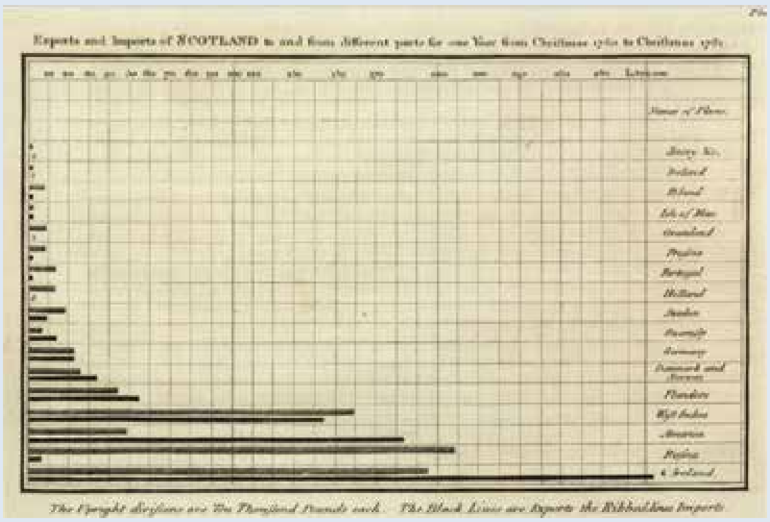


Figure 1. Diagramme en bâtons de William Playfair représentant les exportations et importations de l'Écosse vis-à-vis des autres pays.

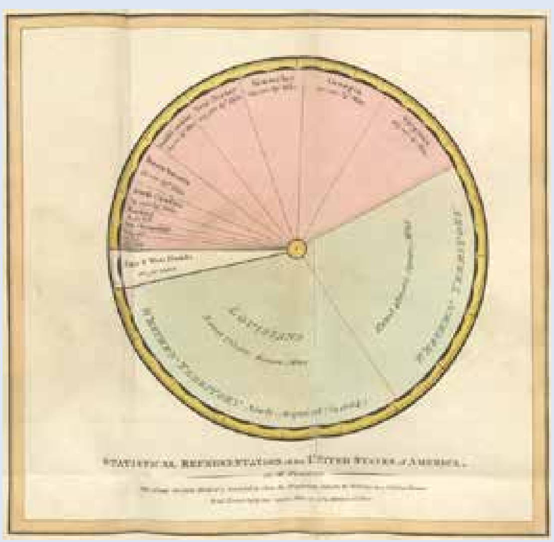


Figure 2. Diagramme circulaire de William Playfair traduisant les surfaces relatives des États des États-Unis.

29 — William Playfair, *The Commercial and Political Atlas*, Burton, London, 1786 ; *The Statistical Breviary*, Bensley, London, 1801, trad. fr. par Francois-Denis Donnant, *Éléments de statistique*, Batilliot et Genets, Paris, an XI (1802).

Point sur la recherche[30]

Au quotidien, les élèves sont entourés de multiples données issues de divers médias ou des différentes disciplines enseignées. Il apparaît nécessaire que l'enseignement de la statistique « contribue à former l'enfant en tant que futur citoyen à la littératie numérique[31] ».

Que les élèves soient confrontés à une démarche statistique dans son ensemble est important afin qu'ils s'interrogent sur la nature des données à recueillir dès la conception de l'enquête, à leur dépouillement, à leur traitement (choix des outils numériques, d'organisation et de représentation des données) ; c'est un levier pour l'enseignement. Choisir des indicateurs, interpréter des données développent un regard critique. L'enquête peut s'appuyer sur des grandeurs et ainsi interroger la nature du protocole et l'incertitude de la mesure. C'est l'occasion d'observer la variabilité des données, étape indispensable selon Yves Chevallard et Floriane Wozniak : « La vision statistique conduit à regarder les objets du monde naturel ou social, non comme le siège de grandeurs fixes, mais de grandeurs variables[32]. »

Nos résultats de recherche portent sur le travail de l'enseignant sur la simulation d'expériences aléatoires[33]. La simulation, qui fournit des données, relie les probabilités et la statistique via l'approche fréquentiste des probabilités. Si des expériences aléatoires peuvent être réalisées à la main, les simulations ont une importance croissante grâce aux logiciels disponibles. En séance de *lesson study* adaptée[34], nous avons proposé le « jeu du lièvre et de la tortue » à des enseignants[35] : une course se passe entre un lièvre et une tortue sur un parcours à six cases. On lance un dé, s'il tombe sur six, le lièvre a gagné, sinon, la tortue avance d'une case. Qui a le plus de chance de gagner ?

---

30 — Contribution de Blandine Masselin.

31 — Carmen Batanero, Jeanne Fine, Jean-Pierre Raoult, « Le curriculum statistique dans le secondaire : comparaisons internationales », *Statistique et Enseignement*, 4(1), p. 1-4, 2013.

32 — Yves Chevallard, Floriane Wozniak, « Enseigner la statistique : un problème de la profession », in Actes du 14e colloque de la Corfem [commission inter-Irem de recherche sur la formation des enseignants de mathématiques du second degré], Antony Val de Bièvre, site de l'IUFM de Versailles, 21-22 Juin 2007.

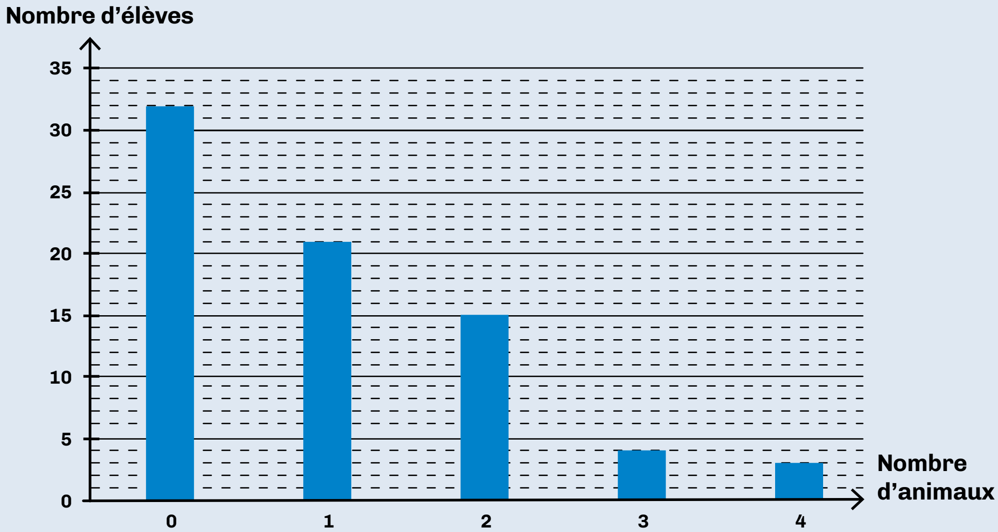
33 — Blandine Masselin, *Étude du travail de l'enseignant autour de la simulation en classe de troisième et seconde : métamorphose d'un problème au fil d'une formation en probabilité*, thèse de doctorat, université Paris-Diderot, 2019 : http://www.theses.fr/240200012

34 — Blandine Masselin, Charlotte Derouet, « Sur la mise en évidence des effets d'une formation courte sur les pratiques d'enseignants autour de la simulation en probabilité en classe de troisième », in Maha Abboud, « Mathématiques en scènes, des ponts entre les disciplines », 198-207, 2019, université de Cergy-Pontoise, France, octobre 2018.

35 — Cahier de *lesson study* accessible sur le site de l'institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques (Irem) de Rouen : https://irem.univ-rouen.fr/cahiers-de-ls

Cette situation peut donner lieu à des simulations (langage de programmation, tableur). Nos travaux[36] ont révélé l'importance d'identifier les modèles probabilistes sous-jacents lors de la simulation ainsi que l'impact de logiciels utilisés.

Problème 1. Nos amis les bêtes



Doc. Les animaux de compagnie des élèves de 6ᵉ.

Énoncé

On a demandé aux élèves des trois classes de 6ᵉ du collège Anatole France combien d'animaux de compagnie vivaient avec eux. On a représenté les résultats dans le diagramme suivant.

QUESTIONS. NIVEAU CYCLE 3

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.
a. 21 élèves ont un seul animal de compagnie.
b. Il y a 75 élèves en 6ᵉ au collège Anatole France.
c. Les élèves qui ont deux animaux de compagnie sont trois fois plus nombreux que les élèves qui ont trois animaux de compagnie.
d. 70 élèves ont moins de trois animaux de compagnie.
e. Plus de la moitié des élèves ont au moins un animal de compagnie.

36 — Blandine Masselin, « Dynamique du travail mathématique en classe entre un enseignant et des groupes d'élèves sur la simulation en probabilité : une étude de cas », *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 25, p. 49-88, 2020.

QUESTIONS. NIVEAU CYCLE 4 (ENVISAGEABLES DÈS LA CLASSE DE 5e)

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.
a. 32 élèves n'ont aucun animal de compagnie.
b. La plupart des élèves ont plusieurs animaux de compagnie.
c. Plus de 75 % des élèves ont au moins un animal de compagnie.
d. Les élèves ont un animal de compagnie en moyenne.
e. Parmi les élèves qui ont au moins un animal de compagnie, la moitié en ont plusieurs.

Mots-clés

Maîtrise de la langue, lecture graphique, interprétation de données et usage d'indicateurs statistiques avec prise d'initiative, chercher, raisonner, communiquer.

Pourquoi ce problème ?

Ce n'est pas un simple problème de lecture de données. Il présente un double enjeu : un premier centré sur la compréhension de l'affirmation proposée et un second sur la sélection des données utiles à la réponse.

On peut dégager trois temps dans cet exercice :

Compréhension
de la formulation
de la phrase

Traitement
Mise en lien du sens
de la phrase
et du contenu
du diagramme

Communication
Argumentation

Le travail sur le langage spécifique utilisé en mathématiques, au cœur de ce problème, est central dans l'argumentation (orale ou écrite). Il est attendu des élèves une explicitation de leur raisonnement. Un débat argumentatif peut être instauré au sein de la classe.

La première question permet de vérifier la bonne compréhension de la lecture du graphique (cette question peut éventuellement être remplacée par une indication de lecture du graphique, du type « on peut lire que 21 élèves ont un seul animal de compagnie »).

Ressorts de continuité ou éléments de progressivité

L'exploitation de données numériques présentées sous diverses formes (tableaux ou graphiques) apparaît très tôt dans la scolarité. Dès la classe de CE2, on enseigne aux élèves à prélever des informations sur des représentations graphiques et à les exploiter. Par exemple, il peut être demandé aux élèves de fin de cycle 2 de lire, sur une courbe donnant les températures en fonction des jours de la semaine, la température la plus haute, la plus basse, l'écart maximal de température, le jour pour lequel la température est la plus chaude, etc. Ce travail mené en fin de cycle 2 permet d'installer les bases de la lecture graphique qui sera poursuivie jusqu'à la fin du cycle 4 sur des représentations graphiques de plus en plus complexes.

Ce problème peut être proposé du cycle 3 au cycle 4. Il peut être décliné en modifiant les affirmations, le type de diagramme proposé ou le contexte, qui doit malgré tout rester proche de l'environnement des élèves afin de ne pas ajouter une difficulté supplémentaire.

En cycle 3, on insistera davantage sur le vocabulaire : moitié, quart, triple, deux fois moins que, deux fois plus, etc. On pourra aussi débuter un travail sur les pourcentages simples (25 %, 50 %, 10 %) en faisant le lien entre fraction et pourcentage[37].

En cycle 4, le lien pourra être fait entre vocabulaire et indicateurs statistiques (la plupart de, etc.) et aussi avec les pourcentages (augmentation, diminution, etc.).

Stratégies d'enseignement

Ce problème peut être présenté à divers moments de la séance et sous plusieurs modalités (seul, en binôme ou en groupe afin de favoriser le débat et la communication).

Au cycle 3, un tel problème pourra présenter des difficultés de lecture graphique. Tout d'abord, il s'agira d'identifier les grandeurs en jeu sur les axes, mais aussi de mettre en relation ces deux axes pour la lecture des données sur les barres. Ensuite, les élèves devront relier le texte avec le graphique et sélectionner les informations utiles à la réponse. Enfin, la compréhension de certaines formulations (par exemple : « trois fois plus ») peut être délicate et nécessite une attention particulière. Au-delà de ces formulations, la compréhension de la phrase dans sa globalité est nécessaire. La reformulation est une étape primordiale pour les élèves en difficulté face à ce problème. Pour lever les doutes, le professeur pourra préciser que l'épaisseur des barres n'a pas d'importance.

37 — Voir le paragraphe intitulé : « Mathématiques. Les pourcentages au cœur de la citoyenneté », p. 46.

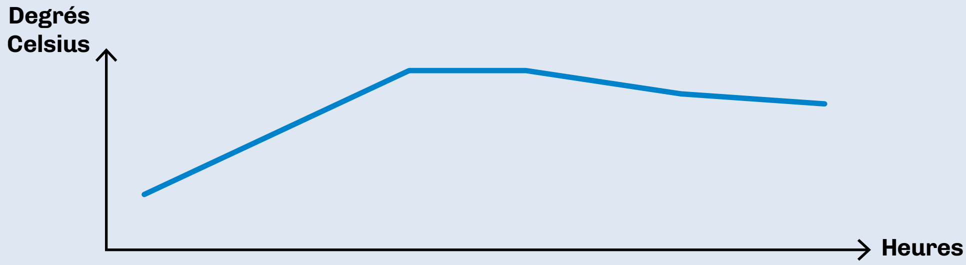
Avant de rédiger leurs réponses, les élèves devront au préalable mener un raisonnement et comprendre ce que signifie justifier une affirmation dans un tel problème. Les justifications attendues pourront facilement être différenciées : justification orale, non rédigée (écrit intermédiaire) ou complètement rédigée. En cycle 3, la justification orale sera une manière efficace de lever la barrière de l'écrit qui pourrait décourager des élèves en difficulté à s'engager dans la tâche proposée. Petit à petit, il sera important de les amener à structurer leur réponse et à ordonner leurs arguments pour ensuite faire le lien vers l'écrit. Les premiers écrits pourront être maladroits et peu structurés, et il sera alors important de garder une trace écrite de plusieurs justifications construites avec l'ensemble de la classe, qui constitueront un ensemble de modèles sur lesquels les élèves pourront prendre exemple. Progressivement, on encouragera les élèves à rédiger leur réponse. Il pourrait être demandé, dans un premier temps, de justifier une seule des réponses à l'écrit, chaque élève choisissant celle qui lui semble la plus accessible. La compétence « communiquer » est au cœur de ce travail de justification. Le vocabulaire précis permettra à chacun de se faire comprendre et de comprendre l'autre.

Dans les questions de niveau cycle 4, un enjeu porte sur le lien à construire entre l'utilisation de formulations courantes plus complexes comme « la plupart », « au moins un », « aucun », qu'il convient de traduire en langage mathématique. Dans l'affirmation c., il faudra non seulement comprendre la phrase, mais aussi mener à bien des calculs liés au pourcentage. Enfin, l'affirmation e., plus complexe, montre toujours l'importance des reformulations pour comprendre les affirmations. Il pourra être utile de proposer des exemples plus simples pour les élèves en difficulté.

Problème 2. L'allure de la courbe

Énoncé

Que pourrait représenter ce graphique à propos d'une salle de classe ?
Le décrire avec le plus de précision possible. Justifier et compléter le graphique.



Mots-clés

Gestion de données, lecture et interprétation graphique, grandeurs, chercher, raisonner, communiquer.

Pourquoi ce problème ?

Ce problème peut être proposé dès la classe de 6e. Le contexte choisi est très familier aux élèves. Pour résoudre cet exercice, les élèves devront utiliser leurs connaissances de leur environnement (la salle se réchauffe à cause du chauffage, du soleil, de la présence des élèves, etc.).

Contrairement aux exercices habituels, le graphique proposé dans ce problème ne donne aucune information chiffrée. Le premier objectif est alors de faire formuler aux élèves ce dont il est question en nommant les grandeurs en jeu et en les reliant. Le second est de leur faire analyser une évolution, en distinguant des phases que l'on compare entre elles pour affiner l'analyse. Il s'agit donc d'une lecture graphique globale.

Les compétences « chercher » (prélever les informations utiles, observer), « raisonner » (pour justifier ses affirmations) et « communiquer » (pour expliquer son raisonnement en utilisant un vocabulaire adapté) sont mises en œuvre dans cette résolution de problèmes.

Ressorts de continuité ou éléments de progressivité

Les différents niveaux de précision possibles dans l'analyse et le vocabulaire employé (grandeurs nommées, expression « en fonction de », « évolution », « croissante », « constante », etc.) permettent une différenciation, mais ces éléments sont tous travaillés dès le cycle 3. Au cycle 4, ce type de travail est primordial pour l'étude graphique des fonctions. Il fournit en effet des images mentales fortes de ce qu'est la représentation graphique de deux grandeurs qui sont liées et qui évoluent. On pourra rapprocher ce type de travail des problèmes où l'on demande aux élèves de choisir le graphique le plus adapté pour représenter une situation décrite préalablement dans un texte parmi les quelques-uns que l'on propose.

Stratégies d'enseignement

La production attendue est un texte court et rédigé, qui décrit les variations de la courbe et le lien existant entre les deux grandeurs présentes.

L'objectif principal de cet exercice, qui doit être explicité avec les élèves, est de relier les deux grandeurs et de décrire ce lien. Le professeur veille à bien expliciter ses attentes en matière de texte écrit et de vocabulaire employé : des mots-clés pourraient être donnés soit sous forme de coup de pouce, soit lors d'une première phase de mise en commun, après un temps de recherche pour aider à la rédaction du texte, soit avant le début de la rédaction du texte, après une discussion avec la classe.

Souvent déstabilisés dans un premier temps, les élèves sont amenés à observer la représentation graphique dans son ensemble. Le professeur peut inciter chacun à interpréter ce qu'il observe, à préciser son vocabulaire, mais aussi, lorsque les groupes sont assez à l'aise, à affiner ses observations et à développer davantage son argumentation.

Aux élèves qui ne démarrent pas l'activité, le professeur pourra demander une description de ce qu'ils voient sur le graphique (les deux axes, les grandeurs nommées sur ces axes et enfin la courbe). Il est important d'accepter dans un premier temps des formulations du type « la courbe monte » ou « la courbe stagne ». Un travail en binôme permet de travailler ces formulations orales entre pairs avant la phase de rédaction. Puis les éléments fixes des repères peuvent être mis en avant : l'origine, les axes perpendiculaires, l'orientation des axes, le nom des grandeurs qui y sont représentées. Cependant, il manque l'unité de graduation sur chacun des axes. Il sera intéressant de mener un dialogue avec eux pour établir l'utilité de la graduation dans un tel exercice.

Une fois les textes rédigés, un retour sur la lecture de la représentation graphique et l'interprétation que l'on peut en faire est nécessaire. On pourrait par exemple attendre un texte du type : « Ce graphique représente l'évolution de la température en degré Celsius **en fonction** des heures au cours d'une journée dans une salle de classe.
- On remarque que **la température augmente en début de journée** (à cause du chauffage et de la présence des élèves) ;
- puis **la température ne varie plus** pendant une certaine durée ;
- enfin **la température diminue** en fin de journée (à cause de la baisse de la température extérieure et des élèves qui quittent la salle). »

Une dernière étape pourrait être de donner un ordre de grandeur des valeurs à inscrire sur les axes. Dans quelle plage horaire peut-on imaginer s'intéresser à la température d'une salle de classe ? Les élèves (particulièrement ceux de 6e) ont besoin de confronter leurs connaissances sur leur environnement et la réalité. Cela permettra d'apporter de la cohérence à la représentation graphique. La description pourrait être reprise avec des valeurs numériques décidées avec l'ensemble de la classe (en lien avec l'enseignant de physique par exemple). La notion de graduation pourra aussi être revue.

Problème 3.
Vers des mobilités douces

Énoncé

Dans un collège, 112 élèves viennent en voiture, autant viennent à vélo, 56 viennent en bus et 280 viennent à pied.

a. Un seul de ces diagrammes circulaires représente le mode de déplacement des élèves de ce collège. Lequel ?

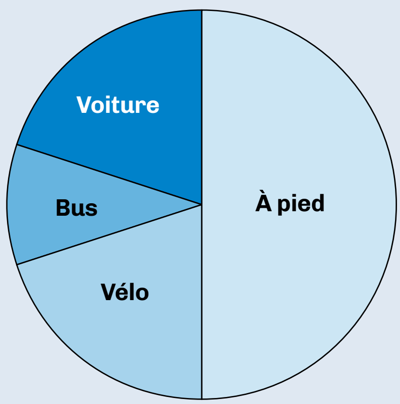


Diagramme 1

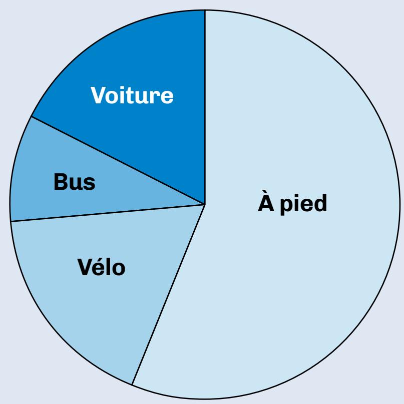


Diagramme 2

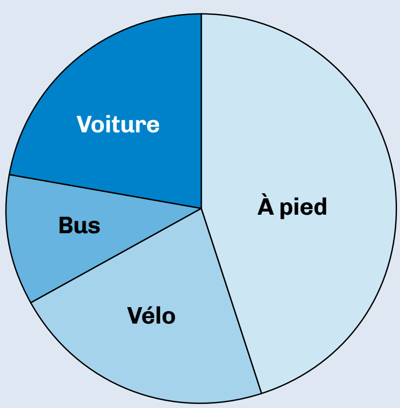


Diagramme 3

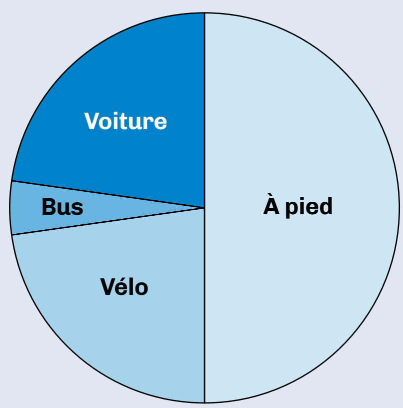
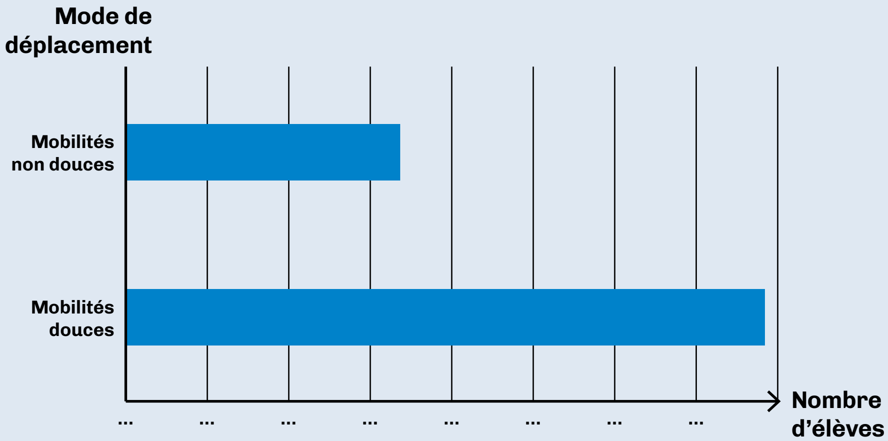


Diagramme 4

b. Compléter le tableau ci-dessous, puis choisir les nombres appropriés pour graduer le diagramme en bâtons qui représente ces données.

Mobilités non douces (bus ou voiture)	168
Mobilités douces (à pied ou à vélo)	...



Mots-clés

Gestion de données, représentation de données, unité, diagramme circulaire, diagramme en bâtons.

Pourquoi ce problème ?

Il permet de travailler spécifiquement la proportionnalité entre les données et les angles des secteurs circulaires. En s'interrogeant ensuite sur la notion d'échelle d'un diagramme en bâtons, on poursuit ce travail sur la proportionnalité en abordant ce type de graphique avec une approche moins classique que la simple lecture de données.

Ressorts de continuité ou éléments de progressivité

Dès le début du cycle 3, les élèves lisent, interprètent et exploitent des données prélevées dans des tableaux ou sur des représentations graphiques. Ils construisent aussi des représentations graphiques (diagrammes en bâtons, circulaires ou semi-circulaires, graphiques cartésiens) ou des tableaux (en deux ou plusieurs colonnes, à double entrée). La construction de diagrammes circulaires est un attendu de fin d'année de 6^{e}, une fois que la mesure des angles a été mise en place.

Il est également attendu que les élèves organisent des données réelles, issues de la vie quotidienne ou d'autres enseignements (sciences et technologie, histoire et géographie, éducation physique et sportive, etc.) en vue de les traiter.

Les diagrammes circulaires et les diagrammes en bâtons sont régulièrement rencontrés tout au long du collège et sont largement présents dans les évaluations internationales.

Stratégies d'enseignement

Ce type de problème peut être utilisé à l'oral en question flash pour des cas simples, mais aussi à l'écrit pour approfondir l'argumentation, le calcul, la rédaction.

Pour choisir le diagramme correspondant à l'énoncé, plusieurs méthodes sont à la portée des élèves : ils peuvent faire des calculs de proportionnalité (pour déterminer les angles correspondant aux effectifs) ou procéder par élimination en utilisant les liens entre les effectifs et donc entre leurs proportions. Le plus souvent, les élèves envisagent les catégories dans l'ordre dans lequel elles sont énoncées. Dans un premier temps, ils constateront qu'il y a autant de personnes qui viennent en voiture et à vélo, ce qui les amène à comprendre que la part représentant la catégorie « vélo » doit être aussi grande que celle qui représente la part « voiture ». Elles peuvent être comparées sur les diagrammes en utilisant un gabarit ou un rapporteur. Mais on constate que tous les diagrammes conviennent de ce point de vue. Ce sont donc les catégories « à pied » et « bus » qui seront déterminantes. Le raisonnement sera facilité par le calcul de l'effectif total, qui est 560. En effet, on comprend alors que la catégorie « à pied » en représente la moitié (on élimine les représentations B et C). Il restera à déterminer la représentation de la catégorie « bus ». Ici encore, plusieurs stratégies sont possibles : soit revenir à un calcul de proportionnalité en remarquant que la catégorie « bus » représente un dixième de l'effectif total (ou encore 10 %), soit remarquer que cette catégorie a un effectif égal à la moitié de l'effectif de la catégorie « voiture » ou « vélo ». La deuxième stratégie s'avère efficace et rapide. L'enseignant pourra ainsi montrer l'intérêt de maîtriser des faits numériques.

Selon la progression ou pour différencier, il peut être opportun de choisir, pour les effectifs, des nombres plus simples, comme par exemple des multiples de 25 (25 ; 50 ; 100 ; 125). De même, leurs proportions peuvent être modifiées $\left(\frac{1}{3} ; \frac{1}{6} ; \frac{1}{2}\right)$ ou être exprimées en pourcentages (5 % ; 20 % ; 25 % ; 50 %). On peut également utiliser moins de catégories. À l'inverse, des nombres plus difficiles, comme des multiples de 8 (24 ; 32 ; 64 et 40) ou encore des proportions comme $\frac{1}{3} ; \frac{2}{9} ; \frac{5}{12} ; \frac{1}{6}$, peuvent être proposés aux élèves les plus à l'aise. Les expressions utilisées dans l'énoncé pour qualifier les rapports entre les effectifs peuvent être différentes pour enrichir le vocabulaire. Par exemple, le collège compte 360 élèves, dont 24 viennent à vélo, le double en voiture, le triple à pied et le reste en bus.

Problème 4. Changement climatique : infox ?

Énoncé

En janvier 2019, alors que le nord des États-Unis était touché par une vague de froid glacial avec des températures ressenties descendant jusqu'à –50 °C à certains endroits, le président américain Donald Trump a tweeté le message suivant : « Dans le magnifique Midwest, les températures ressenties atteignent –51 °C, le plus froid jamais enregistré. Dans les prochains jours, on s'attend à ce qu'il fasse encore plus froid. [...] Que diable se passe-t-il avec le réchauffement climatique ? S'il te plaît, reviens vite, on a besoin de toi[38]. »
À partir des documents suivants, commenter ce tweet en prenant appui sur des indicateurs statistiques et/ou un graphique approprié.

–43,3° C	–45° C	–44,4° C	–43° C	–45,6° C
–48,9° C	–43,3° C	–45° C	–44,4° C	

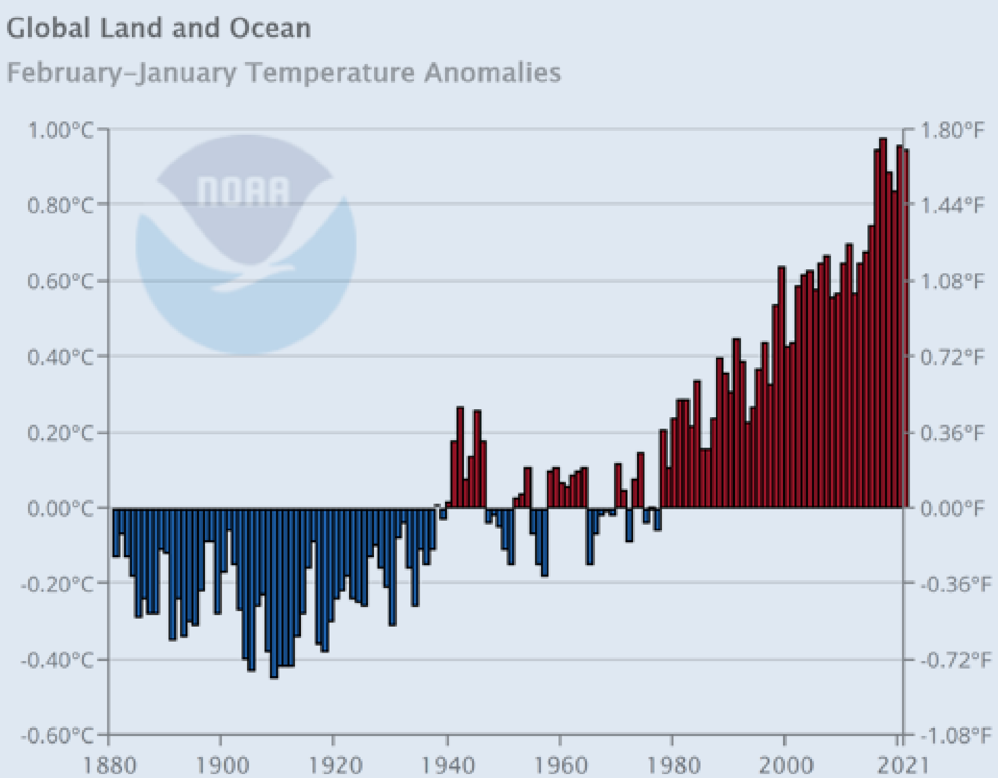
Doc 1. Températures relevées dans quelques villes du Midwest américain en janvier 2019.

La **météo** permet de prévoir, à un moment donné, les conditions de l'atmosphère telles que la température, l'ensoleillement, la vitesse du vent, les précipitations ou encore la couverture nuageuse.
Le **climat** décrit les conditions atmosphériques moyennes sur une longue période de temps (généralement 30 ans).

D'après le site de l'Institut national des sciences de l'Univers du CNRS[39].

Doc 2. Différence entre météo et climat.

38 — https://www.cnews.fr/monde/2019-12-08/lannee-2019-de-donald-trump-resumee-en-10-tweets-906635
39 — https://www.insu.cnrs.fr/fr/difference-meteo-climat



Source : Noaa, National centers for environmental information, National oceanic and atmospheric administration[40].

Doc 3. Écart de température (moyenne annuelle) par rapport aux températures moyennes relevées durant le xx^e^ siècle.

Mots-clés

Statistiques, moyenne, médiane, étendue, étude de l'allure de la courbe, exploitation des données sur un tableur, notion d'échelle, lectures graphiques, chercher, raisonner, communiquer.

Pourquoi ce problème ?

Ce problème a un double objectif. Le premier est mathématique : il s'agit de lire et d'interpréter un graphique, de croiser des données, mais aussi de construire une argumentation à partir d'indicateurs statistiques pertinents. Il pourra être intéressant d'utiliser un tableur pour appuyer ses conclusions sur un graphique bien choisi. Le second objectif est axé sur la formation du citoyen et le développement de l'esprit critique des élèves vis-à-vis des informations rencontrées sur les réseaux sociaux.

40 — https://www.ncdc.noaa.gov/cag/global/time-series/globe/land_ocean/12/1/1880-2021

Ressorts de continuité ou éléments de progressivité

Le problème peut être donné à tous les niveaux du cycle 4, par exemple en approfondissement lors de l'exploitation des indicateurs statistiques et la construction de l'argumentation.

Stratégies d'enseignement

Ce problème est un problème complexe dans lequel plusieurs documents ou informations sont fournis et des sources variées sont indiquées. Il faut prévoir un temps de lecture suffisant afin de prendre en compte tous les documents. On ne doit pas négliger le document source de l'exercice : le tweet du président Donald Trump.

Il est attendu des élèves qu'ils commentent ce tweet : le professeur devra expliciter ce qu'ils doivent produire et questionner le terme « commenter ». Il s'agira ici de produire un texte qui argumente l'avis formulé par l'élève sur le tweet et qui s'appuie sur un ou plusieurs des documents.

Les élèves peuvent résoudre ce problème à prise d'initiative en groupes, en enrichissant leur lecture des documents et en confrontant leurs points de vue. Il est possible de partager le temps en deux phases : un temps de lecture, de recherche et de rédaction, puis un temps de présentation, d'échange et d'argumentation. Le professeur circule et questionne les groupes où les arguments seraient trop légers. Il incite à consulter tous les documents et à utiliser les indicateurs ou à réaliser un graphique.

Les élèves ne devront pas se contenter d'une analyse superficielle des documents même si c'est une première étape de leur travail. Par exemple, certains diront que la courbe du document 3 a tendance à augmenter et passe du bleu au rouge, donc le « réchauffement climatique » est réel. Le professeur peut valider cette première étape d'analyse et d'argumentation, mais il incite aussi à exploiter le document plus en profondeur, en utilisant des indicateurs, par exemple, et à le mettre en lien avec les autres.

Il est possible de demander aux élèves d'ajouter des légendes sur les axes, en précisant que ce graphique est issu d'un site Internet et n'a pas été modifié.

On attend des élèves qu'ils comprennent que même s'il y a bien eu une vague de froid glacial dans le Midwest américain, cela ne remet pas en cause le changement climatique, comme le sous-entendait le tweet où le président américain confondait les notions de météo et de climat (différence entre une mesure isolée et une tendance moyenne sur des séries longues). Certains élèves peuvent mettre en avant le changement climatique en exploitant le document 1 et en prenant une position favorable au tweet de Donald Trump. Mais cela sous-entend qu'ils ne prendront pas en compte les documents 2 et 3. D'autres élèves exploiteront le document 3 et pourraient vouloir étudier l'évolution des températures sur les 30 dernières années afin d'en exploiter la moyenne, la médiane et l'étendue (voire les moyennes glissantes[41]) à l'aide d'un tableur.

Un temps de relevé de données est à consacrer sur le document 3. La lecture graphique des valeurs est délicate et peu aisée. Ces relevés peuvent être distribués dans les groupes et il serait bon de s'assurer que tous prennent la même échelle, 1 cm pour 0,2 °C. Afin de faciliter le travail, mais aussi pour optimiser les relevés, les élèves peuvent se répartir le travail en déterminant chacun un nombre défini de valeurs. L'utilisation d'un tableur semble ici appropriée.

Une mise en commun en classe permet de travailler les compétences « communiquer à l'oral » ainsi que « raisonner » en développant son argumentation et en essayant de convaincre autrui. Cette mise en commun incite les élèves à réfléchir sur des enjeux de société actuels et importants pour l'avenir, ce qui enrichit leur formation en tant que citoyen.

Problème 5. Comparaison de séries statistiques

Énoncé

On a représenté dans le tableau (page suivante) les meilleurs temps, arrondis en secondes, sur 50 mètres des vingt élèves nageurs de quatre classes d'un lycée. Comparer les résultats de ces classes, en rédigeant un texte qui s'appuiera sur des calculs et éventuellement des représentations graphiques[42].

41 — Voir le problème 6, « Moyennes glissantes », p. 43.
42 — Le fichier tableur des données est disponible en téléchargement.

Classe Dauphins	Classe Poséidon	Classe Nautic	Classe Neptuniens
29	29	28	36
30	29	28	40
30	29	29	42
30	33	29	35
31	35	29	35
34	35	29	40
34	37	31	35
39	37	33	42
39	37	37	46
40	37	37	40
40	38	38	39
42	38	39	37
43	38	43	35
43	41	45	36
43	44	45	36
43	45	47	35
44	45	47	39
47	49	54	45
48	50	54	46
51	54	58	41

Mots-clés

Gestion de données, moyenne, médiane, étendue, interpréter, représenter, modéliser, communiquer.

Pourquoi ce problème ?

Ce problème vise à faire analyser des séries de données, utiliser et interpréter des indicateurs statistiques variés. Il s'approche d'un travail de prise de décision nécessitant une hiérarchisation des indicateurs utilisés comme critères de comparaison.

Les compétences « chercher », « modéliser » et éventuellement « représenter » sont mises en œuvre, mais le travail ne portera ses fruits que si les compétences « raisonner » et « communiquer » le sont aussi.

Ressorts de continuité ou éléments de progressivité

Les indicateurs statistiques apparaissent et sont répartis sur les trois années du cycle 4. Chaque nouvel indicateur doit permettre une meilleure analyse de la série statistique.

Ce problème nécessite des prises d'initiatives de la part des élèves. Ils doivent maîtriser au minimum la moyenne d'une série, mais s'il est proposé en début de séquence au niveau 3e, les élèves sont amenés à réactiver la notion de médiane, indicateur moins sensible aux valeurs extrêmes que la moyenne. Plus ou moins guidés par leur professeur, ils pourront ensuite être amenés à comparer les valeurs extrêmes et donc à découvrir la notion d'étendue. Ces différents indicateurs se côtoient dans un exercice relativement facile où l'on peut dégager leurs différences et leurs intérêts respectifs.

Stratégies d'enseignement

Ce problème peut être effectué en groupes, ce qui permettra une répartition des tâches, la vérification des calculs, le partage des idées de méthode et l'élaboration d'une argumentation solide. La calculatrice ou le tableur sont indispensables. Le professeur veillera à faire comprendre aux élèves que comparer veut d'abord dire établir les ressemblances et les dissemblances, avant de chercher à établir des critères de valeurs.

Les groupes s'engagent facilement dans une démarche en commençant par des observations. La première est le constat que les valeurs de toutes les séries sont rangées dans l'ordre croissant sauf pour la dernière série (cela sera une incitation à ranger les valeurs de cette série). Les élèves appuient souvent leurs comparaisons sur les **valeurs extrêmes**. Le professeur les amènera à rédiger ces premiers éléments, puis à constater par eux-mêmes qu'ils permettent difficilement de décider quelle classe a les meilleurs résultats, par exemple. La troisième série a la valeur minimale la plus petite mais la valeur maximale la plus grande de toutes les séries, alors que la quatrième série a une valeur minimale bien supérieure à celle des autres séries et une valeur maximale bien inférieure.

Le premier indicateur de calcul statistique rencontré par les élèves dans leur scolarité est la moyenne. Elle est donc très vite calculée par les élèves pour toutes les séries. Mais ils découvrent qu'elles ont toutes une moyenne de 39 secondes, ce qui ne permet pas de différencier les résultats des quatre classes. Si le professeur veut orienter vers des indicateurs enseignés, il évoquera la médiane ou simplement le fait que les trois premières séries n'ont pas été rangées dans l'ordre croissant par hasard et qu'un autre indicateur déjà rencontré en classe peut être déterminé. La première série a la plus grande médiane : le professeur veillera à ce que les élèves ne se contentent pas de le constater mais rédigent ce que cela signifie. Cependant, les séries de la classe Poséidon et de la classe Nautic ont la même médiane (plus petite), ce qui ne permet pas de conclure.

Les élèves doivent donc aller plus loin dans leur investigation. Pour cela, on peut considérer différentes stratégies :

— l'étendue d'une série a déjà été enseignée, et les élèves doivent la réinvestir ;
— l'étendue n'a jamais été enseignée, mais le professeur laisse les élèves libres de déterminer un nouveau critère. Cette stratégie demande plus de temps mais amène des éléments très intéressants. Il arrive que des groupes utilisent l'étendue sans savoir la nommer, mais ils peuvent aussi créer des critères moins « scolaires » qui permettent de différencier les différentes séries, par exemple, le nombre de nageurs qui ont plus de la moyenne, ou le nombre de nageurs qui ont un temps inférieur à 30 secondes, ou un temps d'au moins 41 secondes, etc.

Au-delà de ce nouvel indicateur, les élèves proposent assez souvent des critères proches des quartiles ou des déciles. Cela pourra être accompagné par le professeur dans le cadre d'une différenciation, avec des groupes qui seront assez efficaces pour explorer aussi cet aspect dans le temps imparti.

Quelle que soit la stratégie choisie, le professeur insistera sur le développement de la compétence « communiquer ». S'il est souvent difficile pour les élèves, même au sein d'un groupe qui permet le partage des tâches, de rédiger des textes présentant les critères puis les comparaisons entre séries numériques, il peut leur être plus facile de les expliquer oralement (tout en gardant l'objectif de contribuer à améliorer le vocabulaire et la construction de leurs phrases). Les arguments sont aussi parfois plus simples à exposer s'ils s'appuient sur des graphiques pertinents. Ceux-ci peuvent avoir des formes variées : comparaison des séries dans un même graphique pour montrer leurs répartitions, pour comparer les critères moins « scolaires » évoqués ci-dessus, ou comparaison des graphiques de chaque série où l'on indique la moyenne et/ou la médiane.

Problème 6. Moyennes glissantes

Énoncé

Un capteur relève la concentration d'ozone de l'air toutes les heures à Ville-la-Nouvelle.

1. Le tableau (voir p. suivante) présente ces mesures sur deux jours consécutifs de juillet 2021[43].

a. À l'aide d'un tableur, construire la courbe qui représente la concentration d'ozone dans l'air en fonction du temps pour ces deux jours.

b. Déterminer la concentration moyenne pour chacune des journées et comparer ces moyennes. Que pourrait-on en conclure ?

c. Un journaliste affirme : « La concentration d'ozone dans l'atmosphère baisse beaucoup à la fin du deuxième jour, c'est donc bon signe : la ville a réussi à améliorer sa qualité de l'air ! » A-t-il raison ? Argumenter.

2. L'ozone a des effets néfastes sur la santé. Selon l'Organisation mondiale pour la santé (OMS), ses effets sont considérés comme acceptables lorsque la concentration est inférieure à 100 µg/m^3 en moyenne sur 8 heures consécutives[44].

a. Combien de ces moyennes (appelées moyennes glissantes ou mobiles) peut-on calculer sur ces deux journées ?

b. À l'aide du tableur, calculer toutes ces moyennes. L'une de ces journées est-elle une journée à risque selon l'OMS ? Justifier.

43 — Le fichier tableur des données est disponible en téléchargement.
44 — L'unité µg désigne le microgramme, soit 10^{-6} gramme.

Heure	Ozone en µg/m³	
	Jour 1	Jour 2
0 h	60	60
1 h	58	53
2 h	57	49
3 h	66	44
4 h	65	37
5 h	67	48
6 h	69	50
7 h	70	54
8 h	72	58
9 h	85	68
10 h	110	94
11 h	119	120
12 h	120	130
13 h	102	139
14 h	82	121
15 h	93	102
16 h	85	95
17 h	81	78
18 h	89	64
19 h	84	60
20 h	79	57
21 h	73	52
22 h	69	42
23 h	65	40

Mots-clés

Statistiques, gestion de données, moyenne, moyenne glissante, tableur, comparaison, représentation graphique, représenter, raisonner, communiquer.

Pourquoi ce problème ?

Ce problème est un problème atypique qui permet de découvrir la notion de moyenne glissante (ou moyenne mobile), souvent utilisée pour étudier des séries de données dont l'évolution est irrégulière, dans des domaines comme la santé (évolution d'une épidémie), la finance (cours de la bourse), le commerce, la climatologie, etc. Il ne s'agit pas d'en faire un objet d'étude au collège, mais de proposer aux élèves de rencontrer cette notion et son intérêt pour l'interprétation que l'on peut en faire.

Ce problème permet également de montrer que les statistiques constituent un pan des mathématiques qui s'intéresse à des faits réels et en constante évolution, utile dans de nombreux domaines. Basé sur la méthode de surveillance réelle de la concentration en ozone de l'air, il donne l'occasion d'aborder l'importance de la qualité de l'air pour la santé ainsi que l'impact de ce gaz sur l'environnement.

L'utilisation du tableur est ici incontournable, à la fois pour représenter les données par un graphique pertinent (les tests et modifications sont possibles rapidement) et pour effectuer des calculs nombreux et répétitifs.

Ressorts de continuité ou éléments de progressivité

Cet exercice peut être proposé en fin de cycle 4 (4^{e} ou 3^{e}). Il demande peu de prérequis, si ce n'est le calcul de moyenne et l'utilisation d'un tableur, mais les élèves devront également analyser les résultats trouvés et argumenter cette analyse.

Stratégies d'enseignement

L'utilisation du tableur est indispensable et la mise à disposition du fichier contenant les données permet de gagner un temps précieux.

En binôme, les élèves pourront confronter leurs idées (notamment sur le choix de la représentation graphique) et mettre en avant leurs arguments. En circulant d'un groupe à l'autre, le professeur s'assurera qu'ils n'ont pas choisi un graphique sans raison et que la notion de moyenne glissante est comprise.

Les questions 1. a., 1. b. et 2. b. permettent de travailler des éléments techniques classiques : création de la représentation graphique et calculs de moyennes simples avec sélection des plages de données utiles. Ils sont suivis par les interprétations de ces représentations et calculs. Dans la partie 1, on peut facilement comparer les deux moyennes des concentrations par jour qui seront reprises dans le bilan en fin d'exercice : elles ne permettent pas de conclure si la quantité d'ozone est acceptable ou non. On reste prudent quant à l'interprétation de la baisse des valeurs en fin de deuxième jour puisqu'on n'a pas d'indication sur la suite (jour 3), et le professeur insistera sur le regard critique que l'on se doit d'avoir vis-à-vis des données et conclusions hâtives parfois rencontrées.

Pour traiter la deuxième partie de l'énoncé, les données des deux jours seront présentées en une seule colonne dans un tableur. Dans la question 2. a., on cherche à déterminer le nombre de moyennes glissantes que l'on peut calculer avec seulement 48 valeurs consécutives. On ne peut alors calculer que 41 de ces moyennes. On veillera à ce qu'elles soient affichées avec au moins une décimale afin de ne pas fausser le résultat de la question suivante.

Pour aider les élèves à répondre à la question 2. b., le professeur pourra suggérer une mise en couleur des différents types de valeurs : celles qui sont acceptables (moyennes sur 8 heures consécutives inférieures à 100 µg/m^3) ou celles qui ne le sont pas (supérieures à 100 µg/m^3). L'expression de la justification de la dernière question est importante et sera mise en regard avec la réponse apportée à la question 1. b. Le texte produit par les élèves nécessitera une correction du professeur afin de leur permettre d'étoffer leurs argumentations. Là encore, le professeur fera apparaître clairement que le choix d'un critère est important et que son respect est primordial lorsque l'on doit interpréter, voire prendre des décisions. En effet, dans les villes, la création d'ozone dans l'air est due entre autres à une réaction photochimique des gaz d'échappement des véhicules en cas de chaleur. En cas de dépassement de la quantité d'ozone dans l'air, certains arrêtés municipaux conduisent à limiter le trafic routier par discrimination des véhicules.

Au fur et à mesure de l'avancée dans la tâche, le professeur orchestrera la mise en commun des productions en montrant les différentes représentations graphiques, en faisant comparer les résultats des calculs de moyennes, en créant des débats pour montrer l'importance de parvenir à convaincre et faire affûter les arguments, par exemple lors de temps de régulation en cours de résolution du problème. En fin de travail, il fera reprendre oralement par la classe l'évolution du raisonnement tout au long de l'exercice.

Mathématiques. Les pourcentages au cœur de la citoyenneté

La notion de pourcentage est au carrefour des thèmes des nombres et calculs, de la proportionnalité et de la gestion de données. Il est fondamental que les élèves la maîtrisent pour comprendre le monde qui les entoure et exercer leur citoyenneté. Les pourcentages sont très présents dans la vie courante, notamment dans le commerce, la presse, mais aussi dans les domaines scientifiques et techniques.

Pourcentages : de quoi parle-t-on ?

Rappelons tout d'abord qu'un pourcentage est **un nombre (et non un opérateur)**, égal à une fraction de dénominateur 100. Il permet de représenter une proportion, et par suite une fréquence, et peut donc se déterminer comme le quotient de la valeur d'une partie par la valeur de la totalité. Ce quotient sera ensuite écrit comme une fraction de dénominateur 100, en utilisant une valeur approchée le cas échéant.

Par exemple, si parmi 2 500 skieurs, 1 800 ont acheté un forfait de remonte-pente d'une journée, leur proportion sera : $\frac{1\,800}{2\,500} = \frac{72}{100}$. Ce dernier nombre se lira « 72 centièmes » ou « 72 sur 100 », ou encore « $\frac{72}{100}$ ». On a ainsi l'égalité $\frac{72}{100} = 72\,\%$.

On retiendra donc que la notation sous forme d'un pourcentage résulte de la détermination du nombre de centièmes et en aucun cas d'une multiplication de la proportion par 100.

On veillera notamment à ne pas entretenir de mauvaises représentations, par exemple lorsque des fréquences en pourcentages sont attendues dans un exercice. Plutôt que demander des « fréquences » et des « fréquences en pourcentages » en sous-entendant à tort qu'il s'agirait de deux objets mathématiques différents, il sera préférable de demander d'exprimer des fréquences sous forme décimale et sous forme de pourcentage, renvoyant ainsi aux diverses représentations des nombres.

En classe, faire le lien entre la proportionnalité et les pourcentages permettra d'en faire comprendre le sens. Mais le fait qu'un pourcentage soit un nombre est fondamental pour exécuter des calculs rapides, souvent bien plus efficacement que des passages par des tableaux de proportionnalité. Ce sera encore plus vrai à partir de la classe de 3^{e} pour traiter des situations d'évolution et pour faire le lien entre taux d'évolution et coefficient multiplicateur.

Éléments de progressivité

C'est au cycle 3 et au début du cycle 4 qu'on s'assure que l'usage des pourcentages en tant que représentation des proportions est maîtrisé. Les pourcentages facilitent la représentation mentale d'une situation de rapport entre deux valeurs en tant que données relatives (c'est-à-dire en tant que proportion et non par comparaison de données brutes) pour un total ramené à 100. Ce nombre permet d'évaluer rapidement une proportion donnée, et notamment de comprendre si la partie considérée est importante ou non, en comparaison des autres et au regard du contexte. La résolution de problèmes permet cette familiarisation avec le rapport à 100. Par exemple, on pourra proposer le problème suivant : « On a interrogé deux classes de 4^{e}. En 4^{e} A, 20 élèves sur 27 ont un smartphone alors qu'en 4^{e} B, la proportion d'élèves ayant un smartphone est de 26 sur 28. Exprimer sous forme de pourcentage les proportions d'élèves ayant un smartphone dans les deux classes. »

En 6^{e}, on continuera un travail entamé en CM2 en faisant appliquer des pourcentages simples, 10 %, 25 %, 50 %, 75 %, dans des problèmes relevant de la proportionnalité. Les élèves devront alors les mettre en relation avec des faits numériques connus, des fractions simples de quantité et avec les mots « dixième », « quart », « moitié », « trois quarts ». Par exemple, ils devront comprendre que, puisque 20 est le cinquième de 100, prendre 20 % **de** 55 € revient à prendre le cinquième **de** 55 €, donc à diviser 55 € **par** 5 (item largement échoué dans les évaluations). La part des exercices d'apprentissage des automatismes, notamment dans des cas contextualisés très simples, sera d'abord très importante. Les registres seront plus variés en fin d'année (lien avec la géographie, l'EPS, les sciences et technologies, les prix, etc.), où les pourcentages seront rencontrés dans des problèmes plus complexes.

C'est à partir de la classe de 5^{e} que l'on attend que l'élève sache relier fraction, proportion et pourcentage, où ce dernier est traité comme cas particulier de représentation dans le cas général. En exercice, le pourcentage sera alors appliqué en se ramenant à une multiplication par une fraction sur 100. Par exemple, prendre 30 % d'une quantité, c'est prendre 30 centièmes de cette quantité, donc multiplier par $\frac{30}{100}$ (que l'on peut décomposer en multiplier par 30 et diviser par 100). Le professeur pourra systématiquement prononcer ou faire prononcer « trente centièmes » pour une écriture « $\frac{30}{100}$ ». Là encore, les exercices de calcul mental et les questions flash avec des contextes simples seront nombreux afin que les automatismes libèrent la mémoire et la réflexion lors de la résolution de problèmes complexes.

Tout au long du cycle 4, les liens entre l'écriture décimale, les écritures fractionnaires et l'écriture en pourcentage seront entretenus dans des exercices de calcul mental et mis en œuvre lors de résolution de problèmes. Le professeur fait souvent le lien entre la formulation mathématique et le langage naturel pour maintenir à l'esprit le sens de la proportion ramenée à 100 : par exemple, lorsque 28 % des personnes d'une assemblée ont moins de 14 ans, cela veut dire que si l'assemblée comportait 100 personnes, 28 d'entre elles auraient moins de 14 ans. L'assemblée ne comporte peut-être pas 100 personnes, mais la proportion reste la même.

Les pourcentages seront également utilisés pour représenter des probabilités, et en fin de cycle seront établis les liens entre pourcentage d'évolution et coefficient multiplicateur.

Schématisation des pourcentages : un exemple d'utilisation de la représentation en barres

La schématisation peut être une aide importante pour les élèves. Elle peut prendre la forme d'un diagramme circulaire, qui peut être donné par le professeur pour gagner du temps lorsque l'objectif de la séance n'est pas la construction d'un tel diagramme, mais aussi d'une barre partagée, ce qui sera exécuté plus rapidement. L'exemple ci-après permet de montrer comment utiliser la schématisation en barres décrite dans le chapitre 2 de ce guide.

On considère par exemple le problème suivant : « On a lancé 40 fois un dé équilibré à six faces et on a réussi à obtenir 8 fois le 6. Quelle est la fréquence d'apparition du 6 exprimée en pourcentage ? »

Voici un schéma en barres qui pourrait être produit au tableau pour représenter la situation :

40 (nombre total de lancers)									
4	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**

8 (nombre de « 6 » obtenus)

On peut ensuite faire évoluer ce schéma en inversant verticalement l'ordre des barres pour qu'il corresponde mieux à la lecture du « 8 sur 40 », du « 2 sur 10 », puis du « 20 sur 100 », puisqu'il s'agit visuellement du même schéma (on garde ainsi un ancrage mémoriel fort).

1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
10									

10	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**
100									

La fréquence est la proportion : $\frac{8}{40} = \frac{2}{10} = \frac{20}{100} = 20\,\%$. Il serait fastidieux de montrer un exemple de schéma contenant une grande barre du total et un partage en 100 petites barres égales, même si ce serait encore utile pour certains élèves. Le professeur fera donc évoluer dans les énoncés de ses problèmes les nombres employés : ils permettront d'abord, et à plusieurs reprises, un schéma en barres assez simple, puis on s'affranchira du schéma dans des cas de nombres plus complexes (23 % par exemple).

Mathématiques. Liens entre statistiques et probabilités

Dans les attendus de fin d'année de 3e, il est précisé que « l'élève fait le lien entre stabilisation des fréquences et probabilités ». La simulation d'expériences aléatoires à l'aide d'un tableur ou du logiciel Scratch permet de générer un grand nombre de répétitions de cette expérience. La fréquence d'apparition des issues lors de ces simulations permet d'estimer la probabilité de chaque issue et de confronter cette estimation au modèle probabiliste lorsque cela est possible. En effet, la probabilité d'un événement est égale à la limite de la fréquence de réalisation de cet événement lorsque le nombre de répétitions d'une même expérience tend vers l'infini (loi forte des grands nombres, convergence presque sûre). Il ne s'agit pas d'enseigner cette définition au collège, mais de montrer aux élèves qu'un très grand nombre de répétitions d'une expérience aléatoire permet d'observer certaines régularités en dépit du caractère aléatoire de l'expérience.

L'observation de la stabilisation des fréquences peut se faire en plusieurs étapes, mais doit être suffisamment visuelle pour des collégiens et se baser sur des exemples simples. On propose ci-dessous un exemple, se basant sur le lancer d'un dé équilibré et structuré, en quatre étapes (il est possible de ne faire que deux des trois premières étapes en classe).

EXEMPLE SE BASANT SUR UN LANCER DE DÉ

ÉTAPE 1. SIMULATION EN CLASSE

Une fois travaillées les notions de hasard et de probabilité, notamment à travers des exercices où l'on qualifie de plus ou moins probables des événements, on pourra aborder la différence entre les statistiques, quand on reproduit réellement une expérience, et les probabilités, quand on quantifie le hasard de façon abstraite. Dans l'exemple du lancer d'un dé classique, non pipé, le modèle d'équiprobabilité des tirages des six faces s'impose naturellement. Le professeur pourra ensuite faire réaliser les lancers des dés par ses élèves, en les prévoyant en assez grand nombre. Le protocole expérimental (comment et où lancer le dé) pourra être établi avec eux. Le recueil des résultats de tous les élèves amènera à calculer les effectifs puis les fréquences d'apparition de chacune des faces, pour constater leurs différences avec les probabilités et les expliquer.

ÉTAPE 2. UTILISATION D'UN TABLEUR

Les élèves pourront ensuite utiliser un tableur pour simuler le lancer d'un dé à 6 faces et le répéter en étirant la formule sur plusieurs lignes et plusieurs colonnes. On constate que ce logiciel permet d'obtenir rapidement un grand nombre de lancers, de calculer automatiquement les fréquences d'apparition de chacun des nombres puis de visualiser leur évolution grâce à un graphique. En revanche, le tableur ne permet pas aux élèves de simuler aisément un très grand nombre de lancers.

ÉTAPE 3. EFFICACITÉ DE SCRATCH

La programmation avec Scratch permet, avec un script simple, de simuler en quelques minutes plusieurs millions de lancers, voire davantage. On voit alors les fréquences se stabiliser en temps réel, peu à peu, décimale après décimale. Dans le cas du lancer d'un dé non pipé, comme on connaît les probabilités d'apparition des faces, les élèves peuvent constater que les fréquences s'en approchent de plus en plus.

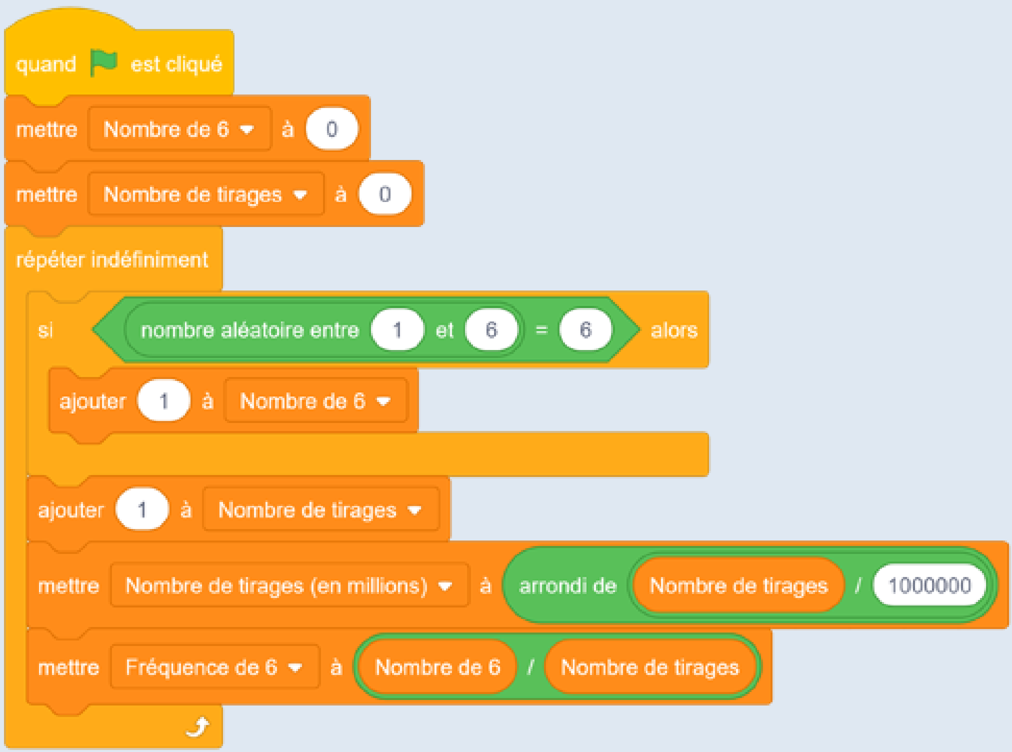


Figure 3. Exemple d'un programme réalisable sur Scratch.

Idéalement, les élèves réalisent eux-mêmes le programme[45] puis expérimentent. Mais l'étape de la programmation n'est pas indispensable et le professeur peut aussi, s'il le souhaite, montrer un script préparé à l'avance et en détailler le fonctionnement avec les élèves.

45 — Le fichier Scratch est disponible en téléchargement. Le lien pour créer un script sur Scratch en ligne est : https://scratch.mit.edu/projects/editor/. Il est possible de télécharger gratuitement le logiciel Scratch sur https://scratch.mit.edu/download/ afin de créer et sauvegarder des scripts sans connexion Internet.

ÉTAPE 4. MISE EN ÉVIDENCE DU LIEN ENTRE PROBABILITÉS ET FRÉQUENCES

On peut comparer les résultats obtenus aux étapes précédentes à l'aide de tableaux.

Tableau des probabilités :

Issue	Face n° 1	Face n° 2	Face n° 3	Face n° 4	Face n° 5	Face n° 6	Somme
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

Tableau des fréquences :

On a reporté ci-dessous les résultats d'une simulation réalisée avec le logiciel Scratch sur 21 154 516 lancers (en environ 8 minutes).

Issue	Face n° 1	Face n° 2	Face n° 3	Face n° 4	Face n° 5	Face n° 6	Somme
Fréquence	0,166 66	0,166 554	0,166 781	0,166 638	0,166 793	0,166 574	1

Il est intéressant de montrer que ces deux tableaux se ressemblent aussi bien par leur forme que par leur contenu. Les différences de valeurs dans le tableau de fréquences pourront amener un débat intéressant en classe. Si les premières fluctuations sont importantes et se stabilisent assez rapidement, on pourra également remarquer que, même après plusieurs millions de tirages, les fréquences ne sont stabilisées qu'au millième près.

Dans des situations où les probabilités sont difficiles, voire impossibles à déterminer, comme par exemple pour le lancer d'une punaise, il sera intéressant de montrer qu'il est possible d'estimer la probabilité d'un événement par la réalisation de l'expérience aléatoire un grand nombre de fois et le calcul de fréquences. Dans le même esprit, on peut également déterminer, par l'estimation de probabilités, la composition d'une bouteille opaque qui contient des billes blanches et des billes noires (10 billes au total par exemple), et dont on ne peut voir qu'une seule de ces billes lorsqu'on retourne la bouteille, celle-ci pouvant être retournée autant de fois qu'on le souhaite.

En résumé

- S'inspirant de situations réelles, les problèmes de ce chapitre ancrent les mathématiques dans la vie quotidienne de l'élève, donnant ainsi du sens au traitement des données. Ils offrent un cadre particulièrement adapté aux ponts avec les autres disciplines et aux réflexions sociétales comme le développement durable.

- Ce travail autour des problèmes de gestion de données répond à un objectif de formation fort : comprendre des graphiques variés, en particulier issus des médias, apprendre à analyser des données, à les hiérarchiser et à prendre des décisions, éveiller l'esprit critique des élèves. Ce travail s'inscrit également dans le cadre de l'éducation aux médias et à l'information.

- Le tableur constitue un outil incontournable, qui permet de manipuler des données et d'avoir accès au traitement de données massives.

II

Nombres et problèmes arithmétiques

Les nombres occupent une place déterminante au sein des programmes de l'école primaire au lycée. Les documents publiés sur Éduscol[46], notamment la ressource d'accompagnement « Du numérique au littéral »[47] s'attachent à dégager la place du champ numérique et de l'algèbre dans la résolution de problèmes. Les problèmes de ce chapitre proposent des situations variées, mobilisant des notions telles que les ratios, les probabilités, les pourcentages ou les fractions que l'on retrouve souvent dans les évaluations internationales. La modélisation y tient une place particulière et permet de prendre en compte les discontinuités bien identifiées (statut de la lettre, sens du signe égal, etc.).

Entrée historique

Nombres, calculs et problèmes récréatifs[48]

Les problèmes récréatifs sont énoncés simplement, dans un langage courant, ce qui leur permet d'être compris par le plus grand nombre. Ils sont très anciens et répandus dans de nombreuses traditions mathématiques, jusque dans les manuels d'arithmétique de la Troisième République avec leurs problèmes de baignoires, de robinets ou de trains qui se croisent. De nombreux exemples pourraient être énoncés avec certaines tablettes paléo-babyloniennes, l'*Anthologie palatine* (depuis l'Antiquité grecque), des énoncés sanskrits ou d'autres extraits issus des mathématiques chinoises ou des pays d'Islam.

46 — Documents-ressources autour des nombres : https://eduscol.education.fr/280/mathematiques-cycle-4

47 — https://media.eduscol.education.fr/file/Programmes/17/3/du_numerique_au_litteral_109173.pdf

48 — Contributions de Christine Proust, Marc Moyon, Dominique Tournès, Éric Vandendriessche.

Ces problèmes récréatifs sont particulièrement présents au Moyen Âge latin, dès l'époque carolingienne, notamment avec Alcuin d'York (mort en 804) et ses *Propositiones ad acuendos juvenes* (*Problèmes pour aiguiser des jeunes*). Ces collections de problèmes demandent plusieurs types de raisonnements logico-mathématiques. Les méthodes de résolution, souvent multiples, sont la vraie raison d'être de ces problèmes, leur essence, bien plus que leurs énoncés. Aussi, contrairement à des problèmes usuels, leurs conditions sont souvent saugrenues, voire insensées ou absurdes.

Léonard de Pise ou Fibonacci (mort après 1241) énonce, dans son *Liber Abaci* (*Livre de calculs*), plusieurs dizaines de ces problèmes. Ainsi, il donne à voir différentes méthodes de résolution, qu'elles soient arithmétiques – comme les méthodes par simple fausse position ou double – ou algébriques avec la mise en équation. C'est une occasion inévitable pour travailler sur les nombres entiers et les relations qu'ils peuvent entretenir entre eux (comme avec les nombres de Fibonacci, par exemple issus du problème des lapins. Voir figure 4 ci-dessous), les fractions ou encore les radicaux. Intéressons-nous à un exemple : « Un lion mange un mouton en 4 heures, un léopard en 5 heures et un ours en 6 heures. On demande en combien d'heures ils auront dévoré un mouton si on leur en jette un entre eux. » Fibonacci met ici en œuvre la méthode de simple fausse position, reposant sur la proportionnalité. Il débute sa résolution en prenant 60 heures comme réponse *a priori* (c'est la fausse position, judicieusement choisie) : 37 moutons seraient alors dévorés. Il est alors facile de déterminer le temps nécessaire aux lion, léopard et ours pour manger un mouton : $1 + \frac{23}{37}$ h (et c'est bien ainsi que le résultat est exprimé !). Un autre exemple : « Un lion est dans un puits dont la profondeur est de 50 palmes. Il monte quotidiennement de $\frac{1}{7}$ d'une palme, et descend de $\frac{1}{9}$. On demande en combien de jours il sortira du puits. » Faut-il alors privilégier une solution théorique ou réelle (c'est-à-dire qu'une fois que le lion est sorti du puits, il n'y entre pas à nouveau malgré la descente théoriquement prévue) ? Fibonacci penche pour la théorique sans discussion.

Figure 4. Folio du *Liber Abaci* montrant les premiers nombres de Fibonacci – 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377 – dans un tableau marginal (Florence, cod. Magliabechiano, 2616, fol.124r).

Point sur la recherche[49]

La transition de la pensée additive à la pensée multiplicative, qui se développe en classe de CM, est un obstacle majeur à l'apprentissage des mathématiques au collège. En effet, la multiplication est une opération arithmétique difficile impliquant dans l'esprit et la pensée de l'apprenant tout un processus cognitif. La pensée multiplicative induit, d'une part, un traitement mental adaptatif impliquant une multitude de concepts, de stratégies et de représentations issus d'un large éventail de problèmes mathématiques. Elle est liée, d'autre part, à un ensemble de contextes issu du monde réel au moyen d'un répertoire d'approches très flexibles adossées à des méthodes de plus en plus sophistiquées. Contrairement à la pensée additive qui nécessite un temps relativement court pour se développer, maîtriser le raisonnement multiplicatif peut prendre de nombreuses années[50].

Susan J. Lamon[51] considère le raisonnement mettant en jeu la proportionnalité – un sujet central des mathématiques au collège, fondé sur la pensée multiplicative – comme l'un « des plus difficiles à enseigner, des plus complexes mathématiquement, des plus exigeants sur le plan cognitif, des plus essentiels à la compréhension et la réussite dans les mathématiques et sciences approfondies » (p. 629). Pourtant, il existe peu de recherches sur la compréhension qu'ont les enseignants de la proportionnalité[52].

Le raisonnement mettant en jeu la proportionnalité est conceptuellement difficile, même pour les enseignants, en partie parce qu'ils ont recours aux algorithmes, comme la multiplication croisée pour obtenir les bonnes réponses, plutôt que de se pencher davantage sur la nature multiplicative même des relations de proportionnalité[53]. Ceci nous ramène au rôle important que joue le raisonnement multiplicatif tant dans l'apprentissage que dans l'enseignement.

---

49 — Contribution de Monica Neagoy.
50 — Gérard Vergnaud, "Multiplicative Structures", in James Hiebert, Merlyn J. Behr (eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, p. 141-161, Hillsdale, NJ: Erlbaum and Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1988 ; Peter Arnold Sullivan, Douglas McLean Clarke, Jill Cheeseman, Joanne Mulligan, "Moving beyond Physical Models in Multiplicative Reasoning", in Marja van den Heuvel-Panhuizen (ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Utrecht, Freudenthal Institute, 2001.
51 — Susan J. Lamon, "Rational Numbers and Proportional Reasoning: Toward a Theoretical Framework", in Franck K. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, p. 629-668, Charlotte, NC: Information Age Publishing, 2007.
52 — Joanne Lobato, Chandra H. Orrill, Bridget Druken, Erik Jacobson, "Middle School Teachers' Knowledge of Proportional Reasoning for Teaching", in Joanne Lobato (chair), *Extending, Expanding, and Applying the Construct of Mathematical Knowledge for Teaching*, symposium conducted at the annual meeting of the American Educational Research Association, New Orleans, LA, 2011.
53 — Modestina Modestou, Athanasios Gagatsis, "Cognitive and Metacognitive Aspects of Proportional Reasoning", *Mathematical Teaching and Learning*, 12(1), p. 36-53, 2010.

C'est au début des années 1980 que Efraim Fischbein, Maria Deri, Maria Sainati Nello et Maria Sciolis Marino[54], renouant avec l'intérêt pour la multiplication et la division en tant que domaine complexe de la recherche en didactique des mathématiques, conjecturent que toute opération arithmétique fondamentale est liée à « un modèle implicite, inconscient et primitivement intuitif ». Plus précisément, ils conjecturent que la multiplication est liée au modèle intuitif primitif de l'addition répétée tandis que la division est liée soit au partitionnement (partage équitable) soit à la soustraction répétée. D'autres recherches complétant ce point de vue ont examiné comment ces modèles intuitifs primitifs conduisent à l'hypothèse que la multiplication rend plus grand et que la division rend plus petit ; une idée fausse, mais assez répandue chez les élèves au collège, lors du passage des nombres naturels aux nombres rationnels[55].

Durant cette même décennie, les recherches de deux autres groupes ont ouvert la voie à une deuxième vague de résultats fondamentaux sur le raisonnement multiplicatif.

Gérard Vergnaud[56] introduit la notion de champ conceptuel comme « un ensemble de problèmes et de situations dont le traitement implique des concepts, procédures et représentations de plusieurs types en étroite connexion » (p. 127). À titre d'exemple, il décrit les grands volets du champ conceptuel multiplicatif en y intégrant la multiplication, la division, les fractions, les ratios (rapports), les nombres rationnels, les fonctions linéaires et *n*-linéaires, l'analyse dimensionnelle et les espaces vectoriels.

Le deuxième groupe, composé de Merlyn Behr, Richard Lesh, Thomas Post et Edward Silver, a publié les résultats d'un vaste projet de recherche financé par la NSF (*National Science Foundaton*) intitulé « *The Rational Number Project* ». Ils ont proposé une synthèse du domaine en identifiant six « sous-constructions » pour les nombres rationnels : comparaison de parties au tout, décimaux, ratio, quotient, opérateur et mesure de quantités continues ou discrètes.

Ces travaux fondateurs ont pour thème commun qu'il ne suffit plus d'analyser le développement cognitif de ces idées de manière isolée, mais plutôt de les reconnaître comme entrelacées dans un champ de concepts connexes, dont l'acquisition n'est ni linéaire, ni par petits bouts et qui se produit au cours d'une longue période : « comme avec une toile d'araignée, le contact avec un fil se répercute dans tout l'espace[57] ».

---

54 — Efraim Fischbein, Maria Deri, Maria Sainati Nello, Maria Sciolis Marino, "The Role of Implicit Models in Solving Verbal Problems in Multiplication and Division", *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(1), p. 3-17, 1985.

55 — Clifton Luke, "The Repeated Addition Model of Multiplication and Children's Performance on Mathematical World Problems", *Journal of Mathematical Behavior*, 7, p. 217-226, 1988.

56 — Gérard Vergnaud, *op. cit.*, p. 58.

57 — Guershon Harel, Jere Confrey (eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics*, State University of New York Press, 1994.

Une grande partie des recherches qui ont suivi ont porté sur les schémas d'action et les opérations mentales qui sous-tendent la réflexion et le travail des enfants face aux structures multiplicatives. Certaines études se sont penchées plus précisément sur la puissance des représentations. Par exemple, plusieurs chercheurs ont plaidé la puissance des images matricielles (quadrillages, tableaux) pour aider les apprenants à développer un raisonnement multiplicatif et à le distinguer du raisonnement additif[58]. La nature bidimensionnelle de l'image matricielle reflète, spatialement, la structure à deux variables des situations multiplicatives ; contrairement à la droite numérique unidimensionnelle qui reflète la structure à une variable des situations additives. Les représentations matricielles concrétisent également la commutativité de la multiplication et encouragent une vision des situations multiplicatives impliquant des groupes composites : par exemple, décrire un tableau comme quatre groupes de cinq ou cinq groupes de quatre encourage les élèves à traiter « un groupe de cinq » ou « un groupe de quatre » comme des unités à part entière[59].

Bon nombre de recherches confirment que le passage de la pensée additive à la pensée multiplicative est loin d'être anodin et constitue une clé pour comprendre en profondeur les structures multiplicatives et les travailler de manière flexible tout au long du secondaire voire au-delà. Ne pas aller au-delà des idées de base de la multiplication (telles que « groupes égaux de ») et de la division (telles que « combien de fois *x* va-t-il dans *y* ? »), garantit quasiment l'échec ultérieur dans le développement d'une compréhension approfondie des fractions, décimaux, pourcentages, ratios voire pour l'appréhension de l'algèbre. Les chercheurs insistent pour, d'une part, donner plus de temps aux élèves afin qu'ils appréhendent les complexités sous-jacentes à la multiplication et, d'autre part, pour que les enseignants prennent plus de temps pour mieux comprendre ce qui rend la multiplication difficile pour les élèves[60].

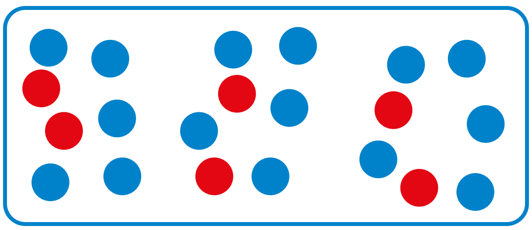
Une grande leçon issue de la recherche est d'aider les élèves à comprendre la manière dont ils pensent face à des situations-problèmes, à explorer ce que ces problèmes signifient, à discuter de la façon dont ces problèmes peuvent être représentés ou modélisés. La résolution de problèmes, comme ceux qui suivent, fait découvrir aux élèves comment mobiliser ce qu'ils savent et comment déterminer quelle stratégie fonctionne mieux que les autres et pourquoi.

58 — Patrick Barmby, Tony Harries, Steve Higgins, Jennifer Suggate, "The Array Representation and Primary Children's Understanding and Reasoning in Multiplication", *Educational Studies in Mathematics*, 70(3), p. 217-241, 2009.
59 — Catherine Twomey Fosnot, Maarten Dolk, *Young Mathematicians at Work: Constructing Multiplication and Division*, Heinemann, Portsmouth, NH, 2001.
60 — Dianne Siemon, Margarita Breed, Jo Virgona, in Judy Mousley, Leicha Bragg, Coral Campbell (eds.), *Mathematics – Celebrating Achievement, Proceedings of the 42nd Conference of the Mathematical Association of Victoria*, Melbourne: MAV, 2008.

Mathématiques. Les ratios et leur utilisation

Les ratios sont très présents dans le monde anglo-saxon, notamment dans l'énoncé des résultats sportifs, ou dans les sciences sociales. Leur introduction en France est récente.

Par exemple, dans cette urne, il y a 15 boules bleues pour 6 boules rouges. Les **boules bleues** par rapport aux **boules rouges** sont dans le ratio de « **15**:**6** » (dire : « dans le ratio de 15 pour 6 ») ou de manière équivalente « **5**:**2** ». On écrit aussi : « Le ratio **boules bleues** pour **boules rouges** est **5** pour **2** ».



Définition et propriétés

Dans un ensemble d'éléments, le ratio exprime les **proportions relatives** de certains sous-ensembles d'éléments qui le constituent, indépendamment de leurs unités. Il permet d'indiquer la constitution d'un ensemble à un coefficient multiplicatif près.

La connaissance de l'effectif total et du ratio permet de retrouver les effectifs des parties et leurs proportions et inversement. Par exemple, si un ensemble de 60 éléments est constitué de billes bleues, rouges, vertes et jaunes dans le ratio 4:3:7:1, alors la proportion des billes bleues est de $\frac{4}{15}$ (15 = 4 + 3 + 7 + 1), donc il y a 16 billes bleues.

L'ordre est important pour les ratios : ils sont énoncés dans l'ordre dans lequel les éléments sont aussi énoncés dans le texte. Le ratio traduit « la proportionnalité de deux suites de nombres » (programme du cycle 4).

Point de vigilance : il est nécessaire de distinguer **proportion relative** (5 pour 2) et **proportion** dans un ensemble ($\frac{2}{7}$ pour les boules rouges).

Didactique. Le modèle en barres

Le modèle en barres est un outil de modélisation qui met en évidence les relations arithmétiques entre les données de l'énoncé et la grandeur « longueur ». Son élaboration par l'élève se déroule pendant la phase heuristique de recherche. Différents modèles sont possibles (1 barre, 2 barres) en fonction des situations. Le modèle double barre, utile dans les situations de comparaison ou d'équations, favorise des représentations mentales permettant de comprendre et de visualiser le sens du signe « = ». Il symétrise le statut des variables en jeu ; sa structure, analogue à la structure algébrique du problème, permet d'envisager des stratégies de calculs.

Modèle additif

Valeur totale	
Valeur 1	**Valeur 2**

Les rectangles doivent être remplis par les valeurs connues ou le mot « inconnu ». La longueur de la barre rectangle n'est pas forcément proportionnelle au nombre qu'elle contient. On représente le plus petit nombre par une barre plus courte (si on dispose de l'information).

Modèle multiplicatif

Cette représentation s'appuie sur la définition de la multiplication par un entier n, $nx = x + x + ... + x$ (n fois).

Valeur totale						
Valeur cherchée	**Valeur cherchée**	**Valeur cherchée**	**Valeur cherchée**	**Valeur cherchée**	**Valeur cherchée**	**Valeur cherchée**

Nombre (ici 7) de parts égales

Les rectangles sont remplis comme pour le modèle additif. Les parts sont égales : les rectangles sont de même longueur.

Problème 1. Se partager des macarons

Énoncé

a. Comment partager 48 macarons entre Simon et Mandy dans le ratio 5:11 ?
b. Ahmed, Simon et Mandy se partagent des macarons dans le ratio 4:3:2. Simon en a 9, combien en ont Ahmed et Mandy ?
c. Simon et Mandy ont réalisé un certain nombre de macarons dans le ratio 5:8. Sachant que Mandy, plus expérimentée, a fait 66 macarons de plus que Simon, combien Mandy en a préparé ?

Mots-clés

Ratios, proportionnalité, répartition, partage, unité, fractions, introduction de la notion de variable.

Pourquoi ce problème ?

Les problèmes de ratios sont des problèmes qui se prêtent à la mise en place du triptyque « manipuler, verbaliser, abstraire ». Ils sont l'occasion de mettre en vie des problèmes de partages (équitables ou non).

Ce problème montre l'intérêt de raisonner sur « une unité », notamment dans un contexte de comparaisons relatives de grandeurs commensurables, pour traiter de manière arithmétique des problèmes qui auraient nécessité l'introduction de plusieurs inconnues et un travail plus algébrique.

Ressorts de continuité ou éléments de progressivité

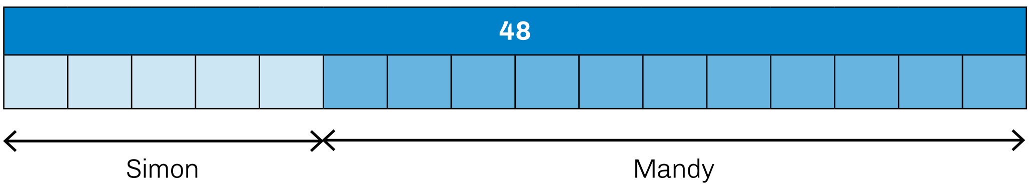
Même si les ratios ont un lien avec la proportionnalité, les proportions et les fractions, ils permettent de les aborder différemment et d'en construire le sens en les fréquentant dans différents contextes. Réciproquement, les notions de partages, proportions et fractions trouvent une contextualisation intéressante dans la présentation en ratios qui mobilisent des entiers.

Stratégies d'enseignement

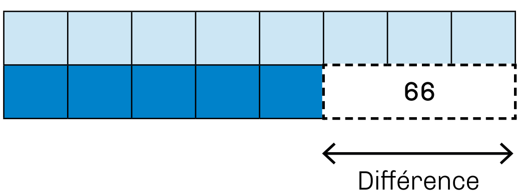
Les trois questions de cet énoncé peuvent être traitées de différentes façons : utilisation des fractions, pré-algèbre[61], etc.

Les cubes emboîtables, très présents dans le premier degré, sont un matériel pertinent pour travailler et permettre une modélisation de la situation qui met en relation deux grandeurs. L'utilisation de la modélisation dans les problèmes arithmétiques prépare l'introduction de la variable (brique, unité, inconnue) sans avoir recours à la mise en équation.

Une modélisation de la première question conduit au modèle multiplicatif dans le modèle en barres, c'est-à-dire partager 48 en 16 parts.



Dans la question c., la superposition des briques correspondant aux nombres de parts de chacun permet, par comparaison, d'exhiber la différence en tant que variable sur laquelle s'appuie le raisonnement. Le professeur pourra utilement guider les élèves dans la modélisation de cette différence.



66 macarons valent 3 « briques unité ».

61 — **Pré-algèbre :** ce terme désigne une étape intermédiaire (ou une écriture symbolique) entre l'arithmétique et l'algèbre (opérations à trous, exemples génériques, « 3 stylos + 2 cahiers = 8,5 euros »).

Didactique. Le rôle du matériel de manipulation

Le matériel de manipulation permet de comprendre les liens entre les données de l'énoncé et de mettre en évidence de quelle manière les élèves recherchent la « brique unité ». Il favorise le travail portant sur le passage du langage naturel au calcul.

Voici un problème de comparaison équivalent : « Un fils et son père ont leurs tailles dans le ratio 5:8. Sachant que le père mesure 66 cm de plus que son fils, quelle est la taille du père ? »

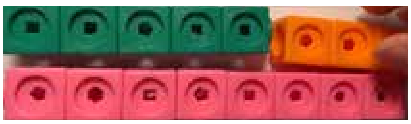


Figure 5. Utilisation d'un matériel de numération pour résoudre le problème.

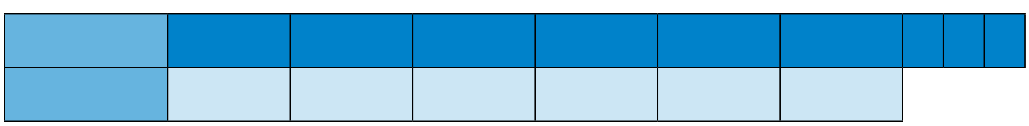
Voici le propos d'un élève de 6e en train de résoudre le problème : « Pour le père, on prend 8 blocs de “on ne sait pas encore combien” et pour le fils, 5 blocs. Sachant que 3 blocs mesurent 66 cm, en divisant par 3, un bloc mesure 22 cm. »

Pour aller plus loin

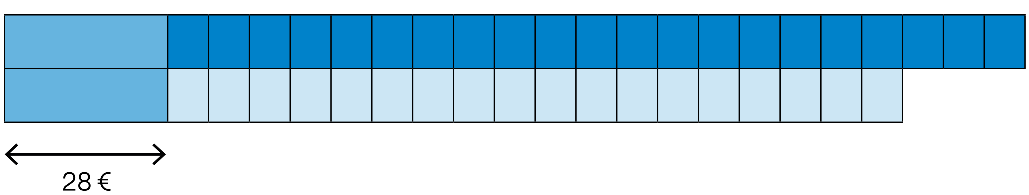
Pour l'énoncé suivant, il est nécessaire d'avoir acquis une certaine agilité du modèle en barres : « Abel et Sarah ont leurs économies dans le ratio 7:6. Ils reçoivent tous deux 28 € et ont maintenant leurs économies dans le ratio 25:22. Quelles étaient leurs économies au départ ? » La brique de base va évoluer lors de la résolution.

Au départ, l'écart est de 1 « brique unité » car le ratio est 7:6, ce qui amène à la modélisation suivante :

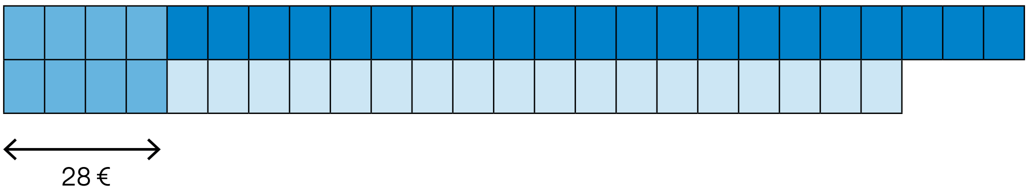
Après l'ajout de 28 €, les économies d'Abel et Sarah sont dans le ratio 25:22. L'écart est cependant conservé en termes de valeurs et il est maintenant de 3 « briques unité », car 25 – 22 = 3, ce qui indique qu'il faut partager la précédente « brique unité » en 3.



Le ratio 7:6 devient le ratio 21:18, qui lui est équivalent.



Pour arriver au ratio 25:22, il faut que la partie ajoutée corresponde donc à 4 « briques unité » (21 + 4 = 25 et 18 + 4 = 22).



On en déduit que la « brique unité » vaut 7 €, ce qui permet de répondre au problème posé.

Problème 2. Les angles du triangle sont dans un ratio

Énoncé

a. Dans quel ratio sont les trois angles d'un triangle équilatéral ?
b. Quelle est la nature d'un triangle dont les angles sont dans le ratio 1:2:3 ?
c. Existe-t-il un triangle isocèle dont les angles sont dans le ratio 2:2:7 ?

Mots-clés

Ratio, proportion, recherche de la « brique unité », somme des angles d'un triangle.

Pourquoi ce problème

En dépit du contexte, ce problème n'est pas un problème de géométrie. Il permet d'aborder la notion de ratio avec 3 nombres dans un contexte géométrique. Il nécessite un changement de cadre : en effet, l'énoncé amène l'élève à sortir de l'arithmétique pour interroger les connaissances de géométrie : la somme des angles d'un triangle et les relations entre la mesure des angles et la nature des triangles.

La question a. a pour objectif l'entrée dans le problème par l'élève. La question est élémentaire et réactive les propriétés angulaires du triangle équilatéral. Les questions b. et c., progressives, ont pour enjeu de faire réfléchir l'élève par un questionnement plus ouvert sur la compréhension des ratios proposés tout en mobilisant ses connaissances sur les triangles particuliers.

Ressorts de continuité ou éléments de progressivité

En 5e, ce problème constitue un premier pas vers la géométrie déductive. Il prend appui sur une propriété démontrée (la somme des angles d'un triangle) et sur les connaissances des triangles particuliers. La justification des résultats aux différentes questions contribue à entrer dans la notion de preuve en mathématiques. En classes de 4e et 3e, l'enjeu de cet exercice est de consolider les connaissances des élèves sur les triangles particuliers en lien avec la manipulation de ratios.

Stratégies d'enseignement

Ce problème peut être posé en question flash, puisqu'il réactive une connaissance de base (la somme des angles d'un triangle).

Les tentatives de dessins, à main levée, par les élèves sont naturelles et doivent être encouragées. Cependant, elles ne constituent pas toujours une aide efficace ou pertinente ; les essais/ajustements sur les angles peuvent aboutir rapidement (question b.) ou être infructueux selon les ratios (question c.).

Pour les élèves en début de 5e : pour la question b. (idem pour la question c.), lorsque les élèves ont été familiarisés, notamment dans les classes primaires, à l'utilisation du matériel de manipulation tel que les cubes emboîtables et les réglettes © Cuisenaire, ils visualisent la répartition et en déduiront la valeur de l'unité en invoquant la valeur du tout.

Figure 6. La somme des angles est composée de 6 parts, donc 6 parts = 180°.

Dans le cadre de la différenciation pédagogique, on peut adapter les ratios dans la question c. (par exemple 1:1:4 ou 2:2:6).

La pratique courante, dans le monde anglo-saxon, d'une recherche d'une affirmation fausse dans les QCM mérite d'être développée.

Par exemple : « The angles of a triangle are in the ratio 1:1:2.
Which of the following sentence(s) is (are) false?
a. It is a right-angled triangle.
b. It is an isosceles triangle.
c. It is a scalene triangle.
d. It is an equilateral triangle. »

TRANSFERT[62]

« Comment partager un segment de 50 cm dans le ratio de 1:3:4 ? »

62 — Voir l'introduction et le chapitre 7.

Problème 3. Des fractions et des proportions

Énoncés

1. La collecte : 20 € ont été collectés par 3 élèves lors de la vente de gâteaux. Jim en a collecté le quart, Paul 3 huitièmes et Jane le reste. Sachant qu'une part de gâteau coûtait 50 centimes, combien de parts de gâteaux ont-ils vendues chacun ?
2. Football : Pour se maintenir dans son groupe, une équipe ne peut pas perdre plus de 20 % de tous les matchs joués. À ce jour, une équipe de football a gagné 8 matchs, concédé 8 matchs nuls et perdu 10 matchs. Cette équipe ne pourra alors se maintenir dans son groupe que si elle ne perd plus aucun match jusqu'à la fin de la saison. Combien lui reste-t-il de matchs à jouer au minimum ?
3. Économies : Je dépense 4 septièmes de mes économies pour acheter un manteau et le tiers du reste pour une paire de chaussettes. J'ai maintenant 9,52 €. Combien avais-je d'économies au départ ?
4. Devinette : Je pense à un nombre, je le double, j'ajoute 2 septièmes du nombre de départ et j'obtiens 376. Quel était le nombre de départ ?
5. Le Grand Duc : Le Grand Duc de York a conduit ses hommes au sommet de la montagne. À 14 heures, ils avaient parcouru 1 tiers du chemin. À 14 h 50, ils en avaient parcouru 75 %. À quelle heure ont-ils commencé leur marche ?

Mots-clés

Modélisation en barres, fractions, proportions, pourcentages, date et durée.

Pourquoi ces problèmes ?

Plusieurs domaines sont convoqués ici : nombres et calculs, grandeurs et mesures. Les repères de progressivité indiquent que « les élèves [en 5^{e}] sont conduits à comparer des nombres rationnels, à en utiliser différentes représentations et à passer de l'une à l'autre », tandis qu'en 4^{e}, « les notions d'inconnue et de solution d'une équation sont abordées [...] pour aborder la mise en équation d'un problème et la résolution algébrique d'une équation du premier degré ».

Ces problèmes réinvestissent des faits numériques : décompositions et différentes représentations d'un même nombre. Les énoncés sont courts, mais portent sur des concepts numériques variés que les élèves peinent à appréhender (décimaux, pourcentages, fractions). Le choix des valeurs rendant les procédures par essais/ajustements peu efficaces, cela induit le recours à la modélisation (par exemple, le modèle en barres), appuyé éventuellement par la manipulation.

Ressorts de continuité ou éléments de progressivité

Ces problèmes (avec des données plus simples) sont abordés dès le début du cycle 3 et portent un objectif de continuité tant pour les élèves que dans le cadre de la liaison de cycle.

Étayés par le matériel de manipulation, ils peuvent être traités dès la 6^{e}. Le choix des variables didactiques (ici les valeurs numériques) permet de les faire évoluer tout au long du collège.

Ces problèmes s'intègrent dans une stratégie plus globale de travail autour des représentations des nombres. À l'école, les élèves sont entraînés à décomposer des nombres (avec des activités comme la fleur des nombres, le journal du nombre, etc.). Ces activités méritent d'être prolongées pour mettre en évidence les liens entre fractions, pourcentages et proportions, par exemple :

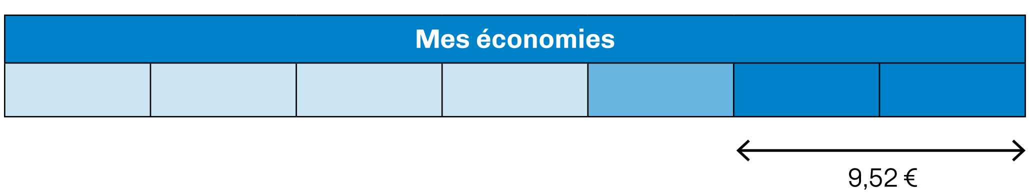
$\frac{2}{5} = 2 \times \frac{1}{5} =$ 2 cinquièmes $= 0{,}4 = \frac{40}{100} = 40\,\% =$ 40 centièmes.

Stratégies d'enseignement

Ces problèmes permettent d'envisager des procédures diverses en fonction de l'appropriation des notions mathématiques selon les élèves. En effet, le recours à la manipulation est facilitateur pour comprendre le besoin de réduire deux fractions au même dénominateur ou encore de comprendre ce qu'est la division par un nombre rationnel non nul.

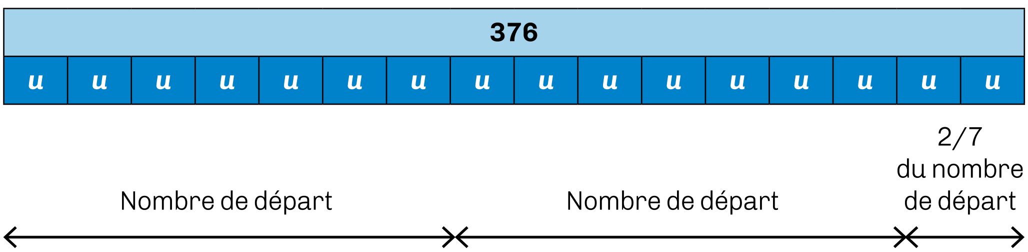
La modélisation permet ici de différencier les compétences « représenter », « modéliser » et « calculer », et de réaliser une évaluation plus fine des difficultés des élèves en mettant en évidence les réussites (évaluation positive).

Une modélisation possible pour le problème « Économies » :



Si on souhaite se concentrer uniquement sur la modélisation, il est possible de ne pas donner de valeurs numériques dans les questions[63] ; cela permet de rester sur le modèle et les concepts de fractions/proportions/pourcentages.

Pour le problème « **Devinette** », l'analyse de l'énoncé invite à prendre 7 unités pour modéliser le nombre de départ. D'où le modèle ci-dessous qui conduit à un schéma de 16 (= 7 + 7 + 2) « briques unité » valant 376. Cette approche permet de montrer aux élèves que « diviser par $\frac{16}{7}$ revient à diviser par 16 et multiplier par 7 donc multiplier par $\frac{7}{16}$ ». La méthode algébrique usuelle conduit à l'équation $2x + \frac{2}{7}x = 376$ ou encore $\frac{16}{7}x = 376$ qui mobilise les fractions.



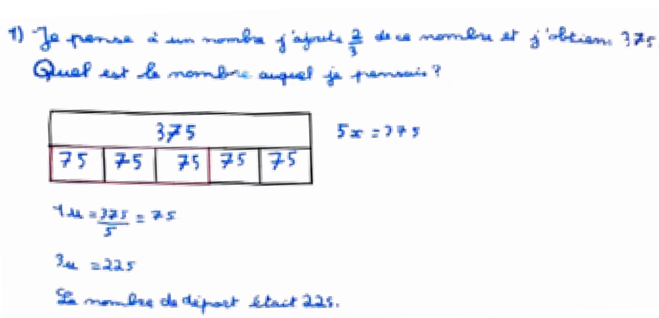


Figure 7. Une variante possible de l'exercice.

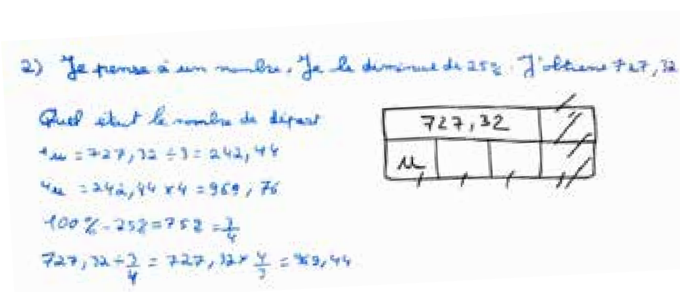


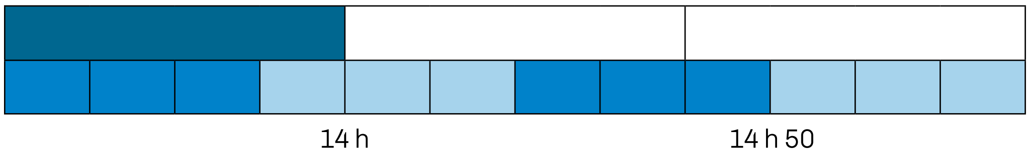
Figure 8. Une autre variante.

Cette entrée par la pré-algèbre peut être mise en parallèle avec l'écriture algébrique, permettant une transition plus douce et basée sur la structure de l'unité. Dans le premier exemple ci-contre, l'augmentation de 2 tiers du nombre de départ suggère le choix de prendre 3 briques pour le nombre de départ. Dans le second exemple (figure 8), la diminution de 25 %, soit le quart, indique de prendre 4 briques pour le nombre de départ.

63 — L'énoncé serait alors : « Je dépense 4 septièmes de mes économies pour acheter un manteau et le tiers du reste pour une paire de chaussette. J'ai maintenant 9,52 €. Modéliser la situation. »

L'implicite de l'énoncé « **Le Grand Duc** » oblige le professeur et les élèves à faire une hypothèse importante : la marche s'effectue à vitesse constante.

Une modélisation permet, sans calcul de fractions, de prendre conscience que 5 « briques unité » valent 50 minutes. La difficulté est de placer, sur un même dessin, le tiers et les 3 quarts, ce qui suppose de l'avoir fait à l'école primaire en manipulant 12 cubes emboîtables. La marche du Grand Duc a donc commencé à 13 h 20.

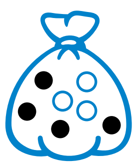


Cette modélisation évite la conceptualisation de l'inconnue (heure de départ, durée, chemin) qui présente une difficulté.

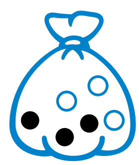
Problème 4. L'affaire est dans le sac[64]

Énoncé

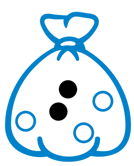
Dans les sacs suivants, il y a déjà des billes noires et des billes blanches.
Est-il possible d'ajouter un certain nombre (de ton choix) de billes rouges, de façon à satisfaire les indications données en dessous de chaque sac ?



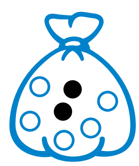
Sac 1 : la probabilité d'extraire une bille rouge est $\frac{5}{12}$.



Sac 2 : la probabilité d'extraire une bille rouge est $\frac{2}{5}$.



Sac 3 : la probabilité d'extraire une bille blanche ou rouge est $\frac{3}{4}$.



Sac 4 : la probabilité d'extraire une bille rouge est $\frac{3}{5}$.

64 — Brochures de l'Irem de Rouen sur l'enseignement des probabilités, *Probabilités - Statistiques, cinq scenarios ($3^e/2^{de}$)*, Blandine Masselin, Fabrice Mondragon, 2015, université de Rouen. Extrait modifié, p. 104-105.

Mots-clés

Probabilités, fractions, proportions, ratios.

Pourquoi ce problème ?

Ce problème permet un renforcement du concept d'équiprobabilité avec un travail dans les domaines numérique et littéral (pour le sac 4).

Les situations de tirages dans des sacs ou des urnes permettent aux élèves d'appréhender le hasard en lien avec le vocabulaire des probabilités (expérience aléatoire, issue, événement, probabilité) introduit au début du cycle 4. Les situations rencontrées en classe de 5^e^ sont l'occasion de placer un événement sur une échelle de probabilités et de déterminer des probabilités dans des situations très simples d'équiprobabilité. Les ratios permettent de modéliser et de comprendre la situation (ici, la composition des sacs).

Ressorts de continuité ou éléments de progressivité

Ce problème, de milieu de cycle 4, convoque plusieurs domaines (probabilités, nombres et calculs). Outre le fait de mobiliser les nombres rationnels et l'algèbre, il fait travailler les probabilités dans des « situations simples qui ne relèvent pas nécessairement du modèle équiprobable ».

Stratégies d'enseignement

Ce problème permet d'envisager des procédures diverses en fonction de l'appropriation des notions mathématiques selon les élèves. Pour les trois premiers sacs, la manipulation ou une démarche essai/ajustement permet de résoudre le problème. Pour le sac n° 4, la manipulation, le recours à l'algèbre ou aux ratios permettent de montrer l'impossibilité d'une composition du sac répondant à la question posée.

CAS DU SAC 2

Il est intéressant de raisonner sur la constitution d'un sac pour lequel il y a une probabilité de $\frac{2}{5}$ de tirer une bille rouge. Dans cette situation, le ratio billes rouges pour billes des autres couleurs (blanches ou noires) est 2:3. Avant de considérer des ratios équivalents (4:6 par exemple), le professeur peut amener les élèves à s'interroger sur la signification du nombre 3 dans le ratio, dans le cas où le sac serait réduit à 5 billes.

CAS DU SAC 4

Le raisonnement sur le ratio billes rouges pour billes d'une autre couleur conduit à chercher un ratio de la forme a:7 équivalent à 3:2, avec a correspondant au nombre de billes rouges ajoutées dans le sac. La discussion invite l'élève à interroger une solution potentielle et à la confronter au contexte du problème, démarche à engager pour aiguiser le sens critique.

POUR ALLER PLUS LOIN (CAS DU SAC 4)

Les enjeux de l'énoncé suivant portent sur l'absence de représentation initiale et la présence de deux inconnues : « Un sac contient des billes blanches et noires dans le **ratio** 5:2. En ajoutant des billes rouges, la probabilité maintenant de tirer une bille rouge est de $\frac{3}{5}$. Combien de billes de chaque couleur y a-t-il maintenant au minimum dans le sac ? »

Problème 5. Plusieurs inconnues dans le jeu

Énoncés

1. Pour le championnat de rugby, une équipe reçoit 3 points par victoire, 1 point par match nul. Après 25 matchs, une équipe a marqué 55 points. Combien de matchs ont-ils pu perdre ?

- **a.** aucun
- **b.** 5
- **c.** 3
- **d.** 2

2. Un groupe d'amis a dépensé 390 € au restaurant. Certains (le groupe A) ont dépensé 30 € chacun et les autres (le groupe B) ont dépensé 20 €. Combien pouvait-il y avoir de personnes dans les groupes A et B ?

Mots-clés

Pourcentages, proportions, fractions, algèbre, système d'équations du premier degré, équations diophantiennes, variables, inconnues, critères de divisibilité, modéliser, chercher, calculer, raisonner.

Pourquoi ce problème ?

La première question contribue à la prise d'initiative de l'élève. L'énoncé est court, mais chaque donnée est importante et il y a un implicite sur le nombre de points en cas de match perdu.

L'énoncé met en œuvre trois inconnues et deux équations (que l'on peut aussi résoudre grâce aux propriétés de divisibilité des entiers) et induit à ce niveau une stratégie rarement utilisée dans les QCM consistant à essayer chacune des valeurs proposées pour ramener ce problème à une équation avec une seule inconnue.

La seconde question se ramène à l'équation diophantienne $30a + 20b = 390$ où a représente le nombre de personnes du groupe A et b le nombre de personnes du groupe B. Au collège, une stratégie basée sur les critères de divisibilité peut éventuellement permettre de trouver toutes les solutions possibles.

Ressorts de continuité ou éléments de progressivité

Pour la première question, en 5e, l'introduction d'une expression littérale est possible, la lettre[65] employée ayant le statut de variable. L'usage du tableur (comme ci-dessous), de la calculatrice ou d'un algorithme permettra de déterminer la valeur recherchée. Les démarches envisageables par les élèves sont le principe d'itération ou d'essai/erreur, la manipulation d'expressions algébriques voire la modélisation.

	A	B	C	D
1	GAGNÉS	NULS	POINTS	
2	0	=20-A2	20	
3	1	19	22	
4	2	18	24	
5	3	17	26	
6	4	16	28	
7	5	15	30	
8	6	14	32	
9	7	13	34	
10	8	12	36	
11	9	11	38	
12	10	10	40	
13	11	9	42	
14	12	8	44	
15	13	7	46	
16	14	6	48	
17	15	5	50	
18	16	4	52	
19	17	3	54	
20	18	2	56	
21	19	1	58	
22	20	0	60	

Figure 9. L'usage du tableur, pour déterminer la valeur recherchée.

En fin de cycle 4 et en 2de, l'introduction d'équations sera attendue, ce qui permet le passage de la variable à l'inconnue. L'utilisation des propriétés de divisibilité dans l'équation diophantienne $3a + b = 55$ est un attendu du lycée.

Pour la seconde question, en fin de cycle 4 et en 2de, après simplification de l'équation obtenue, les critères de divisibilité et la notion de nombres premiers entre eux permettent d'aller plus vite dans la résolution de ce problème.

En terminale (option mathématiques expertes), ce problème consiste à résoudre une équation diophantienne avec discussion sur les couples solutions à retenir.

65 — La lettre rencontrée dans la scolarité d'un élève peut être une abréviation, une unité de mesure, le nom d'un point en géométrie, une indéterminée, une inconnue, une variable ou un paramètre.

Stratégies d'enseignement

Le professeur peut inciter les élèves à essayer les différentes valeurs proposées pour le nombre de matchs perdus (0, 5, 3 ou 2) pour amener les élèves à penser que le nombre de matchs nuls ou gagnés est alors 25, 20, 22 ou 23.

L'utilisation d'un tableur (ci-dessous, le cas où l'équipe a perdu 5 matchs), permet d'identifier une variable de travail et d'explorer toutes les possibilités, ce qui constitue une preuve (par disjonction de cas).

Pour la modélisation algébrique dans le cas présent, en notant x le nombre de matchs gagnés, le nombre de matchs nuls vaut alors $20 - x$. Le nombre de points marqués est $3x + (20 - x) = 2x + 20$. Cette expression algébrique vaut 55, ce qui permet de conclure $x = 17{,}5$.

Le retour au problème posé – qui constitue le cœur de la démarche de modélisation (partir du réel, modéliser, revenir au réel) – permet d'écarter cette solution trouvée, car 17,5 n'est pas un nombre entier.

Pour la seconde question, en fin de cycle 3 et début de cycle 4, on peut demander aux élèves de tester des couples solutions. Ces calculs élémentaires permettent de réinvestir les priorités opératoires, la manipulation d'une expression littérale où apparaissent deux variables. Il est possible également de fixer une variable (par exemple le nombre de personnes dans le groupe A) et de déterminer alors lorsque cela est possible, l'autre variable (qui prend alors le statut d'inconnue). Les critères de divisibilité peuvent être mobilisés pour répondre à des questions du type : « Est-il possible qu'il y ait 6 personnes dans le groupe A ? »

Tout comme pour la première question, l'usage du tableur permet de déterminer l'ensemble des couples solutions recherchés.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
1	Nb A\nb B	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	0	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	320	340	360	380	400
3	1	30	50	70	90	110	130	150	170	190	210	230	250	270	290	310	330	350	370	390	410	430
4	2	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	320	340	360	380	400	420	440	460
5	3	90	110	130	150	170	190	210	230	250	270	290	310	330	350	370	390	410	430	450	470	490
6	4	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	320	340	360	380	400	420	440	460	480	500	520
7	5	150	170	190	210	230	250	270	290	310	330	350	370	390	410	430	450	470	490	510	530	550
8	6	180	200	220	240	260	280	300	320	340	360	380	400	420	440	460	480	500	520	540	560	580
9	7	210	230	250	270	290	310	330	350	370	390	410	430	450	470	490	510	530	550	570	590	610
10	8	240	260	280	300	320	340	360	380	400	420	440	460	480	500	520	540	560	580	600	620	640
11	9	270	290	310	330	350	370	390	410	430	450	470	490	510	530	550	570	590	610	630	650	670
12	10	300	320	340	360	380	400	420	440	460	480	500	520	540	560	580	600	620	640	660	680	700
13	11	330	350	370	390	410	430	450	470	490	510	530	550	570	590	610	630	650	670	690	710	730
14	12	360	380	400	420	440	460	480	500	520	540	560	580	600	620	640	660	680	700	720	740	760
15	13	390	410	430	450	470	490	510	530	550	570	590	610	630	650	670	690	710	730	750	770	790

Problème 6. Ça texte beaucoup !

Énoncé

Lors d'un concours de rapidité d'envoi de SMS, quatre élèves sont en compétition.
— Le premier peut en envoyer 3 pendant que le deuxième en envoie 2.
— Le deuxième peut en envoyer 5 pendant que le troisième en envoie 6.
— Le troisième peut en envoyer 7 pendant que le quatrième en envoie 8.
Pendant la durée du concours, le deuxième a envoyé 70 SMS.
Quel est le vainqueur du concours ?

Mots-clés

Défi mathématique, fraction et comparaison, ratio, grandeur sans dimension.

Pourquoi ce problème ?

Ce problème, qui permet de fréquenter des grandeurs sans dimension, met en jeu plus de deux protagonistes. Cette situation s'apparente à un problème avec prise d'initiative et permet à l'élève de mobiliser en particulier les compétences « chercher », « calculer ».

Le problème permet d'avoir recours à différentes stratégies et de réinvestir la notion de ratio, performante ici, pour trouver une relation en termes de proportions entre les participants.

Stratégies d'enseignement

Même si le bon sens invite l'élève à comparer le premier et le quatrième scripteur, la comparaison entre le deuxième et le troisième est nécessaire au raisonnement.

EN EXPLORANT LA PROPORTIONNALITÉ ET EN PROCÉDANT PAR ÉTAPE

Premier	Deuxième
3	2
105	70

Deuxième	Troisième
5	6
70	84

Troisième	Quatrième
7	8
84	96

EN UTILISANT LES RATIOS ÉQUIVALENTS

Premier	Deuxième	Troisième	Quatrième
3	2		
3 x 5	2 x 5	2 x 6	
3 x 5 x 7	2 x 5 x 7	2 x 6 x 7	2 x 6 x 8
105	70	84	96

En résumé

- Les problèmes de ce chapitre proposent des énoncés numériques variés qui peuvent permettre des changements de cadre. Ils mobilisent de nombreuses notions mathématiques (fractions, proportionnalité, ratios, géométrie, pourcentages, équations). Ils présentent aux élèves des mathématiques concrètes, propices à la mise en œuvre d'une démarche expérimentale.

- Le travail proposé met en avant des outils (de manipulation, numériques, de modélisation) facilitant l'entrée des élèves dans la résolution de problèmes et permettant d'aborder des problèmes qui leur sont jusqu'ici résistants.

- Les élèves sont amenés à se créer des représentations mentales des nombres qui facilitent la compréhension et la résolution des problèmes. Ils apprennent également à mettre en œuvre une démarche scientifique allant des représentations à l'abstraction.

III

Problèmes algébriques

Le passage de l'arithmétique à l'algèbre constitue un point de rupture didactique pour l'élève qui doit être en capacité de généraliser des expressions, reconnaître des structures, modéliser une situation par une expression algébrique ou une équation pour résoudre un problème. Les problèmes de ce chapitre permettent de créer des représentations mentales aidant à une meilleure compréhension de ces concepts et pour lesquels l'utilisation du matériel contribue à la mise en œuvre du triptyque « manipuler, verbaliser, abstraire ». Les ressources d'accompagnement[66] relatives au calcul littéral, parues sur Éduscol, constituent des références pour ce chapitre.

Entrée historique

Créer, explorer, prouver ou apprendre des mathématiques avec des séries de problèmes[67]

Les mathématiques anciennes se présentent souvent sous la forme de séries de problèmes[68]. Ces successions de problèmes sont parfois de simples compilations d'exemples provenant de diverses sources, et, dans ce cas, ne présentent pas de cohérence particulière. Mais le plus souvent, elles sont pensées pour permettre au lecteur de comprendre, mettre en œuvre et contrôler des procédures mathématiques. Les séries de problèmes peuvent aussi avoir un but heuristique d'exploration, ou permettre une classification des méthodes mathématiques, ou bien avoir un rôle didactique[69]. Dans certains cas, une série de problèmes peut constituer une véritable théorie mathématique. On peut citer plusieurs exemples célèbres. Un des premiers

66 — https://media.eduscol.education.fr/file/Programmes/17/3/du_numerique_au_litteral_109173.pdf ; https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Calcul_litteral/35/8/RA16_C4_MATH_nombres_calcul_calcul_litteral_doc_maitre_548358.pdf
67 — Contributions de Christine Proust, Marc Moyon, Dominique Tournès, Éric Vandendriessche.
68 — Alain Bernard, « Les séries de problèmes, un genre au carrefour des cultures », éd. 2015, vol. 22, SHS Web of Conferences, EDP Sciences, Les Ulis : http://dx.doi.org/10.1051/shsconf/20152200001
69 — Voir la thèse de Charlotte de Varent qui porte sur ce dernier rôle.

traités d'algèbre en arabe, *Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison* de Al-Kwârizmî, propose une série de problèmes qui permettent l'exposition de la théorie générale de la résolution des équations quadratiques. Le *Liber Abaci* de Fibonacci contient des séries de problèmes permettant d'explorer diverses méthodes algébriques ou arithmétiques, en particulier la méthode de fausse position.

En Mésopotamie, les textes mathématiques étaient inscrits en écriture cunéiforme sur des tablettes d'argile[70]. Ces textes mathématiques, qui, pour la plupart, ont été écrits il y environ quatre mille ans, se présentent le plus souvent sous la forme de séries de problèmes plus ou moins longues (on connaît des cas de séries comprenant plusieurs centaines de problèmes !). Par exemple, la tablette conservée à l'université Yale sous le numéro YBC 4663 (figure 10) contient une série de problèmes résolus qui était probablement destinée à la formation mathématique des futurs érudits.

Cette tablette, ainsi que d'autres similaires, exposent de façon progressive et systématique les méthodes de résolution des problèmes linéaires et quadratiques au travers d'une situation concrète, ici, le coût du creusement d'un canal, présentée sous différents angles[71].

Figure 10. Tablette contenant une série de problèmes résolus. Université Yale, New Haven[72].

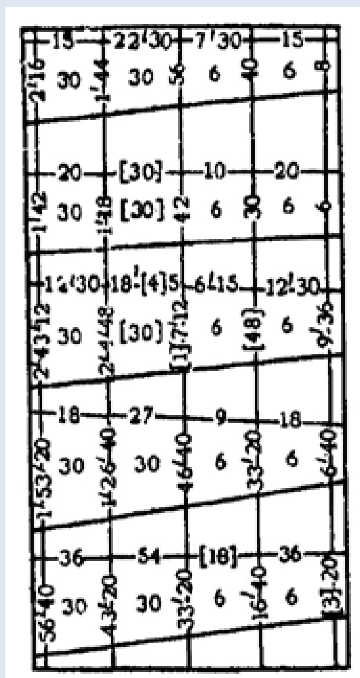


Figure 11. Transcription d'une tablette concernant le partage du trapèze en sous-trapèzes de même aire. Musée de l'Hermitage, Saint-Pétersbourg.

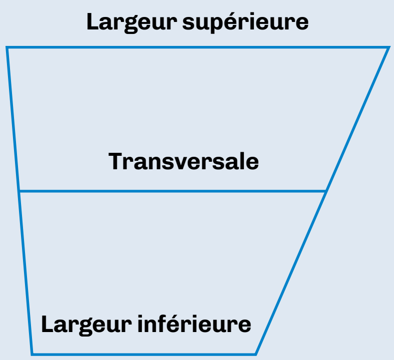
70 — Christine Proust, « Mathématiques en Mésopotamie », Images des Mathématiques, 2014 : http://images.math.cnrs.fr/Mathematiques-en-Mesopotamie.html

71 — Christine Proust, "How did Mathematics Masters Work Four Thousand Years Ago? Curricula and Progressions in Mesopotamia", in *The 'Resources' Approach to Mathematics Education*, edited by Luc Trouche, Gislaine Gueudet, Birgit Pepin, in *Advances in Mathematics Education*, p. 61-88, Springer, Berlin, 2019.

72 — Photo : C. Proust, crédit : Yale Babylonian Collection.

On connaît plusieurs tablettes qui contiennent des séries de problèmes posés sous la forme de figures géométriques. Par exemple, la figure 11 (voir p. 81)[73] montre la transcription d'une tablette conservée au Musée de l'Hermitage à Saint-Pétersbourg sous le numéro ERM 15189 ; elle concerne le partage de trapèzes en sous-trapèzes de même aire. Un autre exemple similaire concerne le partage de triangles en sous-triangles et trapèzes de même aire[74].

Bien que d'apparence géométrique, ces deux séries de problèmes relèvent plutôt de la théorie des nombres : la série des triangles fait appel à la recherche de triplets pythagoriciens ($a^2 + b^2 = c^2$) ; la série des trapèzes fait appel à celle de triplets dits « babyloniens » ($a^2 - b^2 = c^2$)[75].



La tablette des trapèzes conservée au Musée de l'Hermitage propose une série de variantes autour d'un problème classique des mathématiques cunéiformes que l'on pourrait formuler ainsi : un trapèze a pour bases 17 et 7 (« largeur supérieure » et « largeur inférieure » selon la terminologie du texte cunéiforme). Une ligne transversale est tracée parallèlement aux deux bases de façon à diviser le trapèze initial en deux petits trapèzes de même aire. Quelle est la transversale ?

L'algèbre pour résoudre des problèmes[76]

Le traité d'algèbre considéré comme étant le plus ancien qui nous soit parvenu est celui d'Al-Khwârizmî, *Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison*, dont le titre arabe est à l'origine du mot « algèbre ». Mais si on considère que l'algèbre est plus largement l'art de résoudre des équations, que ce soit par des méthodes de calcul sur des inconnues comme celles qu'on trouve dans les traités en langue arabe, ou par des procédés algorithmiques ou géométriques, cette branche des mathématiques est aussi ancienne que les mathématiques elles-mêmes et remonte à la très haute Antiquité. L'algèbre est ainsi constitutive des mathématiques qui furent élaborées non seulement en pays d'Islam et plus tard en Europe, mais aussi en Chine, en Inde, au Proche-Orient ancien ou en Grèce dans les périodes antiques et médiévales.

73 — Transcription par l'historien russe A. A. Vaiman (1961, Shumero-vavivonskaya matematika III-I tysyacheletiya do n.e., « Les mathématiques suméro-akkadiennes du troisième au premier millénaire avant notre ère »).
74 — Voir la photo sur le site https://cdli.ucla.edu/P254721
75 — Christine Proust, *Problèmes de partage : des cadastres à l'arithmétique*, CultureMath (ENS Ulm), 2012 : http://culturemath.ens.fr/
76 — Contributions de Christine Proust, Marc Moyon, Dominique Tournès, Éric Vandendriessche.

La résolution des équations linéaires et quadratiques est au cœur des mathématiques qui furent écrites sur des tablettes d'argile en Mésopotamie (sud de l'Irak actuel) et en Elam (ouest de l'Iran actuel) à l'époque paléo-babylonienne (début du deuxième millénaire avant l'ère commune). Il est du reste possible que la tradition mathématique créée à l'époque paléo-babylonienne se soit perpétuée dans la région de Bagdad jusqu'à l'époque d'Al-Khwârizmî, et que ce dernier en ait été un lointain héritier.

Résoudre des équations linéaires et quadratiques était un des buts de la formation mathématique avancée dans les écoles de scribes, notamment celles du sud de la Mésopotamie, qui nous ont laissé des dizaines de tablettes d'argile contenant les traces d'exercices de résolution de petits problèmes linéaires.

Voici ci-dessous la transcription d'une tablette d'écolier (figure 12). On y voit les traces d'un algorithme consistant en une suite de multiplications et de divisions. Les facteurs sont écrits dans la colonne de gauche, les produits et quotients dans la colonne de droite ; ainsi le produit de 5 et 2 est 10 ; ce résultat multiplié par 3 est 30 ; ce résultat divisé par 10 est 3[77] ; ce résultat multiplié par 2 est 6. Le but de ce calcul est de déterminer le coût du creusement d'un canal connaissant ses dimensions (5, 2 et 3), le volume extrait chaque jour par chaque ouvrier (10) et le salaire journalier des ouvriers (2). On trouve le même problème, avec des données légèrement différentes, dans d'autres tablettes, par exemple YBC 4663 déjà citée dans la notice historique précédente.

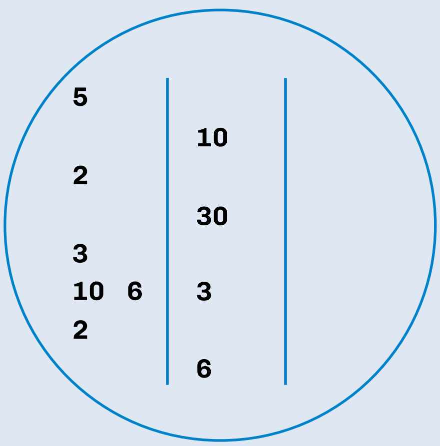


Figure 12. Transcription d'une tablette : un exercice d'écolier provenant de la ville d'Ur, en Mésopotamie du sud (numéro de publication UET 6, 233).

La partie la plus célèbre des mathématiques de Mésopotamie est celle qui porte sur la résolution des équations quadratiques. L'historien des mathématiques Jens Høyrup a montré qu'en Mésopotamie, les méthodes de résolution étaient basées sur des manipulations géométriques telles que des découpages et des recollements de rectangles. La tablette conservée au British Museum sous le numéro BM 13901 contient une collection de problèmes quadratiques qui constituent un véritable « manuel du second degré », pour reprendre l'expression du philosophe des mathématiques Maurice Caveing. Les méthodes de résolution consistaient à se ramener à quelques problèmes de base, essentiellement par des procédés d'agrandissement/réduction des longueurs, des surfaces ou des volumes, parfois selon une seule direction linéaire, ou même planaire pour les problèmes en trois dimensions, ce qui revient en langage moderne à un procédé de changement de variable. Un des problèmes de base qui servait à la résolution de toute une classe de problèmes, est en substance le suivant : trouver les dimensions d'un rectangle connaissant sa surface et son périmètre. Ces problèmes de base et certaines de leurs versions sophistiquées ont circulé en pays d'Islam et en Europe latine, inspirant de nouvelles méthodes algébriques et de nouveaux développements tels que la théorie des polynômes.

77 — À côté du 10, il est inscrit un 6 parce que dans la culture scribale savante, diviser par 10, c'est multiplier par 6. En effet, l'inverse de 10 est 6/60, c'est-à-dire 0;6 en système sexagésimal positionnel, qui s'écrit 6 dans la notation flottante des scribes.

Point sur la recherche[78]

Depuis plusieurs dizaines d'années, les recherches en didactique de l'algèbre sont nombreuses et ont conduit à délimiter les types de problèmes et les objets qui sont propres à l'algèbre élémentaire à enseigner au collège, ses spécificités du point de vue de l'activité mathématique qu'elle engendre, et ses relations avec l'arithmétique.

Gérard Vergnaud, Anibal Cortès et Pierre Favre-Artigue[79] ont montré que le passage entre arithmétique et algèbre dans le traitement des problèmes était difficile pour les élèves : ils spécifient une double rupture d'ordre épistémologique, l'importance de travailler dans la durée et de proposer des problèmes qui motivent ce passage. Si Carolyn Kieran[80] note des continuités entre l'arithmétique et l'algèbre (portant notamment sur les problèmes et les symboles employés), elle pointe aussi des ruptures potentielles tant du point de vue de la construction de la rationalité mathématique attendue pour résoudre différents types de problèmes, que du point de vue de la fonction d'adaptabilité dans l'interprétation des notions (égalité, lettres, expressions) selon les usages visés.

En effet, pour structurer l'enseignement de l'algèbre, au cours du cycle 4, on peut distinguer deux dimensions, *outil* et *objet*[81], non indépendantes et partiellement hiérarchisées, qui vont engendrer différents types d'activités mathématiques[82] qui sont aussi précisés dans les programmes actuels et les documents d'accompagnement.

Dans sa dimension *outil*, l'algèbre est mobilisée :
— comme outil de généralisation et de preuve dans le cadre numérique notamment pour résoudre des problèmes dits « de pattern » ou des programmes de calcul[83], la lettre ayant le statut de variable ;

78 — Contributions de Brigitte Grugeon-Allys, Julia Pilet et Sylvie Coppé.
79 — Gérard Vergnaud, Anibal Cortès, Pierre Favre-Artigue, « Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles. Problèmes épistémologiques et didactiques », in Gérard Vergnaud, Guy Brousseau, Michel Hulin (dir.), *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*, Actes du colloque de Sèvres, p. 259-288, Éditions La pensée sauvage, Grenoble, 1987.
80 — Carolyn Kieran, "Learning and Teaching Algebra at the middle School through College Levels: Building Meaning for Symbols and their Manipulation", in Frank K. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, p. 707-762, Greenwich, CT: Information Age Publishing, 2007.
81 — Régine Douady, « Jeux de cadres et dialectique outil/objet », *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), p. 5-32, 1986.
82 — Brigitte Grugeon-Allys, Julia Pilet, Françoise Chenevotot-Quentin, Élisabeth Delozanne, « Diagnostic et parcours différenciés d'enseignement en algèbre élémentaire », in Lalina Coulange, Jean-Philippe Drouhard, Jean-Luc Dorier, Aline Robert (dir.), *Enseignement de l'algèbre élémentaire : Bilan et perspectives*, p. 137-162, Éditions La pensée sauvage, Grenoble, 2012.
83 — Christophe Alves, Sylvie Coppé, Vincent Duval, Alexandra Goislard, Hélène Kuhman, Sylvie Martin Dametto, Sophie Roubin, *Utilisation des programmes de calcul pour introduire l'algèbre au collège*, *Repères Irem*, 92, p. 9-30, 2013.

— comme outil de résolution *via* la modélisation pour résoudre sous forme d'équations des problèmes « arithmétiques » formulés en langue naturelle, la lettre ayant le statut d'inconnue et, au-delà, pour résoudre sous forme de relations fonctionnelles entre données et variables des problèmes intra ou extra mathématiques ;
— comme outil de calcul dans les cadres algébrique et fonctionnel[84].

Dans sa dimension *objet*, l'algèbre est un ensemble structuré d'objets – les expressions algébriques, les formules, les équations, les inéquations – avec des propriétés spécifiques, des représentations sémiotiques associées à différents registres[85] et des modes de traitement. Le registre des écritures algébriques est en articulation avec d'autres registres sémiotiques (registre des écritures numériques, registre des représentations graphiques, registre des figures géométriques, registre de la langue naturelle). Le traitement formel des objets met en jeu leur double aspect syntaxique et sémantique, ce qui donne une juste place aux aspects technique et théorique du traitement algébrique. Sur ce dernier aspect, certaines recherches ont montré qu'il était important de redonner une place centrale à la distributivité de la multiplication sur l'addition comme élément de justification des calculs[86] alors qu'elle est souvent remplacée par des arguments de bon sens qui ne permettent pas un contrôle efficace des calculs fondé sur l'équivalence des expressions et favorisent des erreurs classiques et résistantes comme celle, bien connue, de concaténation « $3x + 5 = 8x$ »[87]. Enfin, dans la détermination et le traitement des expressions algébriques, il est nécessaire de distinguer l'aspect procédural ($2x + 1$ peut être vu comme un programme de calcul qui multiplie par 2 et ensuite ajoute 1), mais également l'aspect structural (comme l'expression algébrique qui désigne un nombre impair, somme du double d'un entier et de 1)[88].

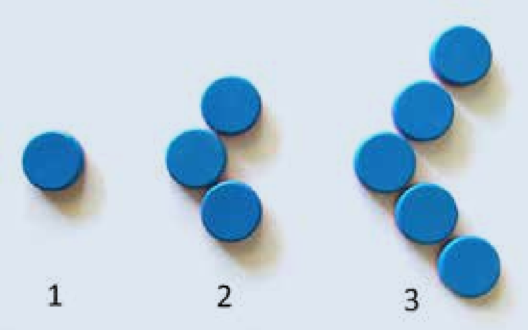
84 — Yves Chevallard, « Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège, première partie. L'évolution de la transposition didactique », *Petit x*, 5, p. 51-94, 1985 ; « Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège, deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation », *Petit x*, 19, p. 43-75, 1989 ; « Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège, troisième partie. Voies d'attaque et problèmes didactiques », *Petit x*, 23, p. 5-38, 1990.
85 — Raymond Duval, « Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ? », *Recherches en didactique des mathématiques*, vol 16(3), p. 349-382, Éditions La pensée sauvage, Grenoble, 1995.
86 — Teresa Assude, Sylvie Coppé, André Pressiat, « Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au collège : atomisation et réduction », in Lalina Coulange, Jean-Philippe Drouhard, Jean-Luc Dorier, Aline Robert (dir.), « Enseignement de l'algèbre élémentaire : bilan et perspectives », p. 41-62, Éditions La pensée sauvage, Grenoble, 2012.
87 — Lesley Booth, « Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire », *Petit x*, n° 5, p. 5-17, 1985 ; Dina Tirosh, Ruhama Even, Naomi Robinson, "Simplifying Algebraic Expressions: Teacher Awareness and Teaching Approaches", *Educational Studies in Mathematics*, 35, p. 51- 64, 1998.
88 — Anna Sfard, "On the Dual Nature of Mathematics Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the same Coin", *Educational Studies in Mathematics*, 22, p. 1- 36, 1991.

Les recherches actuelles[89] tendent à proposer d'entrer dans la pensée algébrique plus tôt dans la scolarité (sans introduire les lettres) notamment avec des activités de généralisation ou un travail sur l'équivalence des expressions numériques et l'égalité vue comme une relation d'équivalence (courant de l'*Early Algebra*)[90].

Problème 1. Un pattern[91] de jetons

Énoncé

Avec des jetons identiques, je construis des motifs[92] selon le modèle évolutif ci-contre.



a. En expliquant votre règle, calculer le nombre de jetons des motifs aux rangs 4, 5 puis 10.
b. Calculer le nombre de jetons du motif au rang 100.
c. Trouver un moyen de calculer le nombre de jetons du motif à n'importe quel rang.

---

89 — Un ouvrage de référence reste la référence, N.D.L.R. Romulo Lins, Teresa Rojano, Alan Bell, Rosamund Sutherland, *Approaches to Algebra*, in Rosamund Sutherland, Teresa Rojano, Alan Bell, Romulo Lins (eds), *Perspectives on School Algebra. Mathematics Education Library*, vol 22, Springer, Dordrecht, 2001. Le développement des ordinateurs ne fut pas sans impact sur le développement de la pensée algébrique. Un nombre important de recherches sur les Computer Algebra Systems (CAS) ont été faites tant aux États-Unis (James T. Fey) qu'en Europe (Michèle Artigue en France). Ces travaux ont eu un grand impact à la fois sur ce que devait être l'enseignement de l'algèbre dans le secondaire que sa didactique.
90 — Luis Radford, "Algebraic Thinking from a Cultural Semiotic Perspective", *Research in Mathematics Education*, 12, p. 1-19, 2010; "The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking", Mathematics Education Research Group of Australasia, 26, p. 257-277, 2014; Carolyn Kieran, *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12- Year-Olds: The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice*, Springer, New York, 2018. Notons aussi les travaux importants de David Carraher ou James Kaput (USA), Romulo Lins (Brazil), Toshiakira Fujii (Japan) ou Lesley Lee (Canada), N.D.L.R.
91 — Voir les définitions du chapitre 4. **Pattern** : anglicisme signifiant « motif » (structure), « modèle à reproduire ». C'est une suite d'objets dont tous les éléments sont reliés les uns aux autres par une règle spécifique.
92 — **Motif de base** (« *core* » en anglais) : chaîne d'éléments la plus courte qui se répète dans le pattern répétitif ou qui évolue dans le pattern évolutif.

Mots-clés

Langage naturel, pattern, pensée algébrique, généralisation, structure.

Pourquoi ce problème ?

Dans ce problème, les élèves sont amenés à chercher, identifier une structure (ici l'écriture générale d'un nombre impair) en repérant une régularité et en argumentant.

Ce genre de problème de généralisation introduit naturellement l'algèbre et invite au recours à la lettre.

Ressorts de continuité ou éléments de progressivité

Ce genre de problèmes peut être proposé dès le cycle 3. Il peut se gérer sans le recours à la lettre, en exprimant la régularité en langage naturel : « on ajoute deux jetons à chaque rang ».

L'expression sous forme littérale de nombre de jetons au rang n conduit à l'expression $2n - 1$ (et de manière équivalente $2n + 1$) pour un nombre impair.

Stratégies d'enseignement

Tous les élèves ne parviendront pas à l'écriture littérale, cependant, ils sauront verbaliser une règle en langage naturel (« on ajoute 2 à chaque étape »). Les élèves devront argumenter pour convaincre leurs camarades de la cohérence de la règle qu'ils proposent en lien avec les premières étapes du pattern.

Les premiers rangs peuvent être dessinés ou construits avec du matériel, les élèves peuvent alors dénombrer les jetons. Le choix d'un rang éloigné pour lequel le matériel ne serait pas suffisant pousse à la généralisation.

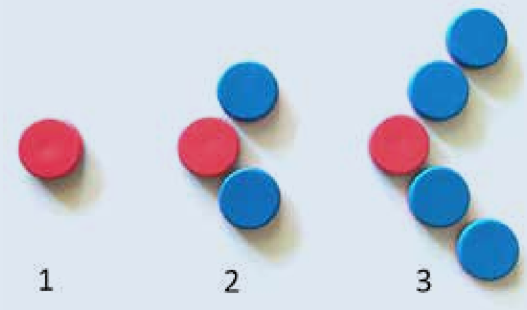


Figure 13. Aspect structural.

L'utilisation de jetons de couleurs différentes permet de différencier l'invariant (le motif de base, en rouge sur la figure ci-contre) et les variables (les ajouts) et de mettre en valeur les aspects structuraux et procéduraux.

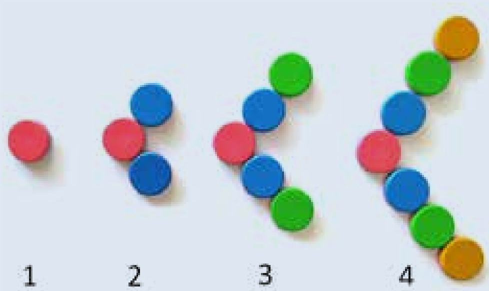


Figure 14. Aspect procédural.

On pourra aussi poser les questions suivantes : « Existe-t-il un rang où le motif contient 258 jetons ? Et un rang où le motif contient 321 jetons ? » Cette question fait le lien entre généralisation et équations.

TRANSFERT

La réorganisation des jetons fait apparaître la suite des cardinaux des motifs successifs « 1 ; 3 ; 5 ; ... ». Les nombres introduits correspondent à la liste des nombres impairs (positifs). La structure des motifs amène à la construction de l'expression algébrique.

Problème 2. Un calcul surprenant

Énoncé

Sans calculatrice

a. Calculer $1 \times 3 - 2^2$.

b. Calculer $2 \times 4 - 3^2$.

c. Calculer $3 \times 5 - 4^2$.

d. Conjecturer le résultat de $317 \times 319 - 318^2$.

e. Proposer une expression sur ce même modèle mettant en jeu trois autres nombres entiers.

f. QCM : Le professeur généralise ces calculs en proposant l'expression $(n-1)(n+1)-n^2$ mettant en jeu les trois nombres $(n-1)$, $(n+1)$ et n. Que représente n ?

— le plus petit des nombres ?

— le nombre du milieu ?

— le plus grand des nombres ?

Mots-clés

Développement, généralisation, traduction de propriétés générales, identifier la structure d'une expression littérale, reconnaître des invariants, identités remarquables, produire une expression littérale.

Pourquoi ce problème ?

Ce problème, qui prend appui sur le champ numérique, vise à préparer les élèves aux exercices de démonstration d'une propriété générale qui seront proposés dans la suite de la scolarité.

Il s'agit d'entraîner les élèves à identifier des structures, reconnaître des relations entre les nombres, des invariants sur des expressions numériques et les nommer avant de chercher à généraliser. Le travail qui porte sur la structure (régularité) d'une expression est préparatoire au calcul littéral et à la compétence « modéliser ». L'objectif de formation poursuivi ici se rapproche de celui développé dans le chapitre 4 sur les patterns.

Ce problème permet également d'initier les élèves à la production d'expressions littérales en appréhendant le sens de ces expressions. Il est aussi une initiation à énoncer des conjectures.

Ressorts de continuité ou éléments de progressivité

Ce type de problème peut être proposé assez tôt dans le cycle 4 (en 5^{e}) puisqu'il mobilise essentiellement des expressions numériques. Il vient en anticipation du chapitre relatif au calcul littéral. En prolongement, dès la 4^{e}, la démonstration du résultat sera proposée. En 3^{e}, il peut donner lieu à recourir aux identités remarquables.

Stratégies d'enseignement

La verbalisation est à encourager avant le passage à l'utilisation de la lettre. Dans certains cas, comme dans ce problème, la difficulté à verbaliser permet de motiver le recours à la lettre. Il est par exemple plus facile de dire $n(n + 2)$ que de dire « le produit d'un entier par l'entier consécutif de son consécutif ».

Laisser à l'élève l'initiative du choix de la variable conduit à différentes expressions littérales qui seront l'objet des prolongements.

DES RITUELS POUR ALLER JUSQU'À LA LETTRE

Les élèves doivent prendre l'habitude d'analyser la nature d'un calcul avant de l'effectuer. Pour cela, il convient de les entraîner très régulièrement, par des questions flash tout au long du cycle, à cette reconnaissance de relations entre les nombres, de structures communes à plusieurs calculs[93].

QUESTION 1

a. Comparer le résultat de $1 + 2 + 3$ avec celui de $\frac{3 \times 4}{2}$.

b. Comparer le résultat de $1 + 2 + 3 + 4$ avec celui de $\frac{4 \times 5}{2}$.

c. Comparer le résultat de $1 + 2 + 3 + 4 + 5$ avec celui de $\frac{5 \times 6}{2}$.

d. Conjecturer au moins trois autres égalités du même modèle.

QUESTION 2

a. Comparer le résultat de $1 + 2 + 2^2$ avec celui de $2^3 - 1$.
b. Comparer le résultat de $1 + 2 + 2^2 + 2^3$ avec celui de $2^4 - 1$.
c. Comparer le résultat de $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4$ avec celui de $2^5 - 1$.
d. Conjecturer au moins trois autres égalités du même modèle.

QUESTION 3

a. Trouver l'intrus :
8 x 9   24 x 32   11 x 12   63 x 64   58 x 59
b. Proposer un autre exemple de calcul relevant de la même famille.
c. Observer l'image suivante. Quelle formule faut-il saisir dans la cellule B2 pour obtenir par recopie vers le bas le second facteur ?

	A	B
1	Premier facteur	Second facteur
2	12	
3	13	
4	14	
5	15	
6	16	
7		

93 — Voir https://pisa2022-maths.oecd.org/fr/, et les six concepts clés qui structurent et soutiennent le raisonnement.

Problème 3. Une course cycliste

Énoncé

Pour la fête d'un village, on organise une course cycliste. Une prime totale de 320 € sera répartie entre les trois premiers coureurs. Le premier touchera la prime or, le second, la prime argent et le troisième la prime bronze. La prime or s'élève à 70 € de plus que la prime argent et la prime bronze s'élève à 80 € de moins que la prime argent. Déterminer la prime de chacun des trois premiers coureurs[94].

Mots-clés

Rechercher la « brique unité », décomposer un problème en sous-problèmes, équations du type $ax + b = c$, modéliser, calculer.

Pourquoi ce problème ?

On propose ici d'illustrer comment la modélisation (ici le modèle en barres) permet d'initier les élèves à la structure algébrique et de favoriser une représentation mentale du sens du signe égal grâce aux égalités de longueur des barres.

Le problème permet de traduire des relations entre deux grandeurs et de travailler le passage du langage naturel à des calculs (congruence entre grandeur prix et grandeur longueur). Il s'agira de ne pas sous-estimer la difficulté que cela peut représenter pour certains élèves.

Ressorts de continuité ou éléments de progressivité

Dès la 6e (voire CM2), ce problème peut être proposé même si plusieurs inconnues sont en jeu, si on s'engage dans une démarche de modélisation.

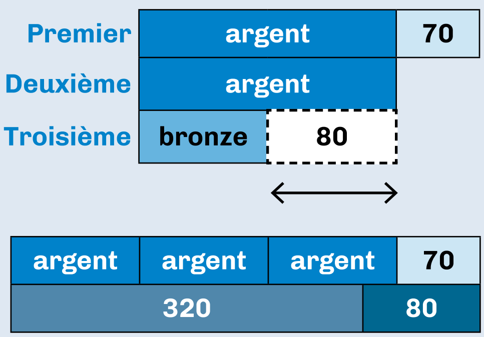
Au cycle 4, il est le support pour introduire la lettre x pour la prime argent ou encore pour la prime bronze.

94 — D'après un brevet blanc, collège Django Reinhardt, Toulon.

Stratégies d'enseignement

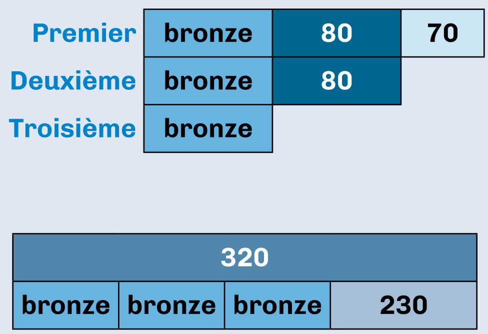
Le recours au modèle en barres suppose de rechercher une « brique unité ». Selon le choix de celle-ci (l'inconnue), les équations obtenues seront différentes. Il est intéressant de montrer aux élèves qu'on obtient la même solution au problème, quel que soit le choix de l'inconnue.

« Brique unité » : prime argent



(en ajoutant une brique de 80)

« Brique unité » : prime bronze



Au cycle 4, le passage du registre de représentation graphique (modèle en barres) au registre des équations amène aux équations suivantes :

Si x représente le prix argent :	Si x représente le prix bronze :
$(x + 70) + x + (x - 80) = 320$	$x + (x + 80) + (x + 150) = 320$
$x + x + x + 70 = 400$	$3x + 230 = 320$

Problème 4. Dessine-moi une expression algébrique

Énoncé

a. Représenter géométriquement l'expression $a^2 + 2(a + 1)$ où a désigne un nombre positif.

b. Montrer que, quelle que soit la valeur du nombre a positif, les quatre expressions suivantes sont égales :

$a^2 + 2(a + 1)$ $\qquad (a + 2)^2 - 2(a + 1)$ $\qquad a(a + 2) + 2$ $\qquad a^2 + 2a + 2$

Mots-clés

Développement, généralisation, identités remarquables, transformer une expression littérale, aire de rectangles.

Pourquoi ce problème ?

Ce problème convoque l'aspect structural d'une expression. Le choix est de travailler le calcul littéral à partir de représentations géométriques. Cette approche favorise la construction ou le réinvestissement des représentations mentales de la distributivité et du produit. L'approche géométrique proposée ici présente l'avantage de réduire les erreurs types $a(a + 2) = a^2 + 2$.

Ce genre de problèmes, que l'on retrouve fréquemment dans les évaluations internationales, permet également de travailler le sens d'une identité.

Ressorts de continuité ou éléments de progressivité

Dès la 5e, ce problème permet aux élèves de se créer des représentations mentales des opérations. La fréquentation régulière de ce type de représentation, éventuellement en questions flash, contribue à la mémorisation de faits algébriques (développements, factorisations), dans l'esprit de ce qui est fait à l'école dans le champ numérique (nombres rectangles).

À partir de la 4e, il peut se traiter par calcul et donner l'occasion de mobiliser la distributivité (et les identités remarquables).

Stratégies d'enseignement

Pour la question a., en fonction du niveau de classe ou dans le cadre d'une différenciation, il est possible de proposer une figure à compléter, comme ci-dessous.

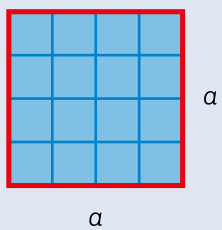


Figure 15. Figure donnée.

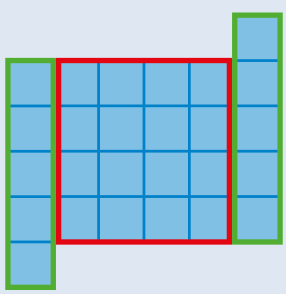
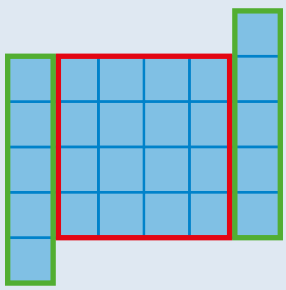


Figure 16. Exemple de figure attendue.

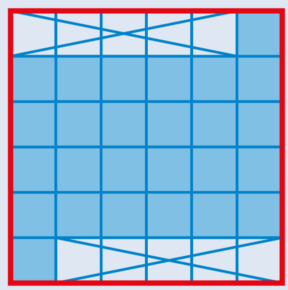
Pour la question b., le sens de chaque expression littérale se construit à l'aide de représentations d'aires de rectangles (nombres rectangles, représentation de la multiplication). Il est intéressant de confier aux élèves la responsabilité de produire en autonomie certaines représentations.

Des considérations géométriques permettent ensuite de prouver l'égalité entre toutes les expressions. Certains élèves auront du mal à se détacher de l'idée que les représentations sont réalisées pour une valeur particulière de a. Il importe donc d'expliciter que la valeur de a est arbitraire et que le raisonnement est valable quelle que soit la valeur positive de a (sens de l'identité).

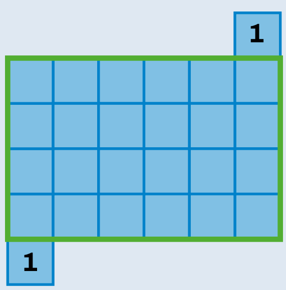
Ici, encore, le recours au matériel de manipulation reste pertinent, dans le cadre d'une différenciation ou pour la construction de représentations mentales.



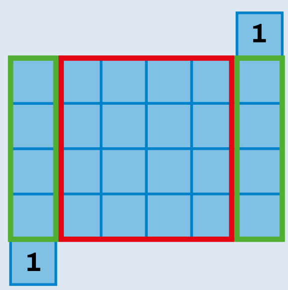
$a^2 + 2(a + 1)$



$(a + 2)^2 - 2(a + 1)$



$a(a + 2) + 2$



$a^2 + 2a + 2$

Problème 5. La devinette

Énoncé

Léa et Ali ont choisi un nombre (entier positif). Léa le multiplie par 5 et ajoute 35. Ali le multiplie par 2 et ajoute 146. Ils trouvent le même nombre à la fin.
Quel nombre ont-ils choisi ?

Mots-clés

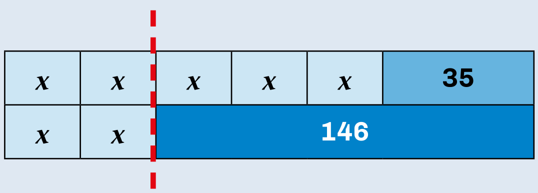
Équations du premier degré, modéliser, calculer.

Pourquoi ce problème ?

Ce problème permet de rentrer dans l'algèbre en proposant une situation qui ne conduit pas à une équation du premier degré du type $ax + b = d$ pour laquelle il est possible de remonter les calculs par des opérations réciproques en utilisant l'arithmétique. Les problèmes qui mènent à des équations du type $ax + b = cx + d$ montrent la nécessité d'avoir recours aux propriétés des égalités.

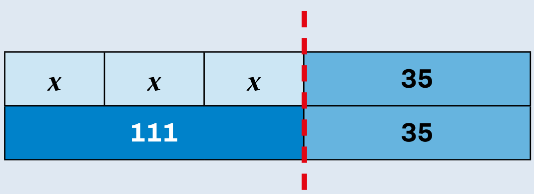
Ressorts de continuité ou éléments de progressivité

Faire vivre en parallèle la modélisation par les grandeurs et l'écriture algébrique qui lui correspond (dans les deux sens) permet une meilleure appréhension du calcul algébrique. Ici, le parallèle entre les manipulations sur le modèle en barres et leur traduction algébrique donne du sens aux propriétés mobilisées à chaque étape de la résolution.



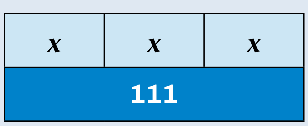
$$5x + 35 = 2x + 146$$

$$5x + 35 - 2x = 2x + 146 - 2x$$



$$3x + 35 = 111 + 35$$

$$3x + 35 - 35 = 111 + 35 - 35$$



$$3x = 111$$

$$x = 37$$

DES RITUELS POUR ALLER JUSQU'À LA DÉMONSTRATION

QUESTION 1

Je pense à un nombre, je lui ajoute 3. Je multiplie le tout par 2, puis je soustrais 2 fois le nombre de départ.
a. Faire quelques essais. Que constate-t-on ?
b. Est-ce vrai pour n'importe quel nombre ? Si oui, le prouver.

QUESTION 2 *(mise en équation)*

a. Anton dit que le nombre 45 est la somme de 3 entiers consécutifs. Trouver ces nombres.
b. Jean dit que 61 est aussi la somme de 3 entiers consécutifs. Trouver ces nombres.

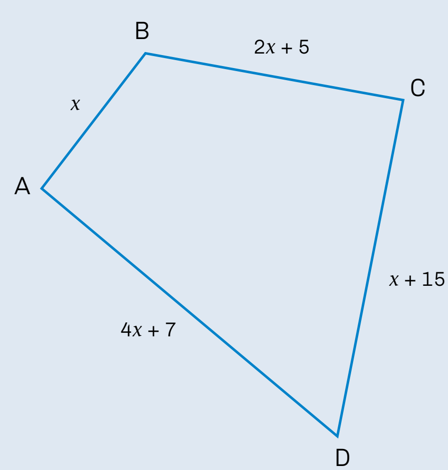
QUESTION 3 *(équivalence de programmes de calcul)*

Voici 3 programmes de calcul.
— Je pense à un nombre, j'ajoute 6. Je multiplie le tout par 5.
— Je pense à un nombre, je le multiplie par 5. J'ajoute 30.
— Je pense à un nombre, je le multiplie par 5. J'ajoute 6.
a. Sans faire d'essais, indiquer si certains de ces trois programmes de calcul donnent en sortie un résultat identique.
b. Faire quelques essais pour vérifier.
c. Prouver sa conjecture.

Problème 6. Ranger les côtés

Énoncé

Le périmètre de ce quadrilatère est de 117 cm.
Ranger par ordre croissant les longueurs de ses côtés.



Mots-clés

Ordre de grandeur, décimaux, résolution d'équations, domaine de validité, raisonner, modéliser, calculer.

Pourquoi ce problème ?

Les élèves français ne sont pas à l'aise avec ce type de problèmes dans les évaluations internationales.

Le support visuel conduit à un hiatus didactique entre représenter et modéliser : la figure n'est certainement pas à l'échelle et même incorrecte, ce qui peut troubler l'élève qui voudrait reporter/mesurer « x » dans « $x + 15$ » ou « $2x + 5$ » et déterminer la valeur de « x ».

La notion de périmètre est ici réinvestie et pourrait conduire à déplier le bord pour le ramener à une modélisation en barres[95] :

117										
x	x	x	5	x	15	x	x	x	x	7

117								
x	x	x	x	x	x	x	x	27

Ce problème offre la possibilité de raisonner sur les longueurs (les mesures des longueurs) sans calculer au préalable la valeur de x. En effet, le travail de l'élève peut être engagé facilement – suite à la première observation que x représente un nombre positif ; la longueur [AB] est donc la plus petite.

Ressorts de continuité ou éléments de progressivité

Ce genre d'énoncé peut être proposé dès la 5e et même en 6e (sur des triangles) en adaptant les variables, par exemple : « La longueur de [BC] est le double de la longueur de [AB], celle de [CA] vaut la longueur de [AB] augmentée de 5 cm. »

Stratégies d'enseignement

On peut faire vivre ce genre de problèmes tout le long du cycle 4 en jouant sur le nombre de côtés et la complexité des expressions algébriques utilisées.

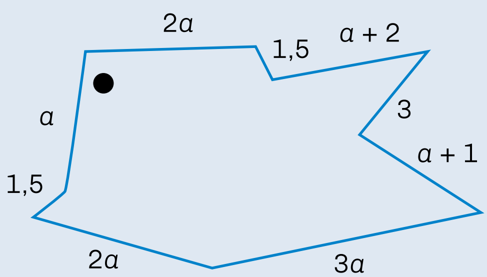
En fonction des choix, on pourra montrer qu'il est moins coûteux, dans certains cas, de recourir à l'algèbre.

95 — L'utilisation de réglettes © Cuisenaire est appropriée pour montrer par la manipulation que l'on obtient l'expression algébrique du périmètre : $8x + 27$.

Stratégies	Notions et outils mobilisés	Pertinence et commentaires
Procédure essais/ ajustements	Calculs numériques Recours au tableur Comparaison de nombres	Démarche expérimentale qui permet de conjecturer le domaine de validité de x. On peut mettre en évidence, par exemple, que x doit être supérieur à 10. Le recours au tableur conduit à un travail sur l'aspect procédural des expressions algébriques. Il permet d'affiner l'encadrement de la valeur de x.
Le calcul littéral (expression algébrique du périmètre)	Mise en équation et résolution d'une équation du type $ax + b = c$ Substitution Comparaison de nombres	Le recours à cette stratégie conduit à un calcul algébrique qui nécessite une bonne compréhension de la notion de périmètre. **Point de vigilance :** l'obtention de la valeur de x n'est qu'une étape dans la résolution du problème, ce qui peut représenter un obstacle pour certains élèves.
Raisonnement à partir des expressions algébriques en jeu	Comparaisons raisonnées Transitivité de la relation d'ordre Calcul numérique	On travaille ici l'aspect structural de chaque expression et la nature du nombre x. Certaines comparaisons sont aisées : $x < x + 15$ La comparaison de $4x + 7$ avec $2x + 5$ conduit à mettre en avant la décomposition : $4x + 7 = (2x + 5) + (2x + 2)$ Les décompositions $2x + 5 = x + x + 5$ et $x + 15 = x + 10 + 5$ permettent de comparer ces longueurs dès que $x > 10$.

Variante[96]

Dans l'énoncé qui suit, l'évocation du périmètre – grandeur géométrique travaillée dans différentes situations – et son utilisation ramènent le problème à une expression de degré 1 en fonction de la variable a.



a. Calculer le périmètre de ce dessin (un poisson) pour les valeurs de a suivantes, l'unité choisie étant le centimètre.

$a = 2 \quad a = 3 \quad a = \frac{1}{2} \quad a = \frac{1}{10} \quad a = 8 \quad a = 10$

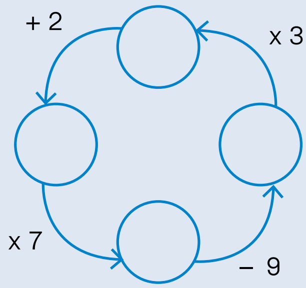
b. Trouver une méthode qui permet d'aller le plus vite possible pour faire tous ces calculs.

96 — http://pegame.ens-lyon.fr/activite.php?rubrique=1&id_theme=54&code_niveau=N07&id_activite=19 ; http://pegame.ens-lyon.fr/

Problème 7. Les nombres manquants

Énoncé

Trouver les nombres qui manquent[97] dans les bulles.



Mots-clés

Équation, priorités opératoires, choix de l'inconnue, égalité, développement.

Pourquoi ce problème ?

Même si l'énoncé est simple en apparence, il porte un implicite fort (il faut retrouver le même nombre après un cycle complet). D'autre part, une procédure par essais/ajustements s'avère peu efficace, car le nombre recherché est un décimal et il n'y a pas de stratégie de réajustement claire pour les élèves.

Ce problème motive donc l'introduction de l'inconnue sous forme littérale, car le suivi des opérations est trop complexe. En fonction du choix effectué pour la bulle de départ, les priorités opératoires nécessitent le recours à plus ou moins de parenthèses.

97 — D'après *Repère Irem* (Guichard).

Il offre l'occasion de questionner le sens et la symétrie du signe égal et de conduire du calcul littéral. Il permet de travailler l'aspect procédural[98] d'une expression puisqu'il s'agit de produire une expression qui traduit l'enchaînement des opérations.

Plusieurs choix sont possibles pour l'inconnue de départ, ce qui conduit à différentes mises en équation, mais menant à la même solution ; ce point est important en résolution de problèmes où des modélisations (ici des mises en équations) différentes peuvent être menées, mais qui aboutissent en général aux mêmes conclusions[99].

Ressorts de continuité ou éléments de progressivité

Ce problème peut être proposé en 4e. Il permet de réinvestir plusieurs notions : la mise en équation, le respect des priorités opératoires, le développement, le calcul avec des fractions, etc.

Le nombre de bulles est une variable didactique sur laquelle il est possible d'agir pour proposer ce problème de la 5e à la 3e (certains d'entre eux n'auront pas de solution).

Stratégies d'enseignement

On peut commencer par faire exécuter l'algorithme par les élèves avec des nombres bien choisis afin qu'ils comprennent la nature du problème. En effet, imaginer qu'après avoir effectué les quatre opérations successives, on retrouve le nombre du départ n'est pas naturel pour eux, puisque c'est un implicite du codage utilisé. Cela permet de travailler le sens du signe égal et fait un pont avec l'algorithmique et les programmes de calcul.

Substituer une lettre au nombre de départ est une démarche complexe en résolution de problèmes et se construit dans la durée, et surtout par nécessité à travers des problèmes idoines.

98 — Une même expression peut être considérée de deux points de vue :
– soit elle exprime un programme de calcul : elle indique une suite d'opérations qu'il faut effectuer afin d'obtenir le nombre que renvoie le programme de calcul quand on donne des valeurs numériques aux lettres qui y figurent ; on évoque alors le caractère « procédural » de l'expression ;
– soit elle est considérée comme un objet dont on peut décrire la forme et avec lequel on va pouvoir faire de nouveaux calculs (réduction, factorisation, développement, substitution dans une autre expression, etc.) ; on évoque alors le caractère « structural » de l'expression.

99 — Pour les problèmes plus complexes, des modélisations différentes peuvent aboutirent à des solutions différentes.

Le matériel mis à disposition des élèves constitue une variable didactique : on pourra, par exemple, prévoir des reproductions du schéma de l'énoncé de manière à permettre aux élèves d'écrire dans les bulles les résultats intermédiaires qu'ils pourront réduire à chaque étape de manière à obtenir une équation plus simple qui ne mobilise pas de parenthèses imbriquées.

En fonction des opérateurs proposés, on pourra jouer sur la nature des nombres : en remplaçant la multiplication par 7 par une multiplication par 6, on obtient des solutions rationnelles non décimales.

On pourra aussi imaginer des prolongements de ce problème en proposant de faire deux fois (ou plus) le cycle avant de retrouver le même nombre de départ.

Didactique. Les variables en algèbre

La notion de variable en algèbre est proche de la notion de variable déclarée en programmation qui revient à réserver un « espace » dans la mémoire de l'ordinateur en lui donnant un nom et en lui affectant des valeurs qui peuvent évoluer au cours du programme. Le modèle en barres est un exemple concret permettant une représentation mentale de ce concept, avec l'utilisation de briques qui, comme les variables, peuvent porter une étiquette et contenir une donnée.

Les logiciels de géométrie dynamique sont des outils pour créer des représentations mentales de la lettre qui dépassent le statut d'inconnue (par exemple, faire varier une aire en fonction d'une longueur).

L'utilisation d'un tableur est une autre occasion de donner du sens à la notion de variable parce que dans l'édition d'une formule, ce sont les adresses des cellules qui sont prises en compte et non leurs contenus du moment.

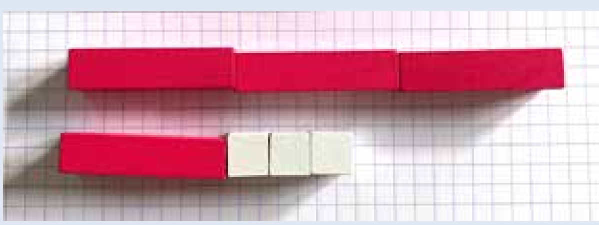
Le travail de pré-algèbre, qui peut être mené grâce à l'utilisation de matériel adapté (cubes emboîtables, réglettes © Cuisenaire) ou la modélisation en barres, assure dès le primaire une rencontre précoce avec le concept de l'objet (l'unité, la lettre) comme variable et comme inconnue. Cette démarche permet de développer la pensée algébrique attendue à partir du cycle 4 où la notion de variable est travaillée à travers les fonctions.

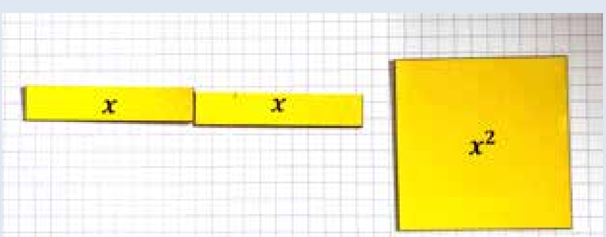
Didactique. Du matériel de manipulation pour introduire la lettre

L'introduction du matériel de manipulation (réglettes © Cuisenaire, cubes emboîtables, etc.) favorise la verbalisation entre élèves et conduit à l'introduction de la pré-algèbre[100] via la modélisation. Les allers-retours entre l'énoncé, l'usage du matériel et le modèle permettent de vérifier la pertinence des stratégies mises en œuvre par les élèves tout en développant leur autonomie.

Figures 17 et 18. Exemples de matériel de manipulation : cubes emboîtables et réglettes © Cuisenaire.

L'introduction de la pré-algèbre permet de construire des représentations mentales associées aux écritures algébriques et d'éviter les erreurs du type « $x + 3 = 3x$ » ou encore « $x + x = x^2$ », les représentations, à l'aide du matériel, de $x + 3$ et de $3x$ ou de $x + x$ et x^2 se distinguant nettement :





100 — Pré-algèbre : ce terme désigne une étape intermédiaire (ou une écriture symbolique) entre l'arithmétique et l'algèbre (opérations à trous, exemples génériques, « 3 stylos + 2 cahiers = 8,5 euros »).

En résumé

- Les problèmes de ce chapitre invitent à travailler la pré-algèbre. Le modèle en barres est un outil efficace pour appréhender la notion de variable, le sens du signe égal, la technique opératoire et les propriétés des égalités. Il permet de travailler sur des équations (ou des systèmes d'équations) et de les résoudre sans les formaliser.

- Pour faciliter la compréhension des expressions littérales, les élèves sont entraînés à identifier des structures, à repérer des invariants.

- Les élèves travaillent également les changements de registre, en appréhendant des expressions littérales à l'aide des nombres rectangles, se construisant ainsi des représentations mentales géométriques.

- Un enjeu de formation essentiel est de mettre en avant la force du calcul littéral pour la généralisation et pour la modélisation d'un problème, justifiant ainsi l'introduction de la lettre (variable ou inconnue).

IV

Patterns. Des problèmes pour travailler les pensées algorithmique et algébrique

En France, les patterns sont surtout synonymes de jeux de logique et ils sont peu présents dans les programmes, bien qu'apparaissant à l'école primaire sous le vocable « suites organisées ». La mise en œuvre des problèmes de ce chapitre illustre la manière dont les patterns développent les pensées algorithmique et algébrique. La stratégie de résolution de problèmes, fondée sur l'observation, le questionnement ou l'expérimentation, consiste à chercher des invariants, des régularités, des relations entre les motifs. Une fois la structure du pattern comprise, il faut expliquer, décrire la règle en langage naturel ou mathématique. Ces problèmes favorisent le développement des compétences « chercher », « représenter » et « raisonner » autour de problèmes atypiques, dans la continuité du cycle 3.

Entrée historique[101]

Dans les classes de cycle 1, les élèves organisent des suites d'objets en fonction de critères[102]. Au collège, on trouve quelques activités d'introduction de la lettre en algèbre utilisant des patterns figuratifs, comme les situations du carré bordé ou des triangles en allumettes pour faire produire des formules.

Les patterns sont pourtant classiques dans de nombreux curriculums étrangers depuis que le *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), association d'enseignants de mathématiques en Amérique du Nord, a proposé, en 2000, d'intégrer un nouveau domaine de contenu, *Patterns, Functions and Algebra*, valable de la maternelle à la 12e année.

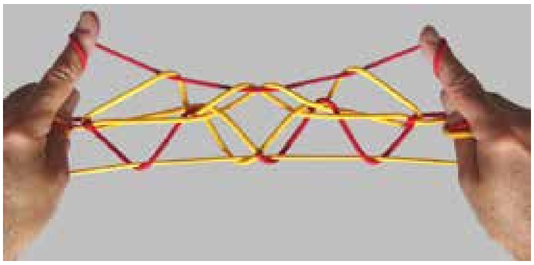
Plusieurs pays ont intégré dans leurs curriculums dès les premières années de l'école primaire l'utilisation des patterns pour développer la pensée algébrique : les États-Unis, les provinces anglophones du Canada, l'Australie, le Brésil, etc.

101 — Contribution de Sophie Roubin.
102 — Extrait des programmes de 2015 de l'école maternelle à propos des formes, grandeurs et suites organisées : « dès la petite section, les enfants sont invités à organiser des suites d'objets en fonction de critères de formes et de couleurs ; les premiers algorithmes qui leur sont proposés sont constitués d'alternances simples. Dans les années suivantes, progressivement, ils sont amenés à reconnaître un rythme dans une suite organisée et à continuer cette suite, à inventer des "rythmes" de plus en plus compliqués, à compléter des manques dans une suite organisée ».

Depuis 2013, il existe un Observatoire international de la pensée algébrique[103] qui rassemble des chercheurs intéressés par son développement dès l'école primaire[104].

Algorithmes et motifs/ patterns dans des pratiques ethnomathématiques[105]

L'ethnomathématique désigne aujourd'hui un champ de recherche consacré à l'étude des pratiques et des savoirs mathématiques impliqués dans diverses activités, menées en dehors des institutions académiques ou scolaires, dans des sociétés non occidentales notamment. Il s'agit donc d'élargir notre point de vue sur les mathématiques en y incluant l'ensemble des activités pour lesquelles on peut mettre en évidence une dimension mathématique. Dans ce cadre, certains ethnomathématiciens étudient les aspects mathématiques d'activités techniques (ou artistiques) pratiquées dans des sociétés autochtones où prédomine souvent l'oralité. À titre d'exemple, les pratiques d'entrelacement de fils (vannerie, tressage de nattes ou de paniers, jeu de ficelle, par exemple) ou de tracés de ligne continue contrainte par une grille composée de lignes ou de points (*sona* des Chokwe de l'Angola, dessin sur le sable de Vanuatu dans le Pacifique sud, *kōlam* du Tamil Nadu en Inde, par exemple) peuvent être appréhendées comme de véritables activités à caractère algorithmique et géométrique.



© Éric Vandendriessche

Ces diverses activités impliquent la mise en œuvre d'opérations spatiales, organisées en séquences ordonnées assimilables à des algorithmes. Ces derniers sont dits « géométriques » dans le sens où leur exécution a pour finalité la réalisation d'une « figure » composée de différents motifs de base.

103 — https://www.oipa.education/pour-en-savoir-voir-plus
104 — Hassane Squalli, Izabella Oliveira, Alain Bronner, Mirène Larguier, *Le Développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. Recherches et perspectives curriculaires*, Québec, 2020. Livres en ligne du Centre de recherche et d'intervention sur la réussite scolaire (Crires) : https://lel.crires.ulaval.ca/sites/lel/files/le_developpement_de_la_pensee_algebrique_a_lecole_primaire_et_au_debut_du_secondaire.pdf ; *Le Développement de la pensée algébrique avant l'introduction du langage algébrique conventionnel*, vol. 1, sous la direction de Hassane Squalli et Alain Bronner. Volume 20, numéro 3, 2017 : https://www.erudit.org/fr/revues/ncre/2017-v20-n3-ncre04255/
105 — Contributions de Christine Proust, Marc Moyon, Dominique Tournès, Éric Vandendriessche.

© Éric Vandendriessche

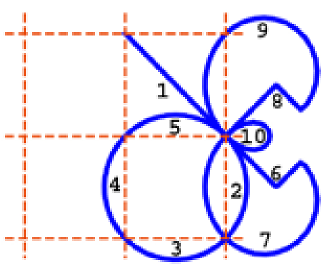
Ces algorithmes géométriques, sous-tendus par quelques règles opératoires, ont été les outils de travail qui ont permis aux praticiens (dessinateurs, vanniers, tisserands, etc.) de mener des investigations dans des configurations spatiales parfois d'une grande complexité.

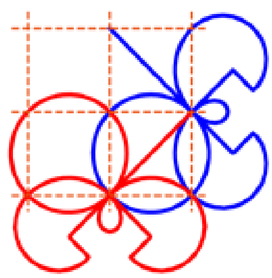
Ces investigations impliquent par ailleurs l'usage de certains concepts mathématiques : les « transformations » de procédures ou de figures finales, les « itérations » de séquences d'opérations ou de motifs, ainsi que les « symétries » de figures, sont des concepts omniprésents dans ces diverses pratiques (ethno)mathématiques.

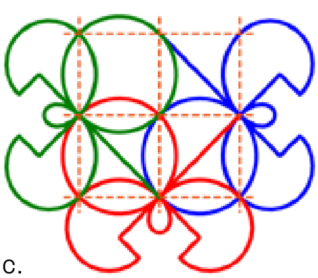
© Éric Vandendriessche

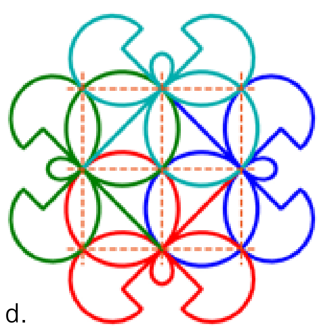
Exemples

1. Dessin sur le sable dénommé *nimbingge* (une variété d'igname – voir l'image ci-contre) de l'île de Malekula (Vanuatu, Pacifique sud) analysé par la mathématicienne américaine Marcia Ascher (1935-2013) comme le résultat de l'itération d'un même motif[106].

a.


b.


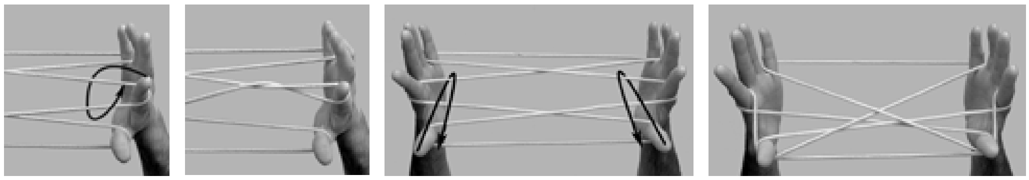
c.


d.


© Alban Da Silva.

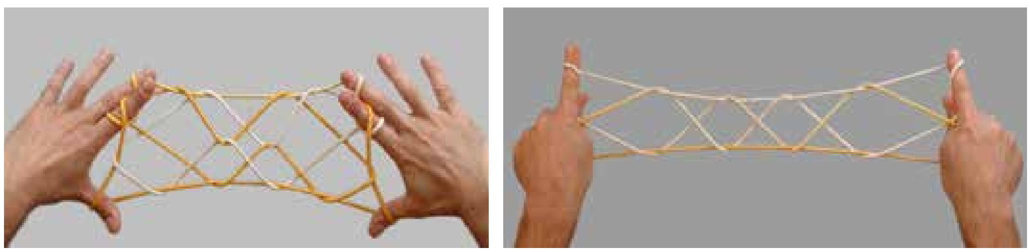
106 — Marcia Ascher, *Mathématiques d'ailleurs. Nombres, formes et jeux dans les sociétés traditionnelles*, 1998, traduction de l'anglais (États-Unis) et postface de Karine Chemla et Serge Pahaut (traduit et publié avec le concours du Centre national des lettres), p. 281, Le Seuil, Paris, 1998 (éd. orig. : *Ethnomathematics, A Multicultural View of Mathematical Ideas*. Pacific Grove, California, Brooks and Cole Publishing Compagny).

2. La pratique communément appelée « jeu de ficelle » consiste à exécuter, avec les doigts, une succession de « gestes simples » assimilables à des « opérations élémentaires » (voir les images ci-dessous), engendrant l'obtention d'une figure à partir d'une boucle de fil. Tout jeu de ficelle peut ainsi être analysé comme une procédure (ou algorithme) composée d'une succession ordonnée d'opérations élémentaires.



© Éric Vandendriessche

Le concept de « transformation » est omniprésent dans la pratique du jeu de ficelle. Ci-dessous, transformation de la figure « *salibu* » (miroir) des îles Trobriand (Papouasie-Nouvelle-Guinée) en une figure à quatre « losanges »[107].



© Éric Vandendriessche

107 — https://www.ethnographiques.org/IMG/html/pw16-mwaya-tomdawaya.html

Point sur la recherche[108]

Traditionnellement, l'algèbre n'est pas enseignée avant le niveau secondaire (cycle 4 en France). Cependant, dans les années 1990, l'idée de développer la pensée algébrique[109] dès l'école primaire émerge et donne lieu au courant de recherche étiqueté *Early Algebra*[110] ou pré-algèbre. Cette perspective amène à définir la pensée algébrique autrement que par le recours au symbolisme algébrique. La pensée algébrique, selon Luis Radford[111], est caractérisée par :

— l'indéterminée, c'est-à-dire que le problème met en jeu des quantités ou nombres non connus ;
— la dénotation, qui consiste à désigner cette indéterminée de différentes manières possibles (langage naturel, geste, etc.) ;
— l'analyticité, qui suppose de pouvoir traiter les quantités indéterminées comme si elles étaient connues.

Les activités de généralisation basées sur des patterns, qui visent à faire identifier et exprimer des régularités, sont particulièrement adaptées au développement de la pensée algébrique. Comme le précisent Joëlle Vlassis, Isabelle Demonty et Hassane Squalli[112], « ces activités répondent aux critères d'une pensée algébrique dans la mesure où leur objectif consiste à formuler un moyen général au départ d'une indéterminée, en l'occurrence d'une variable. Ces activités invitent à exprimer les généralités produites et leurs justifications dans un langage tout d'abord non conventionnel et qui tend à devenir de plus en plus conventionnel au fil des nécessités de l'activité » (p. 135). Cette expression de généralité permet d'anticiper, de prédire ce qui se passe pour chaque élément, quel que soit son rang dans le pattern, même éloigné et non atteignable directement. C'est précisément cette anticipation qui différencie le mode de pensée algébrique du mode de pensée algorithmique. Cette dernière, aussi appelée pensée informatique ou computationnelle, est définie par Margarida Romero (2016)[113] comme « un ensemble de stratégies de pensée cognitive et métacognitive liées à la modélisation de connaissances et de processus, à l'abstraction, à l'algorithmique et à l'identification, la décomposition et l'organisation de structures complexes et de suites logiques ». La première étape dans la résolution

---

108 — Contribution de Jana Trgalova.
109 — Volume 22, numéro 1, 2020, *Le Développement de la pensée algébrique avant l'introduction du langage algébrique conventionnel*, vol. 2, sous la direction de Hassane Squalli et Alain Bronner : https://www.erudit.org/fr/revues/ncre/2020-v22-n1-ncre05349/
110 — Carolyn Kieran, JeongSuk Pang, Deborah Schifter, Swee Fong Ng, *Early Algebra. Research into its Nature, its Learning, its Teaching*, ICME-13, Topical Surveys, Springer, 2016.
111 — Luis Radford, "The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking", *Mathematics Education Research Journal*, 26, p. 257-277, 2014.
112 — Joëlle Vlassis , Isabelle Demonty, Hassane Squalli, « Développer la pensée algébrique à travers une activité de généralisation basée sur des motifs (patterns) figuratifs », *Nouveaux Cahiers de la recherche en éducation*, 20(3), p. 131-155, 2017.
113 — https://margaridaromero.me/2016/05/05/la-pensee-informatique/

d'un problème basé sur un pattern consiste à identifier et à décrire la structure du pattern de manière à pouvoir le prolonger au-delà des éléments présents dans l'énoncé. Le mode de pensée algorithmique est ainsi mis en jeu.

Mathématiques. Définition d'un pattern

Le **pattern** est un anglicisme signifiant « motif », « règle de structure », « modèle à reproduire ». C'est une suite d'objets appelés **éléments**, reliés les uns aux autres par une règle spécifique. Il existe deux types de patterns utilisés en résolution de problèmes :

— les patterns répétitifs (*repeating patterns*) ;
— les patterns évolutifs (*increasing/growing patterns*) en passant d'un rang à un autre.

Le **motif de base** (« *core* » en anglais) correspond à la chaîne d'éléments la plus courte qui se répète dans le pattern répétitif ou qui évolue dans le pattern évolutif.

Exemple

Sur le pattern suivant, si on regarde les figures (triangles et carrés) sur les cubes, sans prendre en compte leur couleur, on reconnaît un pattern répétitif dont le motif de base est : 

Si, en revanche, on regarde la couleur des cubes, sans prendre en compte les figures, on reconnaît un pattern évolutif dont le motif de base est le même, mais qui évolue au niveau du nombre de cubes roses.

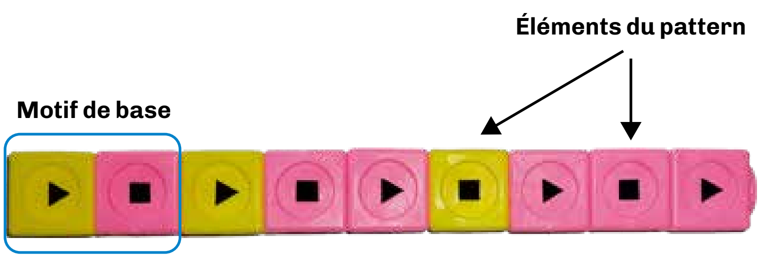
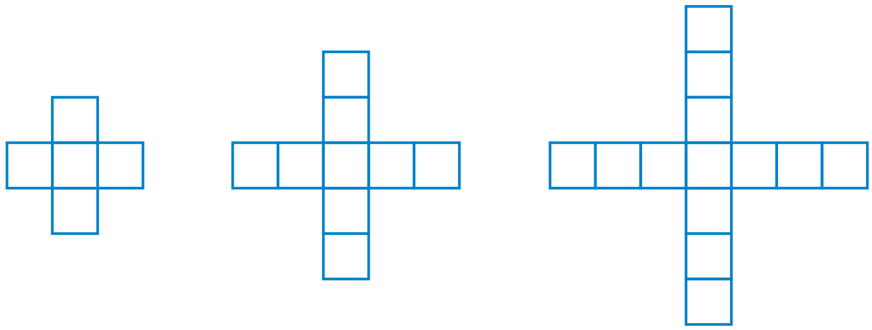


Figure 19. Pattern répétitif et pattern évolutif.

Focus | Une séquence d'enseignement autour d'un pattern

Énoncé

Avec des petits carrés tous identiques, on construit un pattern selon le modèle évolutif ci-dessous :



Rang 1 Rang 2 Rang 3

a. Dessiner l'élément du rang suivant et expliquer la règle.
b. Déterminer le nombre de petits carrés des éléments du rang 5, du rang 10, du rang 17.
c. Déterminer le nombre de petits carrés de l'élément du rang 100.
d. Trouver un moyen de calculer rapidement le nombre de petits carrés d'un élément à n'importe quel rang.
e. Existe-t-il un élément qui contient 532 petits carrés ? Un élément qui contient 813 petits carrés ?

Mots-clés

Patterns figuratif et évolutif, chercher, exprimer une règle, relation de récurrence, généraliser, raisonner, pensée algébrique.

Pourquoi ce problème ?

Les élèves sont amenés à étudier les liens constitutifs entre les étapes d'un pattern figuratif (c'est-à-dire représenté par une figure) pour d'une part comprendre et décrire la structure (ce qui contribue au développement de la pensée algorithmique) et d'autre part arriver à prédire, à généraliser le motif à une étape éloignée (ce qui développe le mode de pensée algébrique) ; le passage du langage naturel au langage mathématique pour « décrire, comprendre et prévoir cette évolution du phénomène » contribue ainsi à la compétence « modéliser ».

Dans ce focus sont développées toutes les phases du questionnement usuel dans ce type de problèmes :
- dessiner le rang suivant et chercher une relation, comprendre la construction du motif (seul ou en groupe) et la verbaliser (en classe) ;
- faire calculer le nombre d'éléments en étape proche ;
- calculer le nombre d'éléments en étape lointaine (rang 100) ;
- trouver un moyen de calculer les éléments constitutifs du pattern à n'importe quel rang.

Ressorts de continuité ou éléments de progressivité

Ce problème peut être donné dans toutes les classes du collège et dès le cycle 3. Selon l'âge des élèves et en tenant compte de leurs difficultés, l'attendu se formalise ; il s'agit de passer de l'expression en langage naturel, en début de cycle 3, à l'expression littérale en fin de cycle 4.

Stratégies d'enseignement

Lors des premières rencontres, il importe de définir et d'institutionnaliser le vocabulaire : patterns répétitifs et patterns évolutifs.

Les élèves sont encouragés à étudier la structure du pattern et à exprimer la règle qui permet de les construire. Il importe de ménager des temps de mise en commun où les élèves seront amenés à verbaliser leurs stratégies.

ÉTAPE 1. DESSINER L'ÉLÉMENT SUIVANT ET EXPLIQUER LA RÈGLE DE CONSTRUCTION

Cette première phase de questionnement engage l'élève dans l'action. Il s'agit pour l'enseignant de vérifier que les élèves se sont bien représenté le problème et ont compris la construction du pattern. Une description de la construction de l'élément de rang 4 est attendue, elle peut être donnée sous forme d'indices sur le dessin, de phrases utilisant des termes spatiaux (en haut, en bas, etc.).

Selon le niveau des élèves, l'enseignant choisira de simplement circuler – pour vérifier la bonne compréhension du problème – ou de faire une rapide mise en commun, mais en restant vigilant, à ce stade, à ne pas exprimer ou faire exprimer la relation en fonction du rang (ici une relation de récurrence).

À l'aide des Rang 1, 2 et 3 j'ai observé que l'on ajoute 4 carrés a chaques colones.

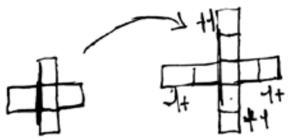


Figure 20. Production d'élève.

ÉTAPE 2. FAIRE CALCULER LE NOMBRE D'ÉLÉMENTS EN ÉTAPE PROCHE

Les éléments étudiés sont de rangs proches, ce qui laisse la possibilité aux élèves de dessiner et de dénombrer sur le dessin. L'augmentation du rang a pour but d'amener les élèves vers une procédure de calcul. Si ce n'est pas le cas, les mises en commun et les partages de procédures devraient encourager les élèves à faire des calculs.

Imaginer reconnaître une situation de proportionnalité est une erreur fréquente à cette étape.

17 + 4 = 21 rang 4 = 21 carrés

17 + (4 x 6) = 41 rang 10 = 41 carrés

rang 3 + rang 4 + rang 10
13 + 17 + 41 = 71

rang 17 = 71 carrés

Figure 21 et 22. Productions d'un élève. L'élève réussit l'étape 4 et l'étape 10, mais pour l'étape 17, il utilise la linéarité.

Pour aider à la résolution, l'utilisation d'un tableau pour organiser les données permet de passer du registre figuratif au registre numérique. Avoir recours à cette représentation ordonnée est une stratégie de résolution à favoriser chez les élèves, facilitant l'observation des régularités.

Rang de l'élément	1	2	3	4	...
Nombre de petits carrés	5	9	13	17	

+ 4 + 4 + 4

ÉTAPE 3. CALCULER LE NOMBRE D'ÉLÉMENTS EN ÉTAPE LOINTAINE (RANG 100)

L'augmentation du rang est telle qu'il n'est plus possible de dessiner. Le nombre 100 est également choisi en lien avec le nombre 10 pour invalider l'hypothèse de proportionnalité ; c'est souvent à cette étape que les élèves sont tentés par une procédure linéaire, comme l'élève ci-dessous qui n'avait pourtant pas utilisé la proportionnalité jusqu'alors.

41 x 10 = 410

Figure 23. Production d'un élève qui utilise une procédure linéaire.

L'utilisation du tableur est une stratégie de résolution efficace dans les problèmes utilisant les patterns. Manipulé souvent par l'enseignant au cycle 3 et début de cycle 4 (pour accompagner la découverte de son fonctionnement avec lignes, colonnes, cellules et formules simples), il est attendu en cycle 4 une aisance suffisante pour motiver les élèves dans la recherche d'une formule.

En étirant la formule, il est possible de trouver le nombre de petits carrés au rang souhaité, sans avoir recours à une expression littérale ou l'utilisation du code (Scratch par exemple).

Pour des rangs plus éloignés, une formule pourra être insérée dans une autre colonne pour permettre la comparaison avec les nombres obtenus dans la colonne B.

	A	B
1	Rang	Nombre de petits carrés
2	1	5
3	2	=B2+4
4	3	

	A	B
1	Rang	Nombre de petits carrés
2	1	5
3	2	9
4	3	13
5	4	17
6	5	21
7	6	25
8	7	29
9		

ÉTAPE 4. TROUVER UN MOYEN DE CALCULER LES ÉLÉMENTS CONSTITUTIFS DU PATTERN À N'IMPORTE QUEL RANG

Il s'agit dans cette phase de généralisation d'être capable de s'éloigner de la relation de récurrence afin de trouver une relation directe (« *closed formula* ») qui permettra d'obtenir le nombre de petits carrés au rang *n* sans utiliser de rang intermédiaire. C'est une phase d'abstraction qui incite à utiliser la lettre *n* comme variable.

L'enseignant demandera aux élèves d'expliciter leur procédure. Au cycle 3, la généralisation du processus peut s'exprimer en langue naturelle, puis à partir du cycle 4, l'introduction d'expressions algébriques par les élèves et le questionnement de leur équivalence par le professeur, sont des attendus.

? x 4 + 1

x 4 + 1

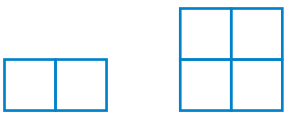
Nombre en question

Figures 24 et 25. Traces écrites d'élèves de fin de cycle 3 (6e).

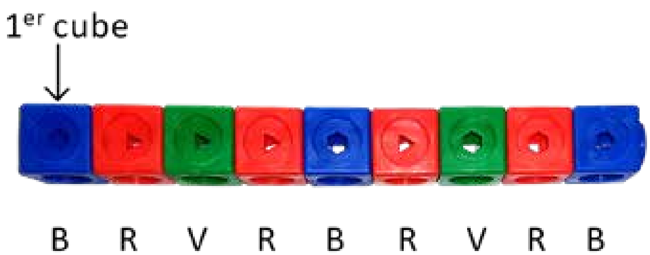
Problème 1. Des énoncés pour des rituels

Énoncés

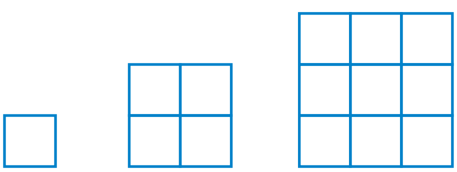
Rituel 1. Voici le début d'un pattern.
Dessiner les trois éléments suivants en expliquant la règle utilisée.



Rituel 2. Voici le début d'un pattern.
Inventer d'autres patterns qui suivent la même règle.



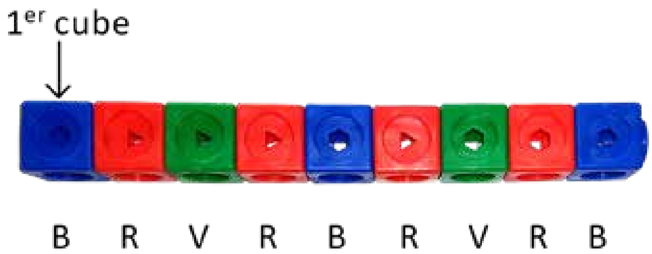
Rituel 3. Avec des petits carrés tous identiques, je construis des motifs selon le modèle évolutif ci-dessous.
En expliquant, calculer le nombre de petits carrés nécessaires pour construire le 10e motif.



Rituel 4. Voici une liste de nombres.
Si l'on poursuit la liste avec la même règle, les nombres 62 et 693 sont-ils des éléments de cette liste ?

2	5	8	11	14	17	...

Rituel 5. Voici un pattern.
Quelle est la couleur du 23e cube ?



Mots-clés

Patterns figuratif et évolutif, chercher, exprimer une règle, relation de récurrence, raisonner, pensée algébrique, pensée algorithmique, créativité.

Pourquoi ce problème ?

Ces rituels permettent d'exposer régulièrement les élèves à différents types de patterns et de régularités et aux professeurs de travailler certaines phases du questionnement indiquées dans le focus.

Il s'agit de chercher, dans les premiers rituels, différentes régularités permettant de générer les éléments suivants d'un pattern et d'apprendre à les verbaliser. Cette tâche encourage les élèves à être créatifs lorsqu'ils décrivent les règles possibles, à développer leurs pensées algorithmique (reconnaissance de la structure) et algébrique (anticipation, généralisation).

Dans un second temps, les rituels s'enrichissent des étapes permettant de calculer ou de déterminer les éléments en étapes proche ou lointaine, puis à n'importe quel rang.

Stratégies d'enseignement

Ce type de problèmes peut être vu comme un défi mathématique. Le matériel de manipulation peut aider à la compréhension de la structure, à faire des essais, à vérifier une anticipation.

Ces énoncés sont à utiliser en rituels espacés[114], mettant en jeu patterns évolutifs, répétitifs, sous forme figurative ou de nombres[115]. Il est conseillé d'être attentif à alterner les types de patterns lors de l'utilisation dans les classes, pour varier les régularités et éviter que les élèves utilisent toujours la même stratégie. Cependant, un même pattern peut être aussi décliné de façon progressive et constituer le fil rouge dans la programmation des rituels sur une période donnée (une question par séance).

L'objectif du premier rituel est de développer la pensée algorithmique. Les élèves doivent comprendre la structure du pattern, c'est-à-dire expliquer une règle qui décrit comment le pattern évolue, et la verbaliser ; expliciter les régularités possibles pour des problèmes de généralisation développe l'oralité et l'argumentation. Cette tâche les encourage à être créatifs en décrivant les règles possibles, et développe leurs pensées algorithmiques (reconnaissance de la structure).

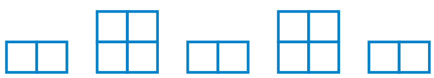


Figure 26. Pattern répétitif.

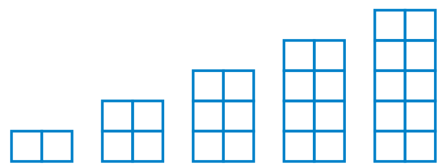
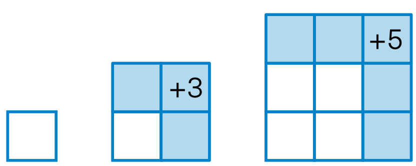


Figure 27. Pattern évolutif.

Le changement de registre est travaillé à travers le rituel 2. Le professeur pourra expliciter ce qui est attendu lorsque l'élève est confronté à ce genre de problèmes pour la première fois. Ici, tout pattern répétitif a un motif de base formé de quatre éléments. Les trois premiers sont différents et le quatrième est le même que le deuxième ; par exemple 1 ; 2 ; 3 ; 2 ; 1 ; 2 ; 3 ; 2 ; 1 ou △○▯○△○▯○△. L'élève pourra choisir une suite de nombres, des notes de musique, des pas de danse, etc., avec la possibilité d'y ajouter un challenge type « battle » pour motiver la classe et la créativité.

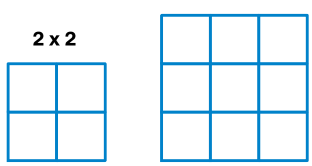
Le rituel 3 aborde la pensée algébrique et entraîne les élèves à visualiser la structure d'un nombre carré parfait en lui associant la disposition géométrique correspondante. La confrontation de différents patterns, comme ci-dessous, permet d'expliquer des égalités algébriques[116].



Étape 1 **Étape 2** **Étape 3**

Pour passer de l'étape n à l'étape $n + 1$, on ajoute $2n + 1$ carrés.

2 x 2 **3 x 3**



Étape 2 **Étape 3**

L'étape n contient n^2 carrés.

114 — La « mise en Train » (Train : travail de recherche ou d'approfondissement avec prise d'initiatives) : https://www.apmep.fr/IMG/pdf/05-Train-C.pdf

115 — Une bibliothèque de motifs : http://www.visualpatterns.org/, et pour créer des patterns : http://www.dudamath.com

116 — L'étape $n + 1$ contient $(n + 1)^2$ carrés, donc $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$.

La liste de nombres du rituel 4 définit un pattern évolutif numérique (il est important d'alterner les patterns figuratif et numérique).

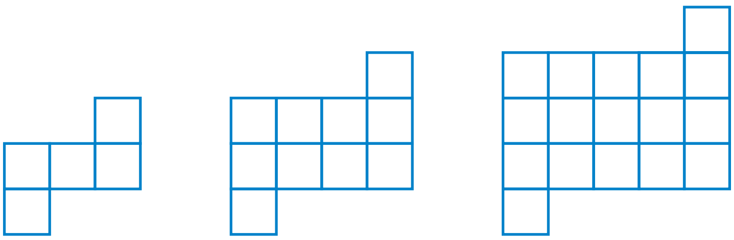
Un nombre est dans cette liste si et seulement si il est la somme de 2 et d'un multiple de 3. Lorsqu'on lui ajoute 1 (ou enlève 2), alors il est dans la table de 3. Ce pattern de nombres fait travailler les critères de divisibilité et donne du sens au reste dans la division euclidienne.

Le rituel 5 reprend le pattern du rituel 2. Cette reprise impose à l'élève de bien lire l'énoncé pour repérer les indices sur la structure et la question associée. La question posée permet de travailler division euclidienne et division quotition. La résolution experte convoque la division euclidienne et amène à voir le reste comme la couleur du cube dans le motif de base (les élèves pourront remarquer que le cube est rouge pour les places paires)[117].

Problème 2. Des petits carrés

Énoncé

Avec des petits carrés tous identiques, on construit un pattern selon le modèle évolutif ci-dessous.
Trouver un moyen de calculer le nombre de petits carrés d'un élément à n'importe quel rang.



Rang 1 Rang 2 Rang 3

Mots-clés

Patterns figuratif et évolutif, exprimer une règle, relation de récurrence, généraliser, chercher, raisonner.

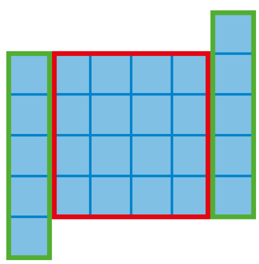
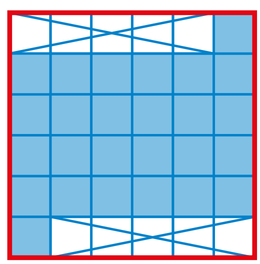
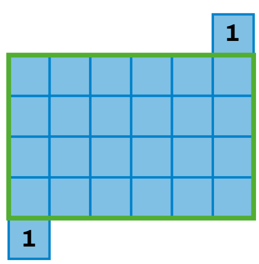
117 — Variante : « On a construit un collier de cent perles selon ce modèle. Combien a-t-on enfilé de perles bleues ? »

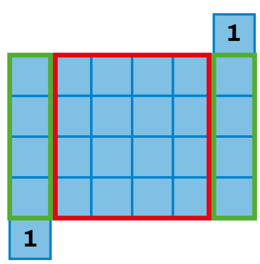
Pourquoi ce problème ?

Dans ce pattern figuratif, la reconnaissance des régularités et son explicitation est d'un niveau d'expertise plus élevé, car la relation n'est pas linéaire. La généralisation et le recours à la lettre ne seront attendus qu'en milieu de cycle 4.

Ce problème donne lieu à un travail sur le calcul littéral afin de justifier l'équivalence des expressions proposées par les élèves.

Stratégies d'enseignement

<table>
<tr><th>Stratégies</th><th colspan="2">Régularités</th><th>Commentaires</th></tr>
<tr><td>Dénombrer les petits carrés à chaque étape.</td><td colspan="2">Les nombres à ajouter, pour passer d'un rang au suivant, sont les entiers impairs plus grands que 5.
<table>
<tr><th>Rang de l'élément</th><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>...</td></tr>
<tr><th>Nombre de carrés</th><td>5</td><td>10</td><td>17</td><td>26</td><td></td></tr>
</table>
+ 5 + 7 + 9</td><td>Avec un tableur, par exemple, obtenir le nombre de petits carrés pour un rang donné.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Repérer une structure faisant intervenir un arrangement en grand carré ou en rectangle.</td><td>
$a^2 + 2(a + 1)$</td><td>
$(a + 2)^2 - 2(a + 1)$</td><td rowspan="2">Prouver l'égalité entre les différentes expressions algébriques rendra nécessaire l'utilisation de propriétés de calcul littéral pour transformer les expressions (factorisation et développement).</td></tr>
<tr><td>

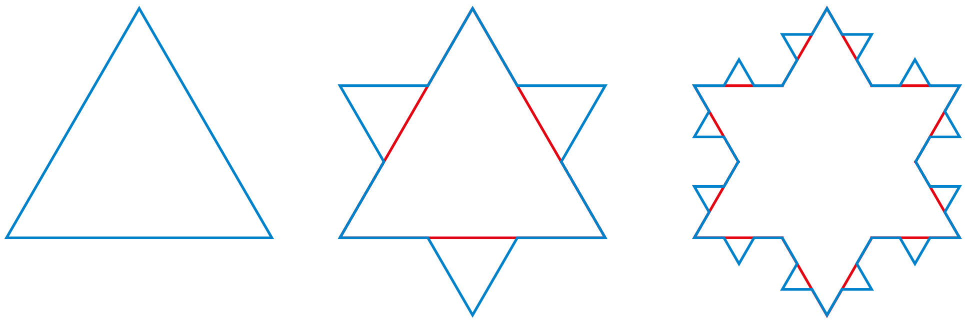
$a(a + 2) + 2$</td><td>

$a^2 + 2a + 2$</td></tr>
</table>

Problème 3. Le flocon de Koch

Énoncé

Le flocon de Koch est une courbe fractale[118] dont les premières étapes sont illustrées ci-dessous à partir d'un triangle équilatéral.



Rang 0 : un triangle équilatéral.

Rang 1 : tous les segments bleus sont de la même longeur.

Rang 2 : tous les segments bleus sont de la même longeur.

a. Combien de segments bleus composent chacune de ces figures aux rangs 0, 1, 2 ?
b. Combien y a-t-il de segments bleus sur la figure de rang 3 ?
c. Déterminer, en expliquant votre méthode de calcul, le nombre de segments bleus qui composent la figure de rang 5, puis celle de rang 20.
d. Trouver une façon de calculer le nombre de segments à n'importe quel rang.
e. Expliquer une règle de construction pour passer d'une figure d'un rang quelconque au suivant.

Mots-clés

Fractale, pattern, algorithmique, algèbre.

118 — Pour aller plus loin : les patterns peuvent également intervenir dans des domaines variés comme le jeu vidéo ou les films d'animation. Un exemple, les arbres : https://mathcurve.com/fractals/arbre/arbre.shtml

Pourquoi ce problème ?

Une figure fractale[119] – figure qui présente à toutes les échelles une structure identique – peut être rapprochée d'un pattern évolutif. Un travail sur d'autres fractales, avec un questionnement analogue, peut constituer un dossier « Mathématiques et arts » pour l'oral du diplôme national du brevet.

Ressorts de continuité ou éléments de progressivité

Ce problème peut être traité dès la 4e, en lien avec la notion de puissances. En 3e, les dernières questions permettent de mettre en évidence une expression littérale. Ce problème, se modélisant par une suite géométrique, peut être utilisé dans le cadre d'une liaison collège-lycée.

Stratégies d'enseignement

Le recours à un logiciel de programmation pour visualiser les figures des premiers rangs peut être une aide à la reconnaissance des régularités et à la mise en évidence d'une structure de boucle[120].

Un temps long d'investigation sur les deux premières questions est nécessaire à une bonne compréhension de la procédure et permet d'entrer dans la résolution des questions suivantes.

Pour les rangs proches, la progression étant géométrique, le nombre de segments calculé au rang 3 est souvent correct. Au-delà, les itérations multiples peuvent créer des erreurs, comme en témoigne cette retranscription de trace écrite d'un élève de 3e.

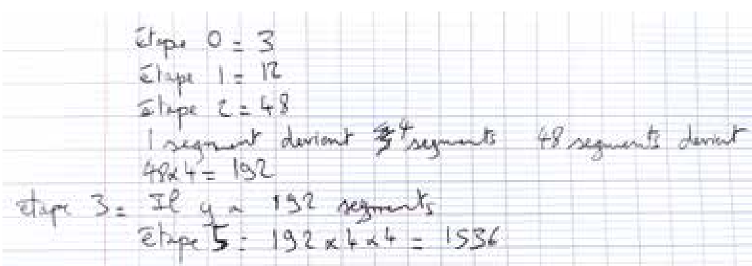

étape 0 = 3
Etape 1 = 12
Etape 2 = 48
1 segment devient ~~3~~ 4 segments 48 segments devient
48x4 = 192
étape 3 = Il y a 192 segments
étape 5 : 192x4x4 = 1536

Figure 28. Trace écrite d'un élève de 3e.

Cette erreur est à rapprocher du constat que la multiplication itérée est peu travaillée, contrairement à l'addition itérée, ce qui rend les situations numériques purement multiplicatives plus difficiles.

119 — Notion travaillée dans l'option mathématiques expertes en terminale.
120 — Transfert (voir l'introduction de ce guide) : à partir d'une autre figure (segment, carré, etc.), on peut faire appliquer la même règle.

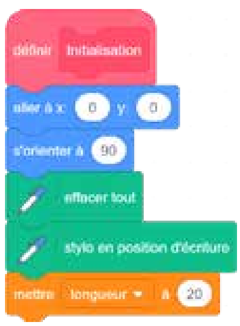
Problème 4. Des carrés et une spirale

Énoncé

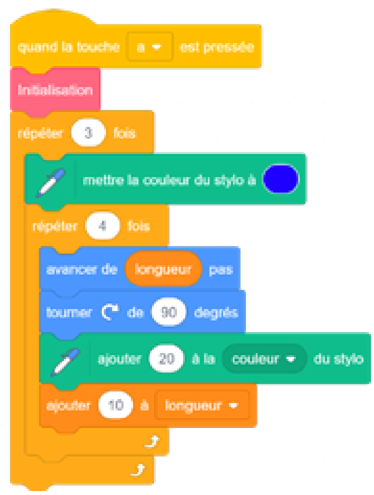
On considère les scripts Scratch ci-dessous[121].

1. Associer chacun des scripts A, B et C ci-dessous à l'une des représentations 1, 2, 3 et 4 (voir p. suivante).

Scripts :

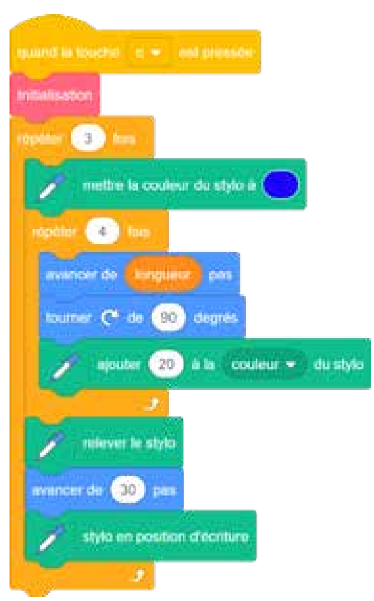


Bloc d'initialisation



Script A

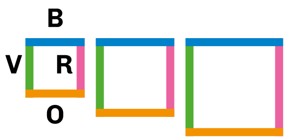
Script B



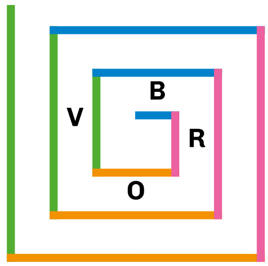
Script C

121 — Les fichiers Scratch sont disponibles en téléchargement.

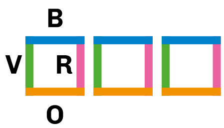
Représentations :



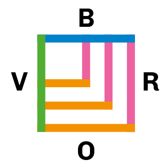
Représentation 1



Représentation 2



Représentation 3



Représentation 4

2. Dans cette question, on s'intéresse au pattern dont le début correspond à la représentation 3, et plus particulièrement à la couleur des segments, dont l'enchaînement est bleu, rose, orange, vert.

a. Quelle est la couleur du 10^{e} segment ?

b. Quelle est la couleur du 20^{e} segment ? Que faut-il modifier dans le script pour s'en assurer ?

c. Quelle est la couleur du 125^{e} segment ? Que faut-il modifier dans le script pour s'en assurer ?

d. Trouver une méthode pour déterminer la couleur de n'importe quel segment de ce pattern.

3. On s'intéresse, dans cette question, plus particulièrement au script A et à la longueur des segments en pixels (px).

a. Quelle est la longueur du 10^{e} segment ?

b. Quelle est la longueur du 20^{e} segment ? Que faut-il modifier dans le script pour s'en assurer ?

c. Quelle est la longueur du 125^{e} segment ? Que faut-il modifier dans le script pour s'en assurer ?

d. Trouver un moyen de calculer le nombre d'éléments constitutifs du pattern à n'importe quel rang.

Mots-clés

Pattern, programmation par blocs.

Pourquoi ce problème ?

Ce problème d'algorithmique amène à découvrir la structure et le motif d'un pattern répétitif (question 2) puis d'un pattern évolutif (question 3).

Les patterns conduisent à utiliser des blocs d'instruction identiques. Leurs représentations facilitent la compréhension de l'effet de l'ordre dans lequel ces instructions s'enchaînent.

Ressorts de continuité ou éléments de progressivité

Ce problème peut être proposé dès la classe de 5^{e} pour travailler l'algorithmique et la programmation (variables, boucles imbriquées, blocs utilisateurs) ainsi que la construction d'expressions littérales, en fin du cycle 4.

Stratégies d'enseignement

Les élèves travaillent la première question en tant qu'activité débranchée. Après un débat en classe, une validation des différentes réponses peut alors se faire via la construction et l'exécution des scripts sur un logiciel de programmation par blocs. La bonne compréhension des scripts est nécessaire pour accéder correctement aux questions suivantes.

Pour les rangs proches, les élèves peuvent aussi recourir à une stratégie d'essais/ajustements à l'aide d'un logiciel pour se rendre compte de la difficulté du « comptage ». Dans ce cas, une solution à transmettre aux élèves est l'utilisation d'un compteur.

Pour les rangs lointains, l'expérimentation par le logiciel atteint une limite : la figure sort de la fenêtre graphique, ce qui pousse à anticiper et généraliser.

Dans le cas où on étudie le pattern répétitif, l'anticipation sur la couleur d'un segment met en œuvre la division quotition et donne du sens au reste de la division euclidienne. Chaque segment prend alternativement une des quatre couleurs : bleu (reste 1) ; rose (reste 2) ; orange (reste 3) ; vert (reste 0). La couleur du 125^{e} segment est bleu, car 125 = 4 x 31 + 1.

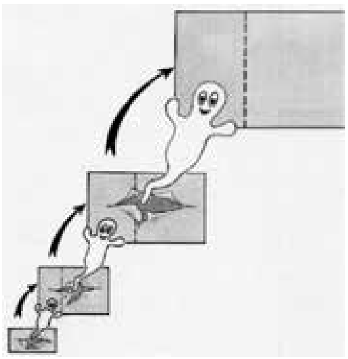
Pour aller plus loin

On peut ajouter une question au problème : « On souhaite faire parcourir au lutin au moins 5 000 px. Combien faut-il de segments au minimum et quelle est la longueur du dernier segment ? »

Cette question est l'occasion de découvrir la boucle « répéter jusqu'à ce que » avant le lycée par l'utilisation de tests, d'un tableur ou par la programmation.

Problème 5. Tel père, tel fils[122]

Énoncé



C'est l'histoire d'un petit rectangle de dimensions 2 mm x 3 mm.
Chaque jour, il s'agrandit pour devenir un rectangle plus grand : sa nouvelle largeur est égale à son ancienne longueur ; sa nouvelle longueur est égale à la somme de ses deux anciennes dimensions.
Au bout de combien de jours son aire dépasse-t-elle 1,5 m^2 ?

Mots-clés

Patterns figuratif et évolutif, relation de récurrence, problème atypique, prendre des initiatives, expérimenter, chercher, représenter, raisonner.

Pourquoi ce problème ?

D'un point de vue mathématique, ce problème permet aux élèves de rencontrer un pattern évolutif non conventionnel, de valider ou d'invalider un modèle et de donner du sens à la nécessité de convertir des unités de mesure (sous-multiples du m^2), d'introduire le modèle d'agrandissement mathématique.

Ces problèmes atypiques permettent la mise en œuvre de différentes stratégies mathématiques pour l'élève ; il peut :
- soit être persévérant dans sa recherche lorsqu'il calcule les quatorze aires ;
- soit faire preuve d'initiative en utilisant un tableur (avec ou sans la fonctionnalité test) ou en programmant ;
- soit être original s'il a la capacité de produire une idée peu fréquente. Cela a été le cas pour des élèves qui ont exprimé une relation entre les grandeurs en jeu.

122 — Problème issu de la compétition Mathématiques sans frontières, académie de Strasbourg, niveaux 3e, 2de, décembre 2011 : http://maths-msf.site.ac-strasbourg.fr/spip/spip.php?article628

Ce type de pattern utilisé par des artistes[123] peut s'intégrer dans le parcours PEAC[124] et encourager ainsi les élèves à créer leur propre pattern artistique.

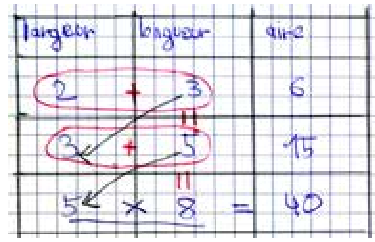


Figure 29. Traces écrites d'élèves de 4ᵉ.

Ressorts de continuité ou éléments de progressivité

Il peut être envisagé dès la fin du cycle 3, à tous les niveaux du cycle 4 ainsi qu'en classe de 2de, ce qui en fait un candidat intéressant pour les liaisons interdegrés et peut faire l'objet d'une *lesson study* et/ou de temps d'observations croisées.

Stratégies d'enseignement

Pour mettre en œuvre de la différenciation, durant les phases de recherche ou de dévolution, l'enseignant sera amené à « aider » les élèves qui ne parviennent pas à débuter leur recherche, qui ne respectent pas les consignes de l'énoncé, qui se découragent ou qui font des erreurs de conversions ou de calculs. Il pourra réguler cette recherche en favorisant les échanges, en proposant des aides qui engagent l'élève dans une réflexion (« son aire a-t-elle dépassé 1,5 m^2 le deuxième jour ? »).

L'objectif est que chaque élève puisse progresser dans ses stratégies de recherche et de représentation ainsi que dans son questionnement tout en permettant sa progression grâce à l'explicitation des stratégies, leur mise en commun et leur hiérarchisation progressive débouchant sur une trace écrite claire.

123 — Voir Norman Dilworth ou Ellsworth Kelly.
124 — Le parcours d'éducation artistique et culturelle : https://www.education.gouv.fr/le-parcours-d-education-artistique-et-culturelle-peac-4283

En résumé

- Un pattern est un motif, une règle de structure. Les problèmes de ce chapitre proposent d'étudier des patterns répétitif ou évolutif. Le travail sur les patterns permet de développer à la fois les pensées algorithmique (comment trouver un élément du pattern à partir des précédents ?) et algébrique (comment trouver l'élément de rang *n* du pattern ?). On commence ainsi à installer une représentation mentale de la récurrence, préparant le travail sur les suites au lycée. La recherche d'un élément lointain du pattern motive l'introduction du calcul littéral.

- L'étude des patterns fournit également des situations privilégiées pour développer les compétences orales (explicitation de la règle) et pour travailler le passage du langage naturel à un langage mathématique plus formel, et enfin pour illustrer des situations d'interdisciplinarité, notamment dans le domaine artistique.

- Les patterns amènent à exprimer en langage naturel de premiers algorithmes.

V

Géométrie

Au cycle 3, les élèves commencent à dépasser l'approche perceptive, descriptive et instrumentée des figures planes pour passer à la géométrie du raisonnement. Tout au long du cycle 4, les élèves sont très progressivement amenés à formaliser leurs raisonnements jusqu'à percevoir la notion de démonstration. Les outils numériques constituent un appui précieux à l'expérimentation et l'élaboration des raisonnements. Les problèmes de ce chapitre illustrent des situations où ce qui est visible n'est pas suffisant pour raisonner juste ; il faut donc aussi imaginer et abstraire. Ces problèmes montrent également comment la construction étaye le raisonnement, et comment le raisonnement est parfois un préalable à la construction d'une figure.

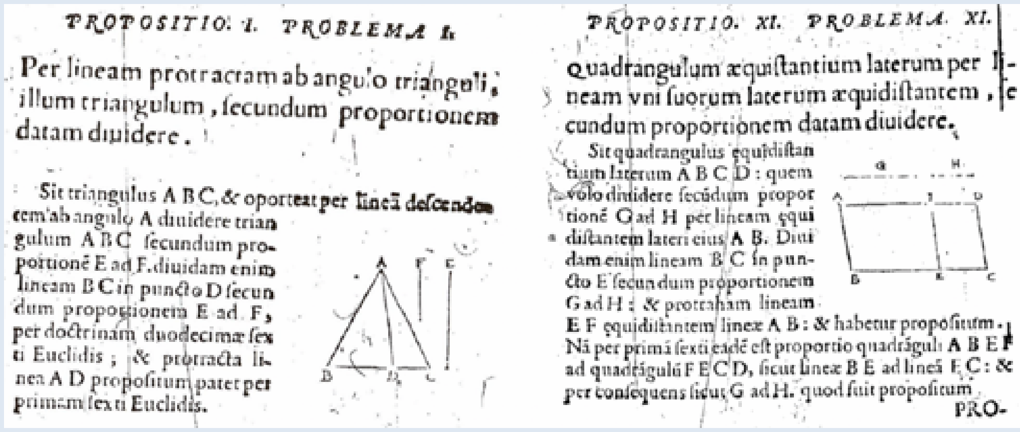
Entrée historique[125]

Problèmes de division des figures

Nous savons qu'Euclide d'Alexandrie a rédigé un *Livre sur la division des figures* dont nous avons une version arabe due au mathématicien persan al-Sijzi (xe s. ap. J.-C.). Il s'agit de couper une figure ou de la partager selon des contraintes géométriques fixées *a priori* sur les grandeurs (longueurs et aires) ou sur les figures à obtenir après découpage (figure 30, ci-contre).

Ces problèmes sont présents, avec d'autres formes de résolution, dans les mathématiques paléo-babyloniennes (voir l'entrée historique du chapitre 3 , p. 80). Ils sont encore traités par divers auteurs comme Héron d'Alexandrie dans ses *Metrica*, ou en pays d'Islam et peuvent correspondre aussi à des demandes juridiques et cultuelles de répartitions d'héritages, ou encore socio-culturelles liées à la décoration de monuments (figure 31). L'Europe continue cette longue tradition de problèmes avec, par exemple, Fibonacci et sa *Practica geometriae* (1220), ou encore, plus tard, Simon Stevin et ses *Problèmes géométriques* (1583) ou le jésuite Clavius avec sa *Géométrie pratique* (1604).

125 — Contributions de Christine Proust, Marc Moyon, Dominique Tournès, Éric Vandendriessche.



PROPOSITIO. I. PROBLEMA I.

Per lineam protractam ab angulo trianguli, illum triangulum, secundum proportionem datam diuidere.

Sit triangulus A B C, & oporteat per lineã descendentem ab angulo A diuidere triangulum A B C secundum proportionẽ E ad F. diuidam enim lineam B C in puncto D secundum proportionem E ad F, per doctrinam duodecimæ sexti Euclidis; & protracta linea A D propositum patet per primam sexti Euclidis.

PROPOSITIO. XI. PROBLEMA. XI.

Quadrangulum æquistantium laterum per lineam vni suorum laterum æquidistantem, secundum proportionem datam diuidere.

Sit quadrangulus equidistantium laterum A B C D: quem volo diuidere secũdum proportionẽ G ad H per lineam equidistantem lateri eius A B. Diuidam enim lineam B C in puncto E secundum proportionem G ad H: & protraham lineam E F equidistantem lineæ A B: & habetur propositum. Nã per primã sexti eadẽ est proportio quadrãguli A B E F ad quadrãgulũ F E C D, sicut lineæ B E ad lineã E C: & per consequens sicut G ad H. quod fuit propositum.

PRO-

Figure 30. Extraits du *De Superficierum Divisionibus Liber* (*Livre sur la division des figures*) de Muhammad al-Baghdâdî (version latine, version arabe perdue). Proposition 1 : « Diviser selon un rapport donné un triangle par une droite menée d'un angle du triangle. » Proposition 11 : « Diviser selon un rapport donné un quadrilatère à côtés parallèles par une droite parallèle à l'un de ses côtés parallèles. »

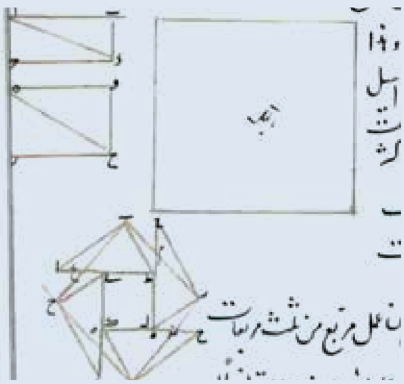


Figure 31. Diagramme du manuscrit persan Aya Sofia 2753 (Istanbul) montrant le découpage exact du mathématicien Abu l-Wafa pour former un seul carré à partir de trois carrés.

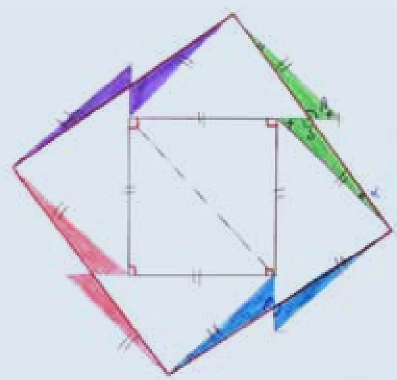


Figure 32. Diagramme réalisé par un élève de 6[e] reproduisant la construction d'Abu l-Wafa.

Figure 33. « Si on te dit, tu as un quadrilatère de longueur 20 bāb [unité de mesure orientale] et de largeur 10 bāb, divise-le entre trois personnes : la moitié pour l'un d'eux, le tiers pour un autre et le quart pour un autre de sorte qu'il y ait, en son centre, une route de largeur 2 bāb à laquelle aboutissent, par la longueur, les entrées des trois quote-parts, l'une par le devant, l'autre par la droite et l'autre par la gauche, de sorte que la quote-part du propriétaire du tiers soit à l'avant, selon cette figure. »

Chez Euclide, les problèmes sont purement géométriques ; ils sont résolus à l'aide des propositions des *Éléments* (notamment le livre V sur les rapports de grandeurs). Lorsque l'algèbre va commencer à s'imposer comme art pour résoudre des problèmes, certains auteurs comme al-Karajî (mort vers 1029) vont proposer des résolutions algébriques aux partages de figures, faisant ainsi un lien entre grandeurs géométriques et nombres (figure 33).

Point sur la recherche[126]

Lieu d'éducation associé (LÉA), réseau de circonscriptions de l'académie de Lille[127]

Mes recherches visent à questionner les conditions de diffusion, dans l'enseignement ordinaire, d'une approche de la géométrie[128] qui a été développée au début des années 2000 dans le Nord-Pas-de-Calais et qui se caractérise par des hypothèses relatives à la possibilité de penser une certaine continuité tout au long de la scolarité obligatoire, d'éviter autant que possible la rupture pointée par de nombreuses recherches entre la géométrie de l'école primaire et celle du collège[129]. Responsable scientifique d'un LÉA (lieu d'éducation associé à l'Institut français de l'éducation - IFÉ) regroupant chercheurs, inspecteurs, conseillers pédagogiques, maîtres-formateurs et enseignants, j'ai travaillé à l'élaboration d'une ressource en ligne pour l'enseignement de la géométrie du CE2 à la 6e[130] et d'un parcours M@gistère. La résolution de problèmes occupe une place importante dans la démarche développée puisqu'il s'agit de proposer aux élèves des situations de restauration de figures, c'est-à-dire des activités de reproduction respectant certaines conditions particulières (une figure modèle est donnée – en vraie grandeur ou non – ainsi qu'éventuellement une partie de la figure à obtenir – amorce ; des instruments variés permettant de reporter certaines informations de dimension 2 de la figure initiale sont mis à disposition des élèves). Les résultats obtenus, suite aux observations menées dans les classes de six circonscriptions, confirment l'intérêt de proposer aux élèves ces situations de restauration de figures les amenant à passer d'une appréhension naturelle et perceptive à une appréhension opératoire des figures. Ces résultats mettent aussi au jour certaines conditions d'appropriation par les enseignants de ces situations[131].

126 — Contribution de Christine Mangiante.
127 — http://ife.ens-lyon.fr/lea/le-reseau/anciens-lea/reseau-de-circonscriptions-de-l2019academie-de-lille
128 — Ont participé au développement de cette approche : Jean-Robert Delplace, Raymond Duval, Claire Godeuil, Marc Godin, Bachir Keskessa, Régis Leclercq, Christine Mangiante-Orsola, Anne-Céline Mathé, Marie-Jeanne Perrin et Odile Verbaere.
129 — Christine Mangiante-Orsola, Marie-Jeanne Perrin-Glorian, *Ingénierie didactique de développement en géométrie au cycle 3 dans le cadre du LÉA Valenciennes-Denain*, 2017, séminaire national de didactique des mathématiques, Arras, 22-23 janvier 2016 : https://ardm.eu/wp-content/uploads/2017/02/pre_actes_seminaire_ARDM_janvier_2016.pdf
130 — https://lea-geometrie.etab.ac-lille.fr/
131 — Christine Mangiante-Orsola, Marie-Jeanne Perrin-Glorian, Heidi Strømskag, "Theory of Didactical Situations as a Tool to Understand and Develop Mathematics Teaching Practices", in *Annales de didactiques et de sciences cognitives*, Irem de Strasbourg, 2018.

Didactique. Les outils numériques en géométrie

Les outils numériques – logiciels de géométrie dynamique et de programmation – sont étroitement liés à la résolution de problèmes, non seulement car ils sont efficaces pour réaliser des constructions géométriques précises et complexes, mais aussi et surtout parce qu'ils permettent d'enrichir la démarche d'investigation, les capacités d'analyse et d'observation, ainsi que la pratique du raisonnement inductif, notamment grâce aux figures « dynamiques », c'est-à-dire qui contiennent des objets variables. En cycle 3 et en début de cycle 4, les activités avec logiciel de géométrie dynamique seront surtout centrées sur des constructions simples qui utilisent les définitions ou propriétés des figures usuelles, en amenant les élèves à comprendre par exemple qu'une figure n'est bien construite que lorsqu'elle ne se déforme pas lorsqu'on déplace ses sommets.

Ces outils sont notamment précieux pour observer rapidement un grand nombre de configurations, ainsi que pour étudier les effets des transformations du plan sur les figures, notamment pour les translations, les rotations et les homothéties dont les définitions ponctuelles ne sont pas données au collège, et de mettre en évidence les invariants liés à ces transformations.

De façon générale, l'utilisation d'outils numériques doit amener une plus-value par rapport à l'usage du papier-crayon. L'objectif n'est pas de rendre les élèves experts sur un logiciel de programmation ou de géométrie dynamique, mais bien que ces outils soient des supports pertinents au raisonnement mathématique.

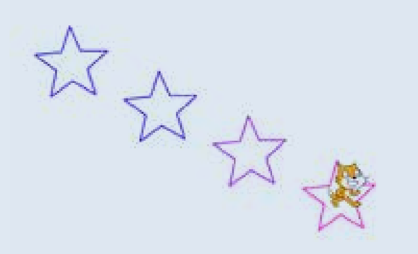
L'utilisation régulière en classe des outils numériques permettra de travailler les six compétences mathématiques. Plusieurs modalités sont possibles : soit une utilisation faite par les élèves en salle informatique, soit une utilisation montrée par le professeur grâce à l'ordinateur de la classe sur des fichiers préparés en amont qui permettent (sur un temps assez court) de présenter les fonctionnalités du logiciel.

Les outils numériques et les transformations

Comme l'indiquent les repères annuels de progression pour le cycle 4, les élèves sont amenés à transformer, à l'aide d'outils numériques, une figure. Ils doivent également identifier ces mêmes transformations dans des frises, des pavages et des rosaces. Un logiciel de programmation permet notamment d'appliquer des transformations et d'en identifier ses caractéristiques.

Exemple : à l'aide du script et de la capture de la scène ci-après[132] (p. 134), identifier la transformation appliquée à la première étoile et en donner les caractéristiques.

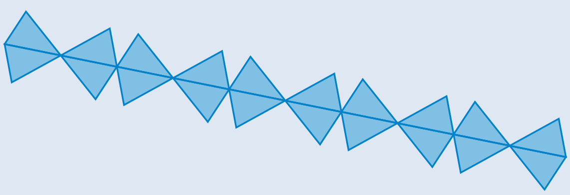
132 — Captures issues du site https://scratch.mit.edu/



La capture de la scène permet d'identifier la transformation utilisée, mais au-delà, l'exécution du script permet aux élèves de voir la transformation (translation) en action. Certains éléments du script permettent de calculer la longueur du déplacement grâce au repère de la scène de Scratch : on se déplace de 100 pas (ou pixels) vers la droite et on descend de 50 pas, et on peut faire apparaître un triangle rectangle pour utiliser le théorème de Pythagore.

Un logiciel de géométrie dynamique permet également de décrire plus facilement les effets des transformations dans des frises, des pavages et des rosaces.

Exemple : reproduire la frise suivante dans un logiciel de géométrie dynamique.



La frise est donnée sous forme d'image par le professeur dans un fichier de logiciel de géométrie dynamique. Ses éléments n'en seront alors pas déformables par l'élève qui pourra construire par-dessus. Le professeur pourra apporter des aides pour que tous les élèves se lancent dans la construction. Il pourra les pousser à choisir un élément géométrique de départ le plus petit possible afin d'utiliser le plus de transformations différentes possible. Dans tous les cas, le logiciel de géométrie apporte une souplesse et une instantanéité qui permettent de faire des essais, de corriger ses erreurs et d'améliorer rapidement son analyse. De plus, les outils de transformation du logiciel imposent d'en donner les caractéristiques complètes et précises.

Les outils numériques et le raisonnement

Les outils numériques se prêtent à la mise en œuvre de la compétence « raisonner » et en développent facilement certains aspects. Ils permettent tout d'abord d'analyser et d'exploiter ses erreurs. Dans l'exemple précédent de la frise, les élèves font des essais et analysent leurs erreurs afin de proposer de nouveaux essais jusqu'à trouver les transformations utilisées.

Par ailleurs, grâce à un logiciel de géométrie dynamique, on peut agir sur une figure construite tout en conservant ses propriétés. Par exemple, on peut demander aux élèves de construire un rectangle dont les dimensions peuvent varier, puis de déplacer ses sommets pour émettre une conjecture sur ses diagonales. Ce logiciel permet ainsi de découvrir les propriétés caractéristiques des quadrilatères par raisonnement inductif, sans pour autant chercher à faire un catalogue exhaustif de toutes leurs propriétés.

Les outils numériques favorisent également le développement du raisonnement inductif. Ils permettent de faire une hypothèse et sont un appui pour la confirmer. S'ils n'ont pas valeur de démonstration, ils peuvent en revanche constituer un support très efficace pour raisonner. Par exemple, ils permettent d'observer sur un très grand nombre de triangles que la somme de ses angles est égale à 180°, mais pour le prouver, il faut passer par un raisonnement déductif en lien avec les angles alternes internes ou les symétriques des angles par rapport aux milieux des côtés, de préférence sur support papier.

Les outils numériques et les autres compétences

Les outils numériques permettent de développer les autres compétences mathématiques.

La compétence « chercher » est l'une des compétences les plus exploitées à l'aide des outils numériques. En effet, ceux-ci permettent de :

— **tester** : par exemple, chercher l'emplacement d'un point pour que deux aires soient égales ;
— **décomposer un problème en sous-problèmes** : par exemple, trouver le motif élémentaire dans une frise, ce qui nécessite de décomposer toutes les transformations appliquées afin de réaliser soi-même la figure. On notera ici la nécessité de raisonner avant de construire ;
— **émettre une conjecture** : par exemple, construire les médiatrices d'un triangle pour conjecturer que, quel que soit le triangle, celles-ci sont concourantes en un point.

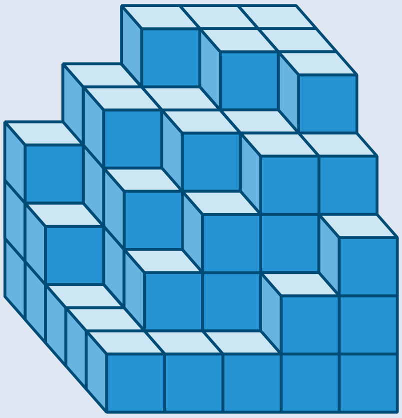
Un logiciel de géométrie dynamique permet également de travailler la compétence « représenter ». Des problèmes de lieux peuvent être proposés afin d'observer des faits remarquables. Il favorise aussi les changements de cadres : passer du langage informatique au langage mathématique et inversement. Par exemple, à partir d'un programme, l'élève est amené à comprendre et identifier les caractéristiques d'une transformation. Dans l'exemple précédent de l'étoile, on passe d'un cadre numérique à un cadre géométrique en identifiant les déplacements dans le programme pour déterminer la longueur du déplacement de la translation.

Enfin, à partir d'une situation réelle, les élèves peuvent faire appel aux outils numériques afin d'en identifier un modèle mathématique. Dans ce cas, la compétence « modéliser » sera mobilisée.

Problème 1. On me voit ! On ne me voit plus !

Énoncés

1. On me voit bien !
Ma petite sœur **empile** des cubes les uns sur les autres, tous de même forme. Voici sa construction.
Combien a-t-elle empilé de cubes ?



2. On me voit un peu moins !
Martin veut construire la même jardinière que sur la photo[133] ci-contre.
De combien de briques aura-t-il besoin ?

3. On ne me voit plus !
L'entreprise Sucromania fabrique du sucre en morceaux. Elle souhaite conditionner ses morceaux dans un emballage parallélépipédique de 280 mm de long, 140 mm de large et 70 mm de hauteur.
Sachant qu'un sucre a la forme d'un pavé droit de 14 mm de long, 14 mm de large et 10 mm de hauteur, combien de sucres peut-elle mettre au maximum afin d'optimiser son emballage ?

133 — Photo : http://www.terrealdeco.com/realisation/jardiniere-en-brique-pleine-jasmin/

Mots-clés

Vision dans l'espace, représenter, raisonner.

Pourquoi ce problème ?

En géométrie dans l'espace, les évaluations internationales montrent que les élèves rencontrent des difficultés à penser ce qui n'est pas visible. Ces problèmes ont pour objectif de travailler la vision dans l'espace qui pose des soucis à de nombreux élèves, tout en ancrant les mathématiques dans un contexte réaliste. Ils permettent également de manipuler des solides puis d'en faire une représentation.

Ce travail se réalise en trois temps :
- d'abord sur des cubes bien visibles : même si une partie d'entre eux ne se voient pas, le fait que l'énoncé précise qu'ils sont empilés rend facile la compréhension de la figure ;
- ensuite sur un solide dont une partie est cachée ;
- enfin sur une situation sans support visuel.

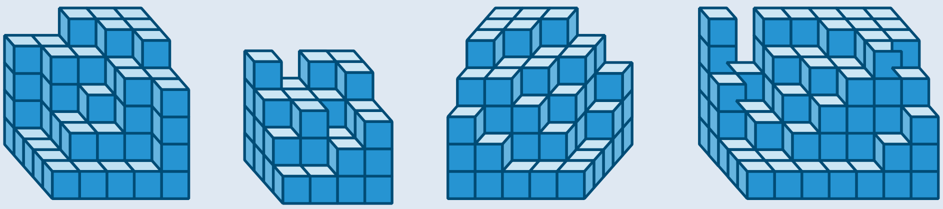
Ressorts de continuité ou éléments de progressivité

Un élève sait dès le primaire représenter des cubes et pavés droits. Au niveau 6^{e}, on attend de l'élève qu'il dénombre sur la première figure les cubes visibles et non visibles, puis qu'il se construise une représentation de l'objet auquel il n'accède que partiellement sur la deuxième figure. Enfin dans la dernière situation, on attend qu'il se représente lui-même les objets mathématiques.

Stratégies d'enseignement

On pourra encourager la manipulation quel que soit le type d'exercice, le niveau de difficulté, ou le niveau envisagé.

Pour la première question (énoncé 1), la manipulation peut s'avérer particulièrement efficace, sachant qu'une construction partielle du solide peut suffire (on peut par exemple se contenter de construire les 3 étages supérieurs à l'aide de petits cubes). En construisant les premiers étages, les élèves doivent comprendre que les cubes qui ne se voient pas **existent bien** pour permettre aux autres cubes de tenir sur les niveaux supérieurs par gravité. Ils doivent comprendre que les cubes ne sont ni aimantés, ni reliés entre eux. Ce que l'on ne voit pas est en réalité rempli de petits cubes qui composent la structure même du solide. Pour cette même question, on peut envisager de faire varier la complexité de la figure proposée dans le cadre d'un travail différencié, en proposant par exemple les figures suivantes (dans cet ordre).



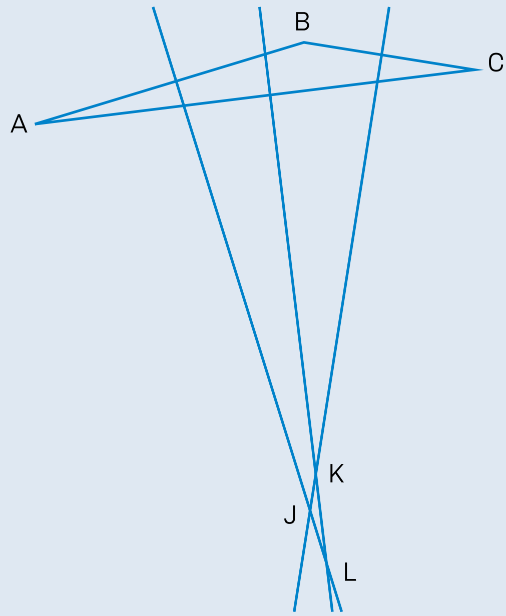
On peut également proposer des questions différentes. Par exemple, pour la série de figures ci-dessus, il est possible de demander combien il manque de cubes pour compléter le pavé. On peut également, en prolongement, proposer de représenter différentes vues, voire d'enlever ou d'ajouter un ou plusieurs cubes pour que deux vues deviennent identiques (en veillant cependant à conserver une longueur raisonnable pour l'ensemble du problème).

Concernant la question 2, il sera utile de se mettre d'accord sur la modélisation de la jardinière avant d'élaborer une stratégie de résolution. On pourra par exemple convenir que la jardinière est composée de quatre murs perpendiculaires (le mur du fond est peu visible mais présent) et qu'elle n'a pas de fond (la présence d'un fond complexifie singulièrement la situation, elle peut éventuellement être envisagée dans le cadre d'un travail différencié). Pour aider les élèves qui n'accèdent pas à la modélisation, il est intéressant d'avoir des buchettes de bois en forme de pavés droits pour construire la jardinière. Elles peuvent permettre de visualiser ce qu'on ne voit pas ou de comprendre comment sont reliés les « coins » de la jardinière, ou encore de comprendre la disposition en quinconce des briquettes.

La question 3 comporte un saut non négligeable en termes mathématiques (représentation et justification). Cette justification de l'optimisation peut faire appel au volume, qui permet de déterminer le nombre maximal de sucres que peut contenir le carton, puis à une des configurations possibles qui montre que ce maximum est atteint. Dans le cadre d'un travail différencié, on pourra éventuellement envisager de faire varier les dimensions du carton pour qu'il ne soit pas entièrement rempli, la justification de l'obtention d'une configuration optimale devenant alors nettement plus ardue. Afin d'aider les élèves, il est utile d'avoir une boîte de sucres, par exemple pour permettre aux élèves de comprendre comment il est possible de ranger les sucres dans le contenant.

Problème 2. Figure trompeuse

Énoncé



Ce problème peut être proposé dans une classe de 5ᵉ.

Le professeur montre la figure ci-contre, qu'il a réalisée sur une grande feuille, en expliquant « naïvement » qu'il a voulu construire les trois médiatrices des côtés d'un triangle ABC et qu'il a obtenu un petit triangle JKL qui lui paraît étrange.

À chaque élève, il propose trois autres triangles ABC et leur demande pour laquelle de ces trois configurations on obtiendra le triangle JKL le plus petit.

Mots-clés

Géométrie plane, construire, précision, médiatrice d'un segment (définition et propriété caractéristique).

Pourquoi ce problème ?

Ce problème peut servir d'activité de découverte de la propriété de concours des médiatrices des côtés d'un triangle, mais il a un autre objectif, plus général, dans la formation des élèves à la géométrie du raisonnement. En provoquant un « choc didactique », il amène les élèves à comprendre et retenir qu'il ne faut pas faire confiance à une figure dessinée « à la main », et ainsi à percevoir la différence entre la géométrie dessinée (ou des instruments) et la géométrie abstraite (ou du raisonnement). On pourra même expliquer que les objets mathématiques, même géométriques, sont des modèles « impalpables » et que l'on doit savoir raisonner juste sur une figure fausse (en général effectuée à main levée). De plus, il peut être intéressant, pour apprendre aux élèves à porter un regard critique sur leur propre travail, de vérifier une construction qu'ils effectuent.

Ce problème est largement inspiré d'une situation décrite par Guy Brousseau[134] et analysée par Catherine Houdement et Jean-Philippe Rouquès[135].

Ressorts de continuité ou éléments de progressivité

Les premiers raisonnements simples et sans formalisme de CM2 sont enrichis en fin de cycle 3 en s'appuyant sur les propriétés des droites parallèles et perpendiculaires, celles des côtés, des diagonales et des angles des figures usuelles (triangles et quadrilatères particuliers). Ces raisonnements permettent d'effectuer des constructions ou de découvrir de nouvelles propriétés des figures. Même si certains objets mathématiques ne sont pas mathématiquement définis (comme les droites), les définitions des figures usuelles se font plus précises. Par exemple, un rectangle est défini comme un quadrilatère qui a trois angles droits alors que les leçons d'école primaire le décrivent plus longuement, sans distinguer définition et propriétés.

Au cycle 4, le travail sur les codages est consolidé par des tâches régulières d'interprétation et de réalisation de figures avec les instruments à partir de figures codées. Peu à peu, les raisonnements menés sur des figures tracées en vraie grandeur laissent place à des raisonnements élaborés à partir de figures à main levée.

La posture de doute, la démarche indispensable de recherche de la preuve et la constatation qu'une figure en vraie grandeur doit être très précise sont particulièrement importantes dès le début du cycle 4. Par la suite, il faudra rappeler cette situation-problème lorsque les élèves feront une erreur de construction et surtout lorsque l'on attendra une preuve.

Stratégies d'enseignement

Il faut bien garder à l'esprit qu'un professeur qui appuie sa démarche sur une figure fausse doit indiquer très clairement, après la résolution du problème, que la figure proposée initialement était fausse car mal construite (notamment lors de la trace écrite).

134 — Guy Brousseau, « Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire », Séminaire de didactique des mathématiques, Crète, Rethymon, 2000 : https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00515110/fr/

135 — Catherine Houdement, Jean-Philippe Rouquès, « Deux géométries en jeu dans la géométrie plane : une qu'on appellera "dessinée" et une qu'on appellera "abstraite" », 2016 : https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03214099v2/document

Lors de la résolution, le professeur propose des triangles assez grands, de formes variées, ayant un angle obtus ou non – il peut aussi laisser les élèves construire leurs propres triangles. Plus les élèves s'appliquent, plus le triangle JKL est petit, jusqu'à n'être plus visible. C'est ce que le professeur doit parvenir à faire constater : il pourra projeter au tableau (par exemple grâce à un visualiseur) un grand nombre de constructions en interrogeant leurs auteurs sur le soin apporté. Il pourra aussi reconnaître que lui-même ne s'est pas beaucoup appliqué pour construire la figure montrée avec la consigne. La classe peut alors établir la conjecture que les points J, K et L sont confondus. Elle peut être appuyée par la construction, avec un logiciel de géométrie dynamique, sur l'ordinateur du professeur dont l'écran est projeté, ou faite par les élèves. Il est particulièrement important d'en apporter la preuve pour que les élèves comprennent la différence entre voir et démontrer, mais aussi pour qu'ils soient persuadés que c'est un seul point qu'il faut obtenir et non un triangle.

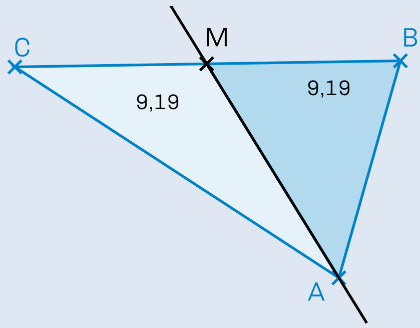
La démonstration que les médiatrices des côtés d'un triangle sont concourantes (puis que leur point de concours est le centre d'un cercle, qui est circonscrit au triangle) peut être dirigée par le professeur, étape par étape, sans attendre de formalisme particulier de la part des élèves en début de cycle 4.

Une variante de la consigne, plus ouverte et plus proche de la situation présentée par Guy Brousseau, peut être : « Construire un triangle ABC qui aura le triangle JKL le plus grand possible. » Elle nécessite plus de temps de travail, mais permet l'élaboration d'une démarche d'investigation par les élèves et ainsi davantage de constructions, avec, le plus souvent, une recherche de précision dans les tracés.

Focus | Une séquence d'enseignement autour des triangles et des aires

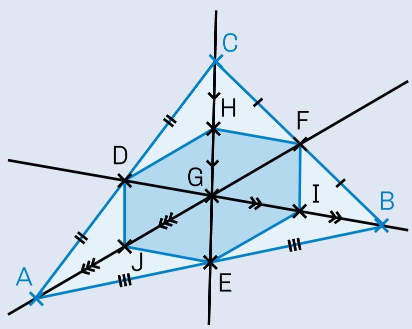
Énoncé

PARTIE I



a. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, tracer un triangle ABC. Placer le milieu M du segment [BC] et afficher les aires des triangles ABM et ACM.
b. Déplacer les points A, B et C. Que peut-on conjecturer ?
c. Démontrer la conjecture énoncée.

PARTIE II



Soit ABC un triangle. Les points E, F et D sont les milieux respectifs des côtés [AB], [BC] et [AC].
On admet que les droites (AF), (BD) et (CE) sont concourantes en un point qu'on nomme G.
Les points H, I et J sont les milieux respectifs des côtés [CG], [BG] et [AG].
Montrer que l'aire de l'hexagone FIEJDH obtenu est égale à la moitié de l'aire du triangle ABC.

Mots-clés

Conjecture, démonstration, GeoGebra[136], triangles, aires, hexagone, raisonner, chercher, communiquer.

136 — GeoGebra est un logiciel de géométrie dynamique.

Pourquoi ce problème ?

Ce problème permet de conjecturer puis de démontrer une propriété générale pour ensuite l'appliquer à un exemple. Il permet d'initier les élèves à la démonstration en utilisant les propriétés des figures usuelles (ici, principalement le triangle), et le raisonnement occupe une place centrale.

Les prérequis sont peu nombreux (hauteurs et aire d'un triangle). Une résolution dès la classe de 5e peut être envisagée. L'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique permet de multiplier les essais et d'émettre une conjecture.

Dans ce problème, on retrouve les trois étapes fondatrices du raisonnement mathématique :

Conjecturer ▶ **Démontrer** ▶ **Appliquer**

La conjecture va être émise après l'observation et l'analyse des figures produites avec le logiciel de géométrie. La démonstration va permettre de rendre universelle cette propriété.

La troisième étape permet de mener un raisonnement en s'appuyant sur la propriété démontrée.

Ressorts de continuité ou éléments de progressivité

Le passage de la géométrie des tracés à la géométrie théorique est un objectif central du cycle 4. Cette géométrie théorique repose sur les raisonnements et la démonstration. Ce problème permet de proposer plusieurs démonstrations (parties I et II) s'appuyant sur très peu de prérequis.

Stratégies d'enseignement

Ce problème gagne à être proposé en groupe ou en binôme afin de multiplier les points de vue – l'apprentissage entre pairs étant un élément d'efficacité.

PARTIE I

L'objectif de cette partie est de démontrer la propriété : « Une médiane d'un triangle partage ce triangle en deux triangles de même aire. » La notion de médiane d'un triangle n'est plus présente dans les textes officiels, cependant ce problème peut être fait sans utiliser le mot « médiane », la propriété étant alors énoncée de la façon suivante : « Si, dans un triangle ABC, on nomme M le milieu du côté [BC], alors la droite (AM) partage le triangle ABC en deux triangles de même aire. »

La mise en œuvre de cette partie peut nécessiter une explication préalable de vocabulaire, notamment le terme de conjecture. Les élèves vont assez vite trouver que, quelles que soient les longueurs et la forme du triangle, les aires sont égales. Cependant, la formulation de la conjecture risque d'être maladroite dans un premier temps. Il est important de laisser vivre ces formulations intermédiaires afin de centrer le débat sur la propriété obtenue et sur le raisonnement pour la démontrer. Un temps de mise en commun sera nécessaire pour formuler correctement et rigoureusement la conjecture établie par l'ensemble de la classe.

En début de cycle 4, la démonstration sera certainement confuse et peu argumentée. Le professeur veillera à faire évoluer les démonstrations de chaque groupe sans imposer une trame, mais en aidant à organiser les idées de tous. La précision du vocabulaire utilisé est primordiale, les notations géométriques prennent ici tout leur sens.

Enfin, il serait intéressant de présenter plusieurs démonstrations (à l'aide d'un visualiseur par exemple) et de tirer les points positifs et négatifs de chacune. Avec l'aide de la classe, une démonstration regroupant tous les critères dégagés précédemment pourra être rédigée et utilisée comme modèle pour les élèves. Il est important qu'une trace écrite validée par l'enseignant et la classe soit laissée dans le cahier.

Remarques :

- la démonstration de la conjecture (question b) peut être guidée ou non : on peut introduire un point H tel que H soit le pied de la hauteur issue de A ;
- il semble incontournable de rappeler la formule de l'aire d'un triangle en amont de la résolution du problème ;
- les triangles AMC et AMB ne sont pas égaux (sauf cas particuliers), mais ils ont la même aire, ce qui permet de rappeler que deux figures de même aire ne sont pas forcément superposables ;
- la verbalisation de la conjecture obtenue est primordiale. Il faudra s'accorder sur la formulation de la propriété trouvée avant d'essayer de prouver quoi que ce soit ;
- on retrouve ici le triptyque manipuler (avec GeoGebra) – verbaliser (avec le groupe et l'enseignant) – abstraire (démontrer et être convaincu que cette propriété est toujours vraie) ;
- il n'y a pas de longueurs données, et il est important de ne pas en donner pour pouvoir mener un raisonnement général et ainsi favoriser la phase d'abstraction sans rester « accroché » à un cas particulier.

PARTIE II

L'application de la propriété (démontrée dans la partie I) à un cas plus complexe permet de valider son utilité auprès des élèves. Les prolongements proposés peuvent constituer une réactivation du raisonnement mis en œuvre précédemment.

Le schéma de démonstration est plus simple dans cette partie que dans la partie précédente puisqu'il suit une trame classique :

On vérifie les hypothèses (toutes les conditions sont remplies). ▶ **On applique la propriété.** ▶ **On conclut.**

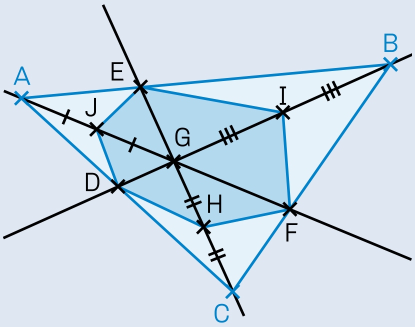
Cependant, même s'il est important de remarquer ce cheminement, il **ne saurait être question** de le rédiger en suivant une trame imposée du type « je sais que, or, donc ». Les élèves pourront cependant être encouragés à utiliser le « donc » plutôt que le « car » (par exemple, « ce quadrilatère a quatre angles droits donc c'est un rectangle » plutôt que « ce quadrilatère est un rectangle car il a quatre angles droits »), ce qui deviendra indispensable lors de la rédaction de raisonnements déductifs complexes.

Remarques :

- **point de vigilance** : les médianes sont concourantes en G ; on pourra utiliser GeoGebra pour le faire constater aux élèves et l'admettre ;
- la difficulté principale réside dans la décomposition de la figure. L'élève doit observer que cette figure est un assemblage de six triangles (ayant G comme sommet commun) et appliquer six fois la propriété vue en partie I ;
- observation de la figure : le point G est le point d'intersection des diagonales [DI], [EH] et [FJ] ;
- on pourra donner une figure déjà faite ou bien une figure à main levée puis demander aux élèves de la faire en vraie grandeur ; ou bien ne pas du tout la donner et la faire tracer aux élèves.

Pour aller plus loin

Soit ABC un triangle. On place un point G à l'intérieur du triangle ABC.
La droite (AG) coupe le côté [BC] en F, la droite (BG) coupe le côté [AC] en D et la droite (CG) coupe le côté [AB] en E.
Les points H, I et J sont les milieux respectifs des côtés [CG], [BG] et [AG].
Montrer que l'aire de l'hexagone FIEJDH obtenu est égale à la moitié de l'aire du triangle ABC.



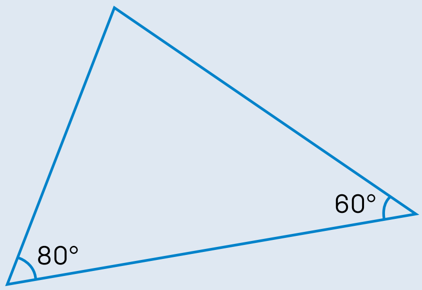
Remarques :

- le point G est placé à l'intérieur du triangle : il sera intéressant de déplacer le point G et de constater que l'hexagone change de forme, mais qu'il a toujours la même aire ;
- la figure est moins « régulière » que celle obtenue à la partie II du précédent énoncé ;
- on enlève la contrainte des médianes concourantes en G ;
- les scénarios envisagés à la partie II peuvent être envisagés ici ;
- les droites utilisées ne sont pas remarquables.

Problème 3. Le triangle mystère (raisonner pour construire)

Énoncé

Construire le plus précisément possible un triangle qui comporte un angle de 60° et un autre de 80° et dont le périmètre est égal à 15 cm[137].



Mots-clés

Géométrie plane, construction, triangles semblables, représenter, raisonner.

Pourquoi ce problème ?

Au premier abord, ce problème peut sembler simple puisqu'il s'agit de construire un triangle, tâche familière pour des collégiens. Mais cette construction nécessite de faire au préalable un raisonnement assez atypique. Pour le résoudre, il faudra s'appuyer sur deux triangles semblables : le premier qui va respecter les mesures d'angles données, que l'on va tracer avec les outils de géométrie et sur lequel on effectuera des mesures de longueur, et le second qui répondra aux critères demandés (périmètre compris), que l'on ne peut qu'imaginer, et éventuellement représenter à main levée, au départ. Il s'agit non seulement de saisir la proportionnalité existante entre les longueurs des côtés qui se correspondent, mais également la proportionnalité entre les périmètres des deux triangles.

Ce problème permet d'utiliser les triangles semblables dans un autre contexte que le calcul d'angle ou d'une longueur de segment à segment correspondant.

137 — Problème issu de la compétition Mathématiques sans frontières 3e-2de, académie de Strasbourg, décembre 1997, « Dessine-moi un triangle » : http://maths-msf.site.ac-strasbourg.fr/spip/spip.php?article573

Ce problème sera notamment difficile à résoudre si l'on commence par procéder en tâtonnant à partir des mesures des côtés. Pourtant, beaucoup d'élèves s'interrogent d'abord sur la mesure du premier côté à tracer, puis choisissent comme mesures des côtés en centimètres un triplet de nombres dont la somme est égale à 15 et sont alors amenés à ajuster ces mesures en surveillant l'évolution des angles, en pure perte. Même les petits raisonnements qui mènent à constater que le triangle n'est ni isocèle ni rectangle, qu'aucun de ses angles n'est obtus et que la longueur de son plus grand côté est strictement inférieure à 7,5 cm ne permettent pas de progresser.

En revanche, en construisant un triangle tenant compte seulement des deux premières contraintes données dans l'énoncé, c'est-à-dire les mesures des deux angles, on peut ensuite facilement construire un autre triangle semblable à celui-ci (donc avec les mêmes angles), mais de périmètre 15 cm, avec un raisonnement sur les triangles semblables et un calcul de proportionnalité sur les longueurs des côtés.

Ressorts de continuité ou éléments de progressivité

Se résolvant grâce à un raisonnement basé sur les triangles semblables, ce problème trouve sa place en classe de 3^{e}, plutôt en fin de séquence sur ce sujet, car il est assez difficile.

Dès la classe de 6^{e}, des problèmes de construction nécessitant des raisonnements et s'appuyant sur la définition du cercle, la distance entre deux points et les relations entre des droites en particulier, sont proposés. Ils ont pour objectifs de former à représenter une figure par un dessin à main levée et codée, à acquérir le langage géométrique en rendant compte, le plus souvent oralement, de petits raisonnements. Ces raisonnements s'enrichissent au cycle 4 avec de nouvelles propriétés des quadrilatères et les théorèmes enseignés.

Au lycée, la recherche des valeurs exactes des longueurs peut invoquer la loi des sinus.

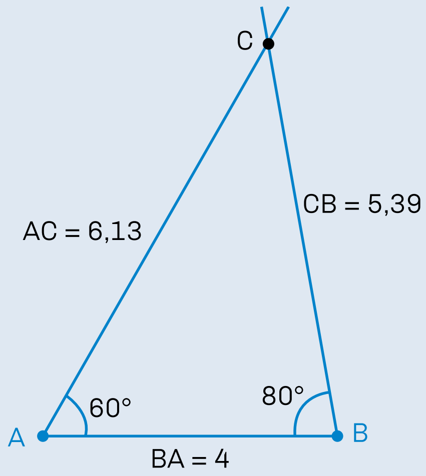
Stratégies d'enseignement

Aucun mot de l'énoncé ne présente de difficulté particulière (même s'il faut toujours s'assurer que les élèves ne confondent pas périmètre et aire). Pour résoudre ce problème, on commence par fixer arbitrairement (mais raisonnablement) la mesure d'un premier côté et on trace un triangle dont deux angles mesurent 60° et 80°. On recommence cette étape en calculant le périmètre des triangles obtenus en essayant de les faire évoluer vers un périmètre de 15 cm. Cela peut être indiqué à des élèves qui ne démarrent pas ou s'égarent trop longtemps dans une stratégie dont on leur montre qu'elle n'aboutira pas. Après un petit temps de recherche individuelle, on peut proposer à des binômes d'élèves de comparer leurs premières constructions. En constatant que les triangles ont la même allure si on tourne (ou même si on retourne) les feuilles, il s'agit de réussir à faire émerger la notion de triangles semblables à partir de deux angles égaux deux à deux puis d'inciter à revenir à la définition ou à la propriété caractéristique sur les côtés dont les longueurs sont proportionnelles. Ayant à leur disposition plusieurs exemples de triangles, il reste à choisir celui dont le périmètre permettra le calcul de proportionnalité le plus simple avant de construire le triangle demandé.

La mise en commun des résultats des élèves peut s'avérer délicate si le professeur n'explicite pas assez tôt le statut des mesures utilisées. Il est indispensable d'utiliser les mesures des deux côtés du triangle obtenu après construction des deux angles. Or ces mesures sont nécessairement très imparfaites, ce qui entraînera des différences, éventuellement assez nettes dans les résultats. Les élèves obtiendront des triangles assez proches, mais pas rigoureusement identiques. Il faudra bien, malgré tout, choisir des mesures pour développer le raisonnement et le professeur veillera à bien mettre en avant la démarche et à aider à prendre du recul sur les résultats.

Le raisonnement à faire ensuite permet de comprendre que, puisque les triangles qui répondent aux premières contraintes de l'énoncé sont semblables, alors le triangle recherché est celui qui a, en outre, un périmètre précis. On incite alors les élèves à revenir à la définition ou à la propriété caractéristique sur les côtés dont les longueurs sont proportionnelles. Ils sont encouragés à relire leur leçon en comparant les énoncés de ses propriétés avec les éléments connus dans l'exercice, puis incités à utiliser les mesures des deux autres côtés de leurs triangles. À cette étape, on peut leur proposer d'utiliser un logiciel de géométrie dynamique (par groupes ou seulement avec l'ordinateur du professeur dont l'écran est projeté pour la classe) qui donnera des mesures un peu plus fiables, même si elles ne seront pas parfaites, grâce à une construction plus précise. Il est utile que le professeur explique que la démarche de cet exercice est particulière car elle associe mesures empiriques et raisonnement déductif.

Ayant à leur disposition plusieurs exemples de triangles, ils peuvent calculer leur périmètre et, en ajustant peu à peu la mesure du premier côté choisi ou en comparant les résultats obtenus dans la classe, constater que le triangle cherché a un premier côté (celui qui est adjacent aux angles de 60° et 80°) dont la longueur est comprise entre 3,5 cm et 4 cm. En effet, voici ce que l'on obtient en utilisant le logiciel GeoGebra :



Pour utiliser la notion de proportionnalité des côtés des triangles semblables, il leur reste à en choisir un pour effectuer le calcul de proportionnalité. Par exemple, on pourra leur demander de produire un tableau de proportionnalité qui reprend la mesure d'un côté et le périmètre d'un triangle déjà construit et de l'utiliser pour calculer la valeur approchée de la mesure du premier côté dans le triangle cherché.

Longueur AB en cm	**Longueur AC en cm**	**Longueur BC en cm**	**Périmètre du triangle en cm**
3	4,6	4,04	11,64
3,5	5,36	4,76	13,62
4	6,13	5,39	15,52
5	7,66	6,74	19,4

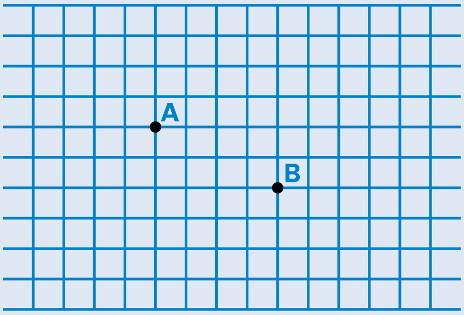
Périmètre du triangle en cm	19,4	15
Longueur AB en cm	5	?

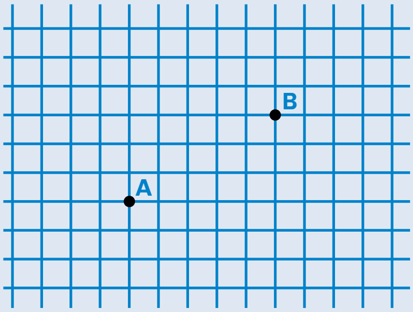
Il convient d'être vigilant sur le fait que cette démarche s'oppose à ce que l'on attend souvent des élèves en géométrie, à savoir une démarche qui repose sur un raisonnement et non sur la mesure sur une figure. Les démarches expérimentales qui font appel à des mesures sur une figure ont toute leur place dans la résolution de problèmes (par exemple lorsque l'élève construit une représentation à l'échelle d'une situation réelle et mesure sur sa figure), mais, pour éviter les confusions, on veillera à bien expliciter les différentes démarches et à sensibiliser les élèves à leurs différences, et ce tout au long du collège.

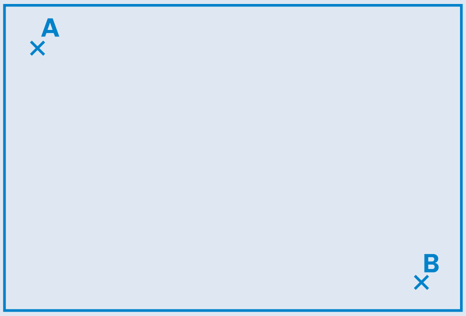
Problème 4. Le grand défi (construire pour raisonner)

Énoncé

Chacune des figures suivantes est constituée de deux points A et B. Chacune d'elles doit être complétée par un point J qui respecte les conditions suivantes :
— I, C et D sont trois points tels que I est le milieu des segments [AC] et [BD] ;
— E est le point tel que A est le milieu du segment [DE] ;
— J est le milieu du segment [CE].
Soyez le premier groupe à placer très précisément le point J sur toutes les figures pour remporter le défi. Vous devrez ensuite être capables de convaincre les autres groupes que toutes vos figures sont correctes !







Mots-clés

Géométrie plane, construction, parallélogramme, conjecture, géométrie dynamique, représenter, raisonner.

Pourquoi ce problème ?

Ce problème nécessite dès le début de sa résolution une prise d'initiative originale de la part de l'élève. En effet, la construction va reposer sur un point C (ou un point D) qui n'est pas donné et pour lequel on n'a aucune indication. L'élève doit donc faire preuve d'imagination et, en quelque sorte, de confiance en lui pour placer ce point où il le souhaite et continuer la construction qui s'avère ensuite assez facile.

L'observation de plusieurs figures précises (faites à la main et/ou avec un logiciel de géométrie dynamique) amène un raisonnement inductif. Les multiples représentations obtenues par le groupe, la classe ou grâce à un logiciel semblent très variées de prime abord puisque les points A, B et même C sont placés sans aucune contrainte. Mais leur comparaison amène à constater que les positions des premiers points n'ont pas d'influence sur la position du point J cherché : il est toujours le milieu du segment [AB]. On passe donc de cas particuliers à un cas général. L'étonnement qui résulte de ce premier raisonnement est une stimulation pour nombre d'élèves, car cela ne se réduit pas, pour eux, à une vérification d'un résultat annoncé.

Un autre moyen de motiver les élèves est la présentation de la consigne sous forme de défi : cela donne une dimension ludique, avec un enjeu de vitesse et de précision d'exécution entre les groupes où chacun a à cœur de s'investir.

Ce problème contient aussi un élément intéressant pour la gestion de l'activité par le professeur lui-même : le point J cherché étant le milieu du segment [AB] donné initialement, le professeur peut vérifier d'un seul coup d'œil la construction de chaque élève. Il pourra d'ailleurs expliquer aux élèves que cette figure a une propriété qui lui permet de le faire, sans pour autant dévoiler ce qu'elle est pendant la phase de recherche. Cet aspect intrigue facilement les élèves qui, là encore, peuvent être stimulés.

Enfin, comme d'autres problèmes de géométrie classique, la construction demandée est complexe sans être difficile à exécuter, et les élèves y apprennent à coder au fur et à mesure, à prouver ce qui est établi par un raisonnement inductif puis, dans la phase de raisonnement déductif, à décomposer la figure en sous-figures, extraites les unes après les autres, mais dans l'ordre de la construction.

Ressorts de continuité ou éléments de progressivité

Ce problème pourra être proposé à partir de la classe de 5^{e}, lorsque les propriétés du parallélogramme sont connues. Il fait travailler la compétence « représenter », mais aussi plusieurs aspects de la compétence « raisonner » : le raisonnement inductif basé sur l'observation de plusieurs constructions complètes et le raisonnement déductif à plusieurs étapes qui devra être davantage accompagné par le professeur en début de cycle. La communication de la preuve, bien organisée à l'écrit, n'est qu'un attendu de fin de cycle 4.

Stratégies d'enseignement

La consigne s'adresse à des groupes d'élèves, car un travail individuel serait long et assez fastidieux, ce qui ferait courir le risque de les désintéresser de la situation étudiée.

Les figures données à chaque groupe permettent une différenciation : les figures avec quadrillage sont plus faciles à exécuter et à vérifier entre élèves. La dernière figure proposée est importante d'un point de vue didactique, car la construction pas à pas oblige à sortir du cadre ; pour placer le point J, il sera nécessaire de conjecturer sa position. Cela rend le raisonnement nécessaire : les élèves ne peuvent pas se contenter d'exécuter une construction.

Une ou deux autres figures peuvent être ajoutées pour assurer un bon raisonnement inductif avec des constructions sur papier, mais elles peuvent être remplacées avantageusement par une deuxième partie de construction avec un logiciel de géométrie dynamique. Aucun fichier préparé par le professeur n'est utile : les points A et B de départ sont quelconques.

Si chaque étape de la construction ne comporte aucune difficulté technique particulière après l'étude des parallélogrammes en classe de 5e, la première requiert une prise d'initiative : le point C (ou le point D) peut être placé où l'on veut sans que cela change la position du point J. Cela va souvent déstabiliser les élèves qui ne connaissent initialement pas le résultat et il sera nécessaire de différencier l'aide apportée. Le professeur doit donc les inciter à se lancer dans la démarche sans plus d'indication, en les rassurant, ou même proposer explicitement de placer le point C où ils veulent.

La conjecture sera plus facile à établir dans certains groupes que dans d'autres. Pour faire un temps de régulation, il est nécessaire d'attendre que tous les élèves aient chacun une figure bien réalisée. Si la construction avec un logiciel de géométrie dynamique vient ensuite, il est important de rappeler qu'elle ne permettra que de consolider la conjecture, pas de la prouver.

L'étonnement devant la conjecture, mieux que les petites imperfections dues aux erreurs de tracé sur certaines figures, amène la nécessité de la preuve : comment est-ce possible que le point J soit toujours le milieu de [AB] ? En début de 5e, le professeur pourra aider à déterminer les étapes de démonstration, en guidant plus ou moins les groupes selon leurs besoins. Il sera souvent amené à rappeler aux élèves de bien coder la figure au fur et à mesure et à leur demander d'extraire des parties de figure, car il n'est pas naturel pour eux de faire abstraction de certains éléments, de redessiner à main levée une partie de la figure. La dernière étape de démonstration nécessite l'utilisation de la propriété suivante dans le quadrilatère AEBC : « Si un quadrilatère non croisé a deux côtés parallèles et de même longueur, alors c'est un parallélogramme. » Si cette propriété n'a pas été donnée dans le cours, le professeur pourra la donner à l'occasion de ce problème.

Didactique. Raisonner pour construire et construire pour raisonner

Les problèmes de constructions occupent une place privilégiée dans le programme de cycle 4. L'objectif n'est cependant pas de rendre les élèves experts en construction avec les instruments ou avec un logiciel de géométrie dynamique, mais plutôt de leur apprendre à observer, analyser, modéliser et représenter des figures complexes afin de les faire raisonner. Le lien entre construction et raisonnement est à double sens et peut être développé via différents types de problèmes.

Raisonner pour construire

Il s'agit de problèmes dans lesquels un raisonnement est un préalable nécessaire à la construction d'une figure. Les compétences « chercher » et « représenter » y sont particulièrement développées, et le raisonnement est l'objectif principal. La construction en vraie grandeur peut y être secondaire et ne représenter qu'une application finale, l'aboutissement d'un raisonnement. Ainsi, ces problèmes doivent inciter à tracer des figures à main levée et à les coder, les codages étant des traductions des propriétés données dans le texte de l'énoncé. La figure à main levée et codée permet d'analyser les liens entre les différents éléments ou d'éviter des représentations erronées.

Ces problèmes peuvent être très simples ou beaucoup plus complexes. Envisageons par exemple le problème suivant : « Construire un rectangle EFGH tel que EF = 6 cm et EG = 8 cm. » Sans schéma codé, beaucoup d'élèves se font une mauvaise idée de ce qui est demandé et produisent un rectangle ayant pour dimensions 6 et 8 cm, alors que c'est la diagonale qui mesure 8 cm. De plus, la construction nécessite de faire appel à des propriétés, ce qui permet de montrer leur utilité sans les réduire à un catalogue de connaissances. L'objectif premier est bien de raisonner, puis d'aboutir à une construction.

Dans ce type de problème, on peut souvent différencier assez facilement la communication du raisonnement, et ce dès la classe de 6^{e}. Certains élèves donneront leur raisonnement plutôt à l'oral de manière maladroite, quand d'autres le feront à l'écrit et plus rigoureusement, mais tous feront une figure.

Les élèves seront souvent décontenancés par certains sujets qui ne donnent pas toutes les informations pour réaliser immédiatement la figure demandée. Ils suivront alors leur intuition et feront des essais dont certains pourront ne pas aboutir (cela pourra notamment être le cas du problème « Le triangle mystère », présenté p. 146), mais ces problèmes permettront souvent de développer les capacités d'analyse et de prise d'initiative des élèves.

Construire pour raisonner

À l'inverse, de nombreux problèmes nécessitent la réalisation d'une figure pour pouvoir élaborer un raisonnement. Les compétences « chercher », « modéliser » et « représenter » y sont les plus travaillées. La figure peut parfois amener à produire un raisonnement inductif (voir problème « Le grand défi », p. 150). Ces problèmes peuvent faire appel à une modélisation ou être purement mathématiques.

Les problèmes de modélisation, vécus ou issus d'une photo ou d'une vidéo, nécessitent le passage d'une situation réelle à un modèle mathématique (par exemple une figure géométrique), ce qui peut être un véritable obstacle pour les élèves. S'ils ne maîtrisent pas cette compétence, ils ne peuvent pas accéder au raisonnement. Il est donc essentiel de former les élèves à modéliser puis à représenter le modèle choisi, notamment pour les rendre plus autonomes dans l'utilisation d'outils mathématiques au-delà du strict champ mathématique.

L'exemple suivant[138] est présenté de façon à ce que l'élève ait besoin de s'imaginer la situation, de comprendre dans quel plan se placer pour effectuer ensuite la modélisation sous forme d'une figure géométrique plane, comportant toutes les informations nécessaires à la mise en œuvre du raisonnement déductif menant à la réponse :

« Lors d'une intervention, les pompiers doivent atteindre une fenêtre située à 18 mètres au-dessus du sol en utilisant une échelle télescopique qui pivote autour de son pied. Le pied de l'échelle est situé sur le camion à 1,5 mètre du sol et à 10 mètres de l'immeuble, en face de la fenêtre à atteindre. Une fois l'échelle positionnée, quel angle fera-t-elle avec l'horizontale et quelle longueur aura-t-elle ? »

Par ailleurs, certains problèmes purement mathématiques réclament un véritable travail de construction avant la phase de raisonnement. C'est notamment le cas des problèmes qui nécessitent d'énoncer une conjecture, par exemple en s'appuyant sur un raisonnement inductif à partir de l'observation de plusieurs figures (ou d'une figure dynamique). Dans ces problèmes, la construction d'une figure peut aider à la compréhension de la situation, mais peut aussi servir à décomposer un problème en sous-problèmes (voir par exemple le problème « Le grand défi », p. 150).

138 — Photo : Pixabay

En résumé

- Le passage de la géométrie perceptive à la géométrie du raisonnement est délicat et doit être accompagné de situations-problèmes qui illustrent la force du raisonnement.

- En géométrie, les élèves peuvent rencontrer deux types de difficultés liées à la perception : penser ce qui n’est pas visible (en particulier en géométrie dans l’espace), et penser juste même lorsque le visible induit en erreur (figures à main levée erronées en géométrie plane par exemple).

- Les logiciels de géométrie dynamique sont un appui essentiel et permettent la mise en œuvre d’une démarche scientifique : après le test sur de nombreux cas, les élèves conjecturent, puis peuvent s’engager dans la preuve.

- En géométrie, construction et raisonnement sont étroitement liés. La construction est un point d’appui à l’élaboration du raisonnement, et parallèlement, la réalisation de certaines constructions nécessite un raisonnement préalable.

VI

Grandeurs

Depuis 2002, la partie sur les grandeurs et mesures est clairement identifiée dans les programmes de l'école et du collège[139]. Le document d'accompagnement[140] de 2008 – outil toujours pertinent pour la formation des enseignants – et le nouveau document ressource[141] insistent sur la place de ce thème dans la résolution de problèmes. Les problèmes de ce chapitre visent à travailler d'une part les grandeurs indépendamment de leurs mesures, et d'autre part les grandeurs quotients dans le contexte linéaire ou non linéaire.

Entrée historique

Au XVIIIe siècle, les systèmes de mesure (longueurs, poids, capacités, monnaies, temps) sont complexes. De plus, ils varient d'un pays à l'autre, d'une région à l'autre, d'une ville à l'autre, d'une corporation à l'autre. Cela entraîne des calculs compliqués dans la vie quotidienne, des erreurs fréquentes et de multiples possibilités de fraude. Pour remédier à cette situation, la Convention nationale, par son décret du 1er août 1793, institue un nouveau système général des poids et mesures reposant notamment sur la division décimale de toutes les unités de grandeur.

Pour faciliter la transition, on constitue des tables numériques de conversion, mais celles-ci se révélant d'un usage difficile pour la population, on essaie aussi de recourir à des tables graphiques. C'est ainsi qu'après diverses tentatives, Louis-Ézéchiel Pouchet (1748-1809), un manufacturier de coton de Rouen, propose en 1797 un tableau graphique universel pour toutes les multiplications et divisions nécessitées par les problèmes de conversion (voir figure 34, ci-contre). Cet abaque est formé d'un réseau d'hyperboles d'équations $xy = z$ pour les valeurs entières de z de 1 à 100. Une relation $ab = c$ entre trois nombres est représentée par le point de concours de trois lignes : la droite d'équation $x = a$, la droite d'équation $y = b$ et l'hyperbole d'équation $xy = c$. Deux des nombres a, b, c étant donnés, on peut ainsi déterminer le troisième par simple lecture.

139 — https://www.education.gouv.fr/bo/BoAnnexes/2004/hs4/maths_sixieme.pdf ; https://www.education.gouv.fr/bo/BoAnnexes/2005/hs5/annexe2_1.pdf
140 — https://media.eduscol.education.fr/file/Programmes/16/9/doc_acc_clg_grandeurs_109169.pdf
141 — https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/16/8/RA16_C3_MATH_grand_mesur_N.D_609168.pdf

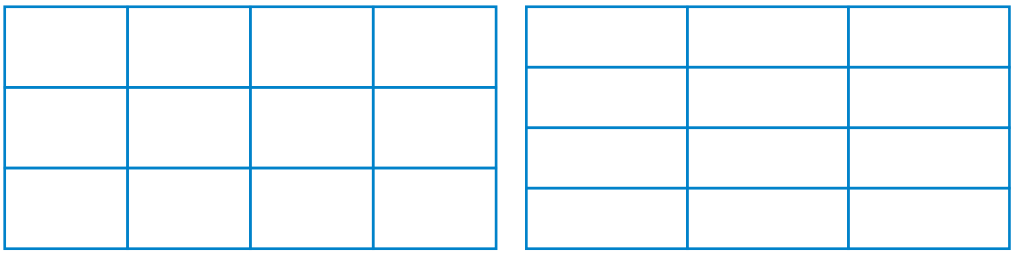
Voici un exemple de problème donné par Pouchet : « À 25 carlins la canne de Naples, combien le mètre ? » Sachant qu'une canne vaut 1,965 mètre et qu'un carlin vaut 0,44 franc, le résultat cherché est 25 x 0,44 ÷ 1,965 franc par mètre. Pouchet décrit ainsi le calcul graphique à effectuer (figure 34) : « À l'intersection du multiplicande 25 & du multiplicateur 0,44, prenez le produit 11 & à l'intersection du dividende 11 avec le diviseur 1,965, prenez le quotient 5,6, qui est la réponse à la demande. »

À la suite de Pouchet, des tables graphiques de calcul ont été utilisées dans de nombreux domaines jusque dans les années 1970, où elles ont été en grande partie supplantées par les calculatrices électroniques et les ordinateurs.

Figure 34. Tableau graphique universel proposé par Louis-Ézéchiel Pouchet. Calcul de 25 x 0,44 ÷ 1,965 sur cet abaque : en multipliant 25 par 0,44, on arrive sur l'hyperbole cotée 11, puis, en divisant 11 par 1,965, on obtient 5,6. L'approximation est suffisante pour les besoins courants. Noter qu'à chaque étape, le placement de la virgule se fait par une estimation mentale de l'ordre de grandeur : il s'agit donc d'un calcul en virgule flottante.

Point sur la recherche[142]

Les élèves sont facilement convaincus qu'on obtient des douzièmes en pliant en douze parts égales une feuille A4. Plusieurs pliages sont cependant possibles, qui donnent des « douzièmes » de formes différentes (voir figures 35 et 36). S'agit-il du *même douzième* ? « Puisque 12 douzièmes c'est 1, c'est le même douzième » constitue une justification courante, d'ordre algébrique, qui repose sur « puisque $12a = 1$ et $12b = 1$, alors $a = b$ ». Est-ce aussi élémentaire qu'il n'y paraît ?



Figures 35 et 36. Deux pliages en 12 parts égales qui forment des rectangles trapus ou allongés.

Les nombres sont *enseignés* et donc *pensés* par les élèves comme mesures de grandeurs et les pliages en « douzièmes » mettent en jeu la grandeur aire. Considérant les pliages des figures ci-dessus, pour trancher sur l'identité des douzièmes, une justification, d'ordre pragmatique, consiste à tester la recomposition d'un rectangle trapu, par découpages et recollements, en un rectangle allongé. Dans une classe, la conclusion sera affirmative ou négative selon l'habileté les élèves. L'enseignant peut forcer la conclusion en affirmant qu'en *théorie*, la recomposition est possible. Il peut aussi engager les élèves dans une justification complémentaire. Une étape préliminaire est nécessaire : si le pliage est idéal, tous les rectangles trapus sont identiques, de même pour les rectangles allongés. Imaginons alors que les aires des rectangles trapus et allongés soient différentes. Deux aires étant toujours comparables (1), supposons, par exemple, que l'aire d'un rectangle allongé est plus grande. L'aire du petit peut alors être *complétée* pour former la grande (2). Une expérience de pensée permet d'affirmer que la juxtaposition de 12 rectangles trapus reconstitue la feuille et que celle des 12 rectangles allongés est plus grande, ce qui est impossible. Ce raisonnement élémentaire – mais par l'absurde – établit la régularité de la multiplication d'une grandeur par entier et assure qu'il s'agit bien du *même douzième*. Il est généralisable à la multiplication par un rationnel et est aussi valable pour la grandeur nombre.

Cet exemple illustre que les grandeurs et leurs propriétés (ici, notamment 1 et 2) fournissent des opportunités pour l'apprentissage du raisonnement, apportent des justifications de natures variées utiles pour l'apprentissage des propriétés des nombres et des opérations, et suggère que leur absence pourrait induire des failles logiques dans cet enseignement, questions explorées par la recherche en didactique[143].

142 — Contribution de Christine Chambris.

143 — Cf. références bibliographiques du chapitre 6. Voir p. 212.

Mathématiques. Notions de grandeurs[144], mesures et unités

Grandeur (divisible)

Les grandeurs physiques ou mathématiques dépendent des objets d'étude qui peuvent porter plusieurs espèces de grandeurs (masse, longueur, durée, prix). Une grandeur met en relation des objets différents au sens des « relations d'équivalence » (tous les objets de même masse portent la même grandeur). Les grandeurs (d'une même espèce, par exemple, la masse) vérifient une relation d'ordre total (on peut comparer des masses), possèdent une addition (on peut additionner des masses) et par itération une multiplication par un entier (une masse trois fois plus lourde qu'une autre), une soustraction (si une masse est plus petite qu'une autre, on peut trouver une masse différente), et généralement la division par un entier non nul (on parle alors de grandeur divisible). Certaines notions discrètes (habitant, voyageur, véhicule) sont traitées comme des grandeurs (discrètes) et en pratique comme des grandeurs (divisibles) dès que les cardinaux sont grands (le tiers d'une population de 3 500 habitants).

Mesure

Mesurer une grandeur, c'est chercher combien de fois elle contient une grandeur de même espèce, appelée unité. Cette mesure dépend donc de l'unité, contrairement à la grandeur qui est intrinsèque. Le résultat de la mesure est donc un nombre. La mesure permet de comparer deux grandeurs (divisibles) de même nature en ramenant la comparaison à celle de deux nombres.

« Grandeur repérable »

Certaines grandeurs physiques ne sont pas mesurables, car l'échelle numérique associée, pour les caractériser, dépend du choix d'une origine (comme la température thermométrique Celsius, la date calendaire). Dans ce cas, ces grandeurs sont dites repérables, et on devrait dire au quotidien « repérer une température » plutôt que « mesurer une température ». Point de vigilance : passer de 10 °C à 20 °C, ce n'est pas doubler la température, car dans l'échelle Fahrenheit on passe de 50 °F à 68 °F qui n'est pas un doublement.

144 — Le document d'accompagnement d'octobre 2007 définit de manière claire et précise la notion de grandeur : http://cache.media.education.gouv.fr/file/Programmes/16/9/doc_acc_clg_grandeurs_109169.pdf

Grandeurs et dimension

La dimension caractérise la nature de la grandeur et définit les unités utilisables. On peut ramener la dimension de grandeurs physiques à une combinaison parmi les sept grandeurs fondamentales (masse, longueur, durée[145], etc.). Ainsi, l'aire est une grandeur produit, tandis que l'angle est une grandeur sans dimension.

Problème 1. Le Curvica

Curvica est un puzzle pédagogique de 24 pièces inventé par Jean Fromentin en 1982 et publié par l'Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public (Apmep)[146]. Les pièces, toutes différentes, sont constituées de 4 côtés bombés, rectilignes ou creusés à partir d'un même carré.

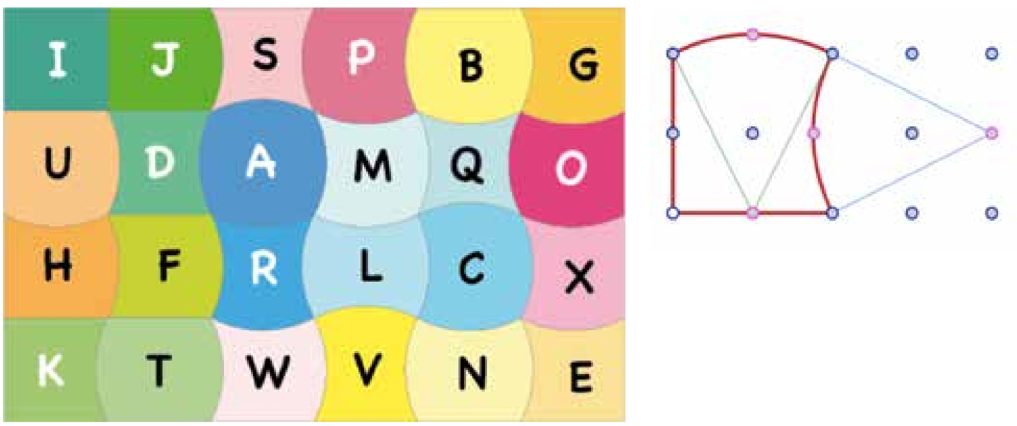


Figure 37. Les 24 pièces de ce puzzle Curvica forment un rectangle de 4 pièces sur 6[147].

Énoncé

On s'intéresse uniquement aux pièces A, B, C, D, E et F.

a. Classer ces 6 pièces du plus petit au plus grand périmètre.

b. Classer ces 6 pièces de la plus petite à la plus grande aire. Que remarque-t-on ?

c. Quelles sont les deux pièces qui ont la même aire et le même périmètre ?

d. Trouver deux pièces qui ont le même périmètre, mais des aires différentes.

---

145 — Source : https://ics.utc.fr/PS90/chapitre1/co/definition-grandeur

146 — https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Curvica_Touss_From_-2.pdf ou https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Defis_curvica.pdf

147 — Ces images sont issues du site de l'Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques de La Réunion : https://irem.univ-reunion.fr/spip.php?article802

Mots-clés

Distinction aire/périmètre, chercher, raisonner.

Pourquoi ce problème ?

Ce problème a pour enjeu, d'une part, de distinguer aire et périmètre et d'autre part, de ne pas utiliser la mesure pour comparer les différentes grandeurs. Il sera l'occasion de montrer aux élèves que des figures de même périmètre peuvent avoir des aires différentes (et réciproquement).

Ressorts de continuité ou éléments de progressivité

Ce problème peut être traité dès le début du cycle 3 et se prolonger en fin de cycle 4 ou en classe de 2de.

Au cycle 3, on pourra effectuer les comparaisons sans mesure par superposition des aires, et pour les périmètres utiliser le principe du plus court chemin (en géométrie euclidienne le chemin le plus court entre deux points est le segment reliant ces deux points).

En fin de cycle 4 et en 2de, le travail pourra s'orienter vers l'expression des périmètres et des aires. Il est envisageable de s'affranchir de calculs numériques en posant, par exemple, p la longueur de cet arc de cercle et a l'aire de la portion de disque ainsi générée. Ainsi, il sera possible d'exprimer, en fonction de p, le périmètre, et en fonction de a, l'aire de chacune des 24 pièces et de comparer ces périmètres et ces aires. La propriété d'additivité de l'aire prend ici tout son sens.

Stratégies d'enseignement

En fin de cycle 3, il convient de mettre à disposition les pièces afin de permettre aux élèves de manipuler et ainsi de comparer aires et périmètres. Il est possible, dans le cadre de la différenciation, de varier l'énoncé en modifiant le choix des pièces au départ et en modulant le questionnement.

Énoncé alternatif

On s'intéresse uniquement aux pièces E, I, K, Q et S.
a. Classer ces 6 pièces du plus petit au plus grand périmètre.
b. Classer ces 6 pièces de la plus petite à la plus grande aire. Que remarque-t-on ?
c. Quelles sont les deux pièces qui ont la même aire et le même périmètre ?
d. Trouver deux pièces qui ont le même périmètre, mais des aires différentes.

Pour aller plus loin

La comparaison, en général, pour un périmètre donné L, des aires et des surfaces possibles A n'a guère de sens puisqu'il s'agit de grandeurs différentes. Un débat dans la classe devrait conduire à comparer plutôt l'aire A à L^2, le carré du périmètre. En manipulant une ficelle fermée de longueur donnée, les élèves arrivent facilement à constater que l'aire A est dominée par l'aire du disque, que l'on peut exprimer par $\frac{L^2}{4\pi}$, ce qui nous amène à l'inégalité isopérimétrique : $4\pi A \leq L^2$.

TRANSFERT

Le Curvica triangulaire (construction des pièces non plus sur la base d'un carré, mais d'un triangle équilatéral).

Problème 2. Des robinets qui coulent

Énoncé

On dispose de deux robinets. Le premier est capable de remplir un réservoir d'eau de 24 L en 1 minute, le second peut remplir ce même réservoir en 2 minutes.
En ouvrant les deux robinets au même moment, combien de temps faudrait-il pour remplir un jacuzzi avec 1 080 L d'eau ?
a. 15 min
b. 67,5 min
c. 135 min
d. 30 min

Mots-clés

Notion de débit, 1 dm^3 = 1 L, contenance, durée, proportionnalité, ratio.

Pourquoi ce problème ?

Les problèmes de robinet ont laissé quelques mauvais souvenirs dans l'enseignement et ont souvent été décriés. Comme rappelé dans l'entrée historique du chapitre 2, ces problèmes relèvent de la proportionnalité et de la méthode de la fausse position comme dans l'exemple traité par Fibonacci : « Un lion mange un mouton en 4 heures, un léopard en 5 heures et un ours en 6 heures. On demande en combien d'heures ils auront dévoré un mouton si on leur en jette un entre eux. »

Plus généralement, selon la grandeur de référence prise (temps, volume, débit) ou la notion en appui pour les calculs (proportionnalité directe, fraction, ratio, etc.), les démarches de modélisation, en lien avec la proportionnalité, présentent une variété d'approches montrant qu'il existe plusieurs façons de résoudre des problèmes mathématiques. Ainsi, les mathématiques contribuent à la pluralité des approches, au débat contradictoire, mais reposant sur le raisonnement, et à l'argumentation partagée.

Ressorts de continuité ou éléments de progressivité

Les élèves peuvent rencontrer des difficultés à se représenter correctement la situation, notamment pour faire le lien entre débits, volume d'eau et temps. Le fait que le deuxième robinet mette « deux fois plus de temps » peut être confondu avec « deux fois plus de volume », car fonctionnant deux fois plus longtemps.

Au milieu du cycle 4, après un travail sur les grandeurs quotients, ce problème peut être proposé pour mobiliser la notion de débit en parallèle avec la notion de vitesse rencontrée dès le cycle 3[148].

Stratégies d'enseignement

Différentes démarches (on en présente trois ici) sont envisageables, mais elles mettent toutes en jeu un raisonnement autour d'une unité permettant un raisonnement qui s'appuie sur la proportionnalité. L'utilisation d'une modélisation permet aux élèves d'entrer plus facilement dans le problème en se représentant de manière concrète la situation.

148 — « […] l'élève utilise la proportionnalité pour résoudre des problèmes simples mettant en jeu des échelles, des pourcentages, des déplacements à vitesse constante », extrait de programme.

L'énoncé présente une difficulté pour comparer les débits des deux robinets. Ce point n'est pas anodin et résulte d'une analyse précise de l'énoncé par l'élève qui doit se poser la question : « Que se passe-t-il en une minute [l'unité de temps du raisonnement], si je sais ce qui se passe en deux minutes ? » ou, de manière équivalente, « Que se passe-t-il en deux minutes ? »

DÉMARCHE 1

On raisonne autour de l'unité de temps.

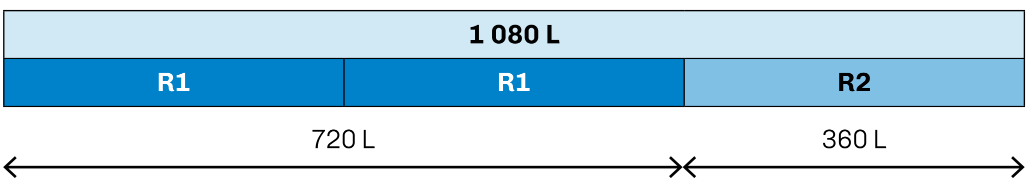
Par minute, R1 (le premier robinet) remplit 24 L et R2 remplit 12 L : à eux deux, ils remplissent 36 L en une minute. Il faut 30 (= 1 080 ÷ 36) minutes pour remplir le jacuzzi.

Dans d'autres pays comme en Allemagne, le symbole ≘ est dédié à la correspondance entre deux grandeurs ; on écrirait en Allemagne 1 min ≘ 36 L.

DÉMARCHE 2

On raisonne sur les volumes.

En un temps donné, le robinet R1 délivre un volume deux fois plus important que le robinet R2, ce qui explique que, pendant le temps total, R1 remplit les deux « unités de volume » tandis que R2 ne remplit qu'une « unité de volume ». La modélisation en barres, ou un raisonnement élémentaire, indique qu'il y a donc 3 volumes à considérer. Par conséquent, R1 remplit les deux tiers du volume total du jacuzzi tandis que R2 en remplit un tiers. On en déduit que R1 remplit 720 L, tandis que R2 remplit 360 L.



Or 720 ÷ 24 = 30 ; il faut 30 minutes pour remplir le réservoir.

DÉMARCHE 3

On raisonne en appui sur le débit de l'un des robinets, comme dans la méthode de la fausse position.

Supposons que R2 fonctionne seul pour remplir 1 080 L. Si on note D le débit de R2, V le volume rempli par R2 pendant la durée T, on a par definition $D = \frac{V}{T} = \frac{24\ \text{L}}{2\ \text{min}} = 12\ \text{L/min}$. D'où $T = \frac{V}{D} = \frac{1\,080\ \text{L}}{12\ \text{L/min}} = 90\ \text{min}$, le temps qu'il faudrait si R2 fonctionnait seul. Or, le volume rempli par R1 et R2 ensemble est égal à 3 fois le volume rempli par R2. On en déduit que le temps nécessaire pour remplir le jacuzzi est égal à 90 min ÷ 3 = 30 min.

ANALYSE DES RÉPONSES ET CHOIX DES DISTRACTEURS

a. L'élève considère qu'en une minute on verse 24 L + 2 × 24 L = 72 L, alors 1 080 ÷ 72 = 15.
b. L'élève ajoute les volumes obtenus en une minute pour l'un et en deux minutes pour l'autre (ajoute les durées plutôt que de considérer que les robinets fonctionnent en même temps). Il obtient 1 080 ÷ 48 = 22,5 puis 22,53 x 3 = 67,5.
c. Tout se passe comme si chaque robinet remplit seul la piscine ; puis ajout des deux durées : $\frac{1\,080}{24} + \frac{1\,080}{12} = 135$.
d. C'est la bonne réponse.

Problème 3. Coût carbone

Énoncé

Une famille composée de 4 personnes envisage de faire le trajet Lille - Marseille et souhaite limiter au maximum l'empreinte carbone de leur voyage (voir le tableau ci-dessous). Cette famille hésite entre le train, l'avion, le bus ou utiliser leur voiture familiale qui est un véhicule hybride. On sait que :
— la distance Lille - Marseille par routes et autoroutes est de 990 km ;
— la distance Lille - Marseille en avion est de 834 km ;
— la distance Lille - Marseille en train est de 965 km.
Quel mode de transport va privilégier cette famille éco-responsable ?

Mode de transport	Coût carbone
Avion	25 gCO_2e/km par passager
Voiture hybride transportant 4 personnes	86 gCO_2e pour 1 km
Bus transportant 50 passagers	65 $kgCO_2e$ pour 100 km
Train grande vitesse	13 gCO_2e/km par passager

Doc. Coût carbone (gCO_2e : gramme de CO_2 émis).

Mots-clés

Grandeurs composées, proportionnalité, prise d'initiative, développement durable et formation du citoyen.

Pourquoi ce problème ?

Le problème s'attache à travailler les grandeurs produits ainsi que les grandeurs quotients. Son originalité réside dans l'utilisation de grandeurs, que l'on voit rarement en collège, mais davantage dans des sujets au baccalauréat ou dans les évaluations internationales où les questions environnementales sont souvent interrogées.

Par ailleurs, le questionnement sur le calcul du coût carbone émis dans les divers scénarios de transport ouvre, au sein de la classe, un débat scientifique dans un cadre pluridisciplinaire sur les paramètres complexes qu'il convient de prendre en compte pour une telle estimation des données inscrites dans le tableau (consommation énergétique, amortissement du matériel, usure de l'infrastructure, taux de remplissage pour le transport en commun, etc.).

Ressorts de continuité ou éléments de progressivité

Cette situation s'apparente à un problème avec prise d'initiative et permet à l'élève de mobiliser en particulier les compétences « chercher », « calculer » et « communiquer ».

Les méthodes que l'élève peut mettre en œuvre sont plurielles et nécessitent une vigilance particulière dans le traitement des informations concernant l'unité, pour pouvoir mener des raisonnements comparatifs. La précipitation est ici à éviter, comme le signalait déjà Descartes dans sa première règle de la *Méthode*[149], tandis que la troisième règle suggère de commencer à raisonner sur les objets les plus simples[150]. L'élève pourra par exemple raisonner par passager à l'échelle de la famille.

149 — « Le premier [principe] était de ne recevoir jamais aucune chose pour vraie que je ne la connusse évidemment être telle : c'est-à-dire d'éviter soigneusement la précipitation et la prévention ; et de ne comprendre rien de plus en mes jugements, que ce qui se présenterait si clairement et si distinctement à mon esprit que je n'eusse aucune occasion de la mettre en doute », *Discours de la méthode*, Descartes, 1637.

150 — « Le troisième [principe] de conduire avec ordre mes pensées, en commençant par les objets les plus simples et les plus aisés à connaître, pour monter peu à peu, comme par degrés, jusqu'à la connaissance des plus composés ; et supposant même de l'ordre entre ceux qui ne se précèdent point naturellement les uns les autres », *ibid*.

En classe de 5e, le problème est essentiellement centré sur la proportionnalité et on veillera à un accompagnement de l'élève quant à sa compréhension des unités utilisées et la manipulation de ces dernières. À ce titre, il conviendra que l'enseignant explicite correctement chacune des unités employées ; par exemple pour 60 km/h, dire « **60 kilomètres par heure** » et non pas « 60 kilomètres-heure ».

En milieu de cycle 4, l'enjeu porte sur la compréhension des grandeurs et de leurs unités respectives ; le professeur laissera une autonomie plus importante à l'élève dans la résolution de ce problème, notamment pour le traitement des informations concernant le transport en bus (quel coût est imputable à la famille ?).

Il convient toutefois d'avoir travaillé de manière suffisamment approfondie la proportionnalité pour ne pas entraver la priorité de ce problème sur les différentes grandeurs mises en jeu.

Stratégies d'enseignement

Ce genre d'exercice se prête facilement au travail de groupe. Les différents coups de pouce qui peuvent être donnés relèvent essentiellement de la compréhension des unités.

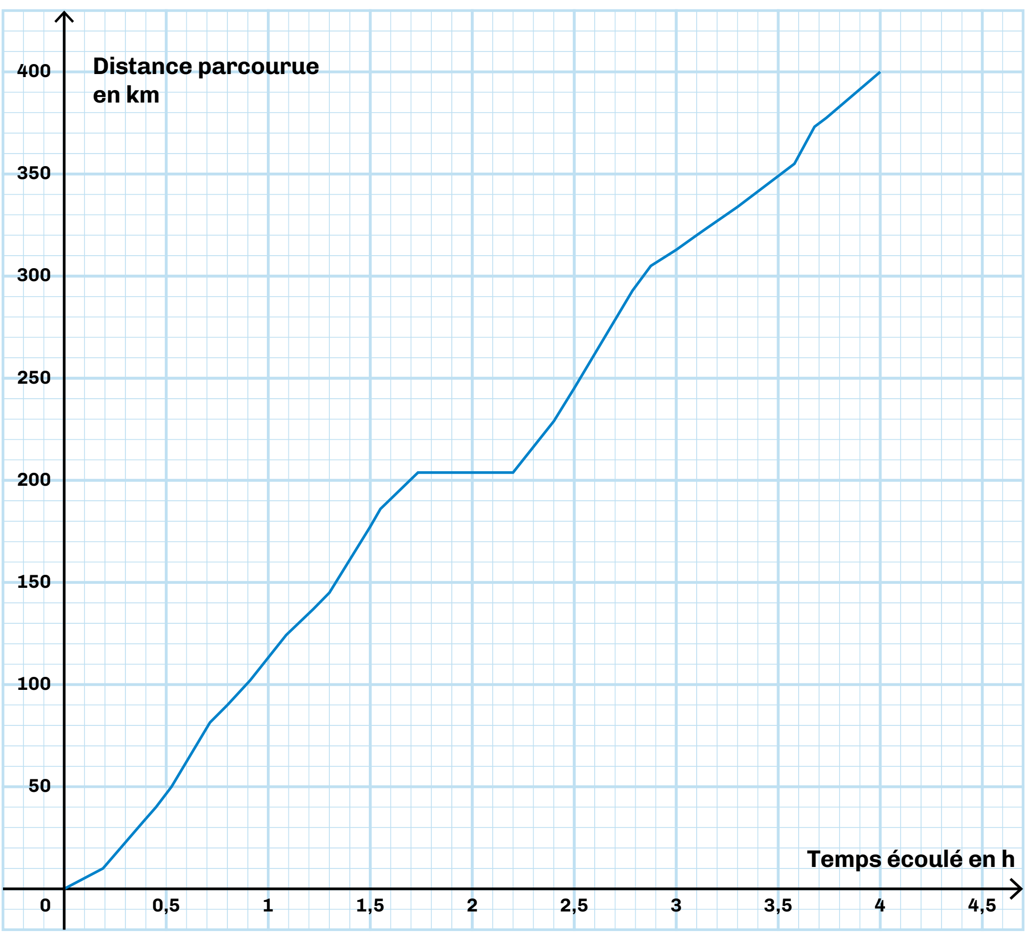
Le tableau peut être décliné de plusieurs manières afin de mettre en œuvre la différenciation au sein de la classe. Par exemple, pour faciliter la manipulation des unités, on peut proposer à certains élèves le tableau simplifié suivant (ce qui n'exclut pas un accompagnement renforcé pour les élèves les plus fragiles avec l'énoncé initial) :

Mode de transport	Coût carbone
Avion	25 gCO_2e/km par passager
Voiture hybride transportant 4 personnes	86 gCO_2e/km
Bus	13 gCO_2e/km par passager
Train grande vitesse	13 gCO_2e/km par passager

Problème 4. Excès de vitesse ou pas ?

Énoncé

Un automobiliste, au volant d'une voiture de sport, a effectué le trajet Lille-Caen d'une distance de 400 km, uniquement en empruntant les autoroutes A1 et A29.
Au péage de Dozulé, à l'entrée de Caen, les gendarmes arrêtent l'automobiliste et le verbalise pour vitesse excessive en lui rappelant que la vitesse maximale autorisée sur une autoroute est de 130 km/h. À l'appui de son ticket de péage (document 3), il conteste en précisant qu'il a parcouru 400 km et qu'il est parti de Lille à 12 h 30.
Qui a raison ?



Doc. 1

Doc. 2[151]

Société des autoroutes normandes

REÇU À CONSERVER

Sortie : DOZULÉ
TARIF H.T. 3,08 €
T.V.A. 20 % 0,62 €
TARIF T.T.C. 3,70 €

Paiement : CARTE BANCAIRE

Date : 26/03/2021 16 h 32

Doc. 3

Mots-clés

Grandeurs composées, proportionnalité, prise d'initiative, formation du citoyen, vitesse moyenne, lectures graphiques, chercher, calculer, raisonner, communiquer.

Pourquoi ce problème ?

Cette situation s'apparente à un problème avec prise d'initiative et permet à l'élève de mobiliser de multiples compétences. Il faut être en capacité d'extraire et d'analyser de l'information utile à partir de documents complexes : une compétence majeure travaillée depuis l'école primaire et dans toutes les disciplines.

Ressorts de continuité ou éléments de progressivité

Le problème s'attache à travailler les grandeurs quotients. Il convient d'avoir abordé de manière suffisamment approfondie la notion de vitesse moyenne, et d'avoir une maîtrise des lectures graphiques.

Le courbe utilisée dans le document 1 est une fonction affine par morceaux construite à partir d'un parcours réel dont on a modifié la vitesse sur des segments autoroutiers : il permettra aux élèves de calculer les vitesses instantanées soit par calcul exact, soit par estimation.

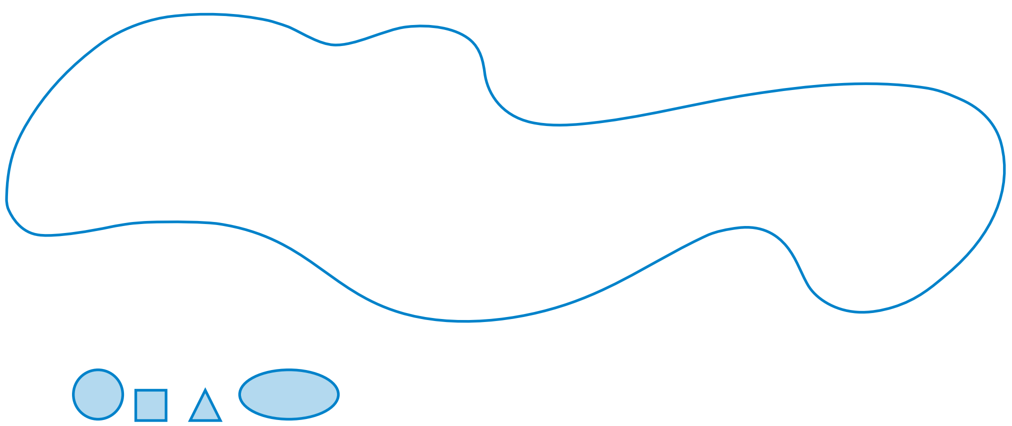
151 — Cette capture d'image est issue du site Mappy.com

Les différents coups de pouce qui peuvent être donnés relèvent essentiellement de la bonne interprétation de la courbe et des choix des intervalles de temps pour estimer les vitesses moyennes (glissantes). Des gabarits illustrant les vitesses excessives pourront être utiles pour repérer les pentes correspondantes (compte tenu des marges d'erreurs et de la précision du tracé, on peut tracer des segments représentant des vitesses de 150 km/h ou 160 km/h).

Problème 5. Comparer des formes

Énoncé

On considère la forme géométrique ci-dessous dont on cherche à mesurer l'aire en fonction des aires de 4 unités différentes (un disque, un carré, un triangle équilatéral et une forme quelconque).
Estimer dans chacun des cas la mesure de l'aire.



Mots-clés

Aire, mesure, calculer, chercher, raisonner.

Pourquoi ce problème ?

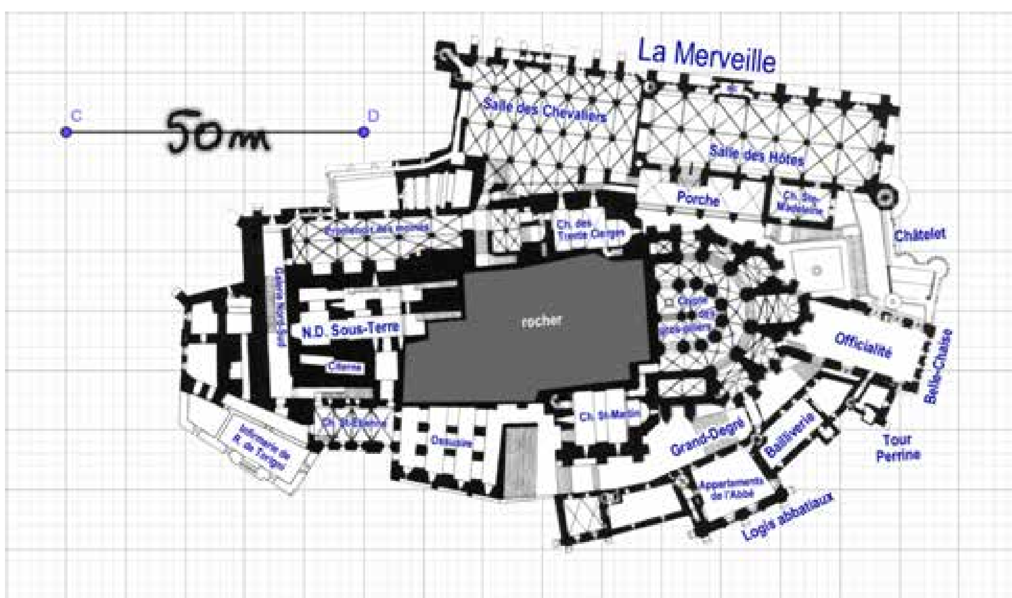
Les problèmes d'estimation sont fréquents dans les évaluations internationales et constituent un point d'appui dans les continuums d'enseignement de l'école primaire à l'enseignement supérieur. Pour l'élève, sans données numériques disponibles, les enjeux sont de différents ordres : mise en place de stratégies efficaces, prise d'initiative, essai-erreur, etc. Pour l'enseignant, c'est l'occasion de revenir sur la notion même de grandeur et de mesure dans un contexte non normé. Or dans la vie courante, les comparaisons de grandeurs ne sont pas aisées et dépendent largement des modélisations sous-jacentes.

Cet exercice renvoie, d'une part, aux fondements de la notion de grandeurs divisibles, et d'autre part, à des stratégies d'encadrement déjà présentes chez Archimède (méthode d'exhaustion-compression) et annonçant le calcul intégral.

Ressorts de continuité ou éléments de progressivité

Dès l'école primaire, les élèves sont amenés à estimer l'aire d'une surface par une unité, soit dans le cadre des loisirs (recouvrir une forme à l'aide de gommettes), soit dans un cadre plus structuré lorsque l'on dispose d'un quadrillage, par exemple.

Dans un premier temps, on peut faire travailler les élèves sur l'exemple ci-dessous, où l'on souhaite estimer l'aire d'une partie du Mont-Saint-Michel en s'aidant d'un plan quadrillé[152]. On peut aussi, dans le cadre de la différenciation, proposer un quadrillage équilatéral.



152 — Source : https://commons.wikimedia.org/wiki/File:MtStMichel-PlanNiveau02-Promenoir.png

Stratégies d'enseignement

La mesure d'une aire réinterroge les stratégies de comptage qui mettent en jeu soit des variables d'échelle (compter dans un premier temps des grands carrés, par exemple, avant de compter des petits carrés), soit l'introduction de formes connues (de grands rectangles dont on connaît l'aire, en utilisant le produit longueur fois largeur). La bonne gestion des données et leur disposition ordonnée sont indispensables pour permettre un comptage final aisé et correct, comme le précise le troisième principe de la *Méthode* de Descartes (voir la note de bas de page 150 du problème 3, p. 168).

Cependant, la mesure de l'aire renvoie à l'existence d'une unité dans laquelle il sera aisé de raisonner.

Une question qui peut être débattue en amont est la désignation ou construction de cette unité. Si une unité de longueur est proposée (par exemple, une échelle), alors il conviendra de construire l'unité de surface correspondante, puis d'aller vers la construction du quadrillage idoine (adapté en fonction de la précision souhaitée). On peut aussi, à des fins de manipulation – notamment en début de cycle –, procéder au découpage de l'unité de référence du nombre de fois nécessaire pour assurer réellement le recouvrement de la surface.

Lorsque les unités sont imposées, un débat avec les élèves conduira à différencier au moins deux cas :

— 1er cas : on peut construire un pavage (par exemple, un quadrillage carré, hexagonal, triangulaire), à partir de l'unité proposée, qui nous ramène à la situation classique de comptage. Cela permet aux élèves de rentrer rapidement dans le problème et ainsi de donner un encadrement de l'aire de la surface ;

— 2e cas : l'unité n'est pas adaptée pour construire un pavage. Dans ce cas, on peut construire une unité auxiliaire (par exemple, un carré) qui nous permettra de mesurer l'aire de l'objet. En fonction des situations, on pourra mesurer précisément l'aire de l'unité avec l'unité auxiliaire (par exemple, disque par rapport au carré), ou on essaiera de l'approximer via des estimations par excès et par défaut.

Pour aller plus loin

En dessinant sur la carte un polygone convexe à coordonnées entières, on peut approcher la surface de manière satisfaisante et introduire la formule de Pick ($S = i + \frac{b}{2} - 1$, avec i le nombre de points intérieurs, b le nombre de points du bord).

En résumé

- Les grandeurs doivent être travaillées régulièrement au cours du cursus de l'élève avant d'introduire les unités. Une fois les unités introduites, le travail de l'élève se centre sur la notion de proportionnalité, la prise d'initiative, le développement de l'esprit critique.

- Les situations proposées, ancrées dans le réel, sont aussi l'occasion d'évoquer des sujets relatifs aux questions de société.

- Les périmètres et les aires, d'abord rencontrés séparément, sont ensuite travaillés simultanément, en particulier pour déconstruire des représentations erronées du type « si le périmètre augmente, l'aire augmente ».

- Les problèmes proposés doivent également permettre de donner du sens aux grandeurs produits (mètre carré) et aux grandeurs quotients (gramme par kilomètre par passager).

VII

Quelles démarches pour enseigner la résolution de problèmes ?

Ce chapitre a une vocation transversale. Son objectif est de donner aux enseignants un certain nombre de pistes destinées à mettre en œuvre des activités de résolution de problèmes. Il s'agit de créer les contextes les plus favorables aux apprentissages. Pour cela, il semble nécessaire que les élèves soient dans une démarche active de recherche de solutions et que l'enseignant favorise de diverses manières des processus de prise de conscience des caractéristiques pertinentes. Les élèves pourront s'appuyer sur celles-ci lorsqu'ils rencontreront de nouvelles situations.

Contexte

La résolution de problèmes n'est pas uniquement applicative, car elle contribue au développement des notions mathématiques elles-mêmes.

Le programme de cycle 4[153] précise que la maîtrise par les élèves des notions mathématiques (savoirs et savoir-faire) mobilisées dans un problème ne saurait suffire pour leur permettre de résoudre, en autonomie, ce problème. En effet, il existe une distinction bien établie entre connaissances déclaratives et possibilité de mise en œuvre de ces connaissances en contexte. La seule maîtrise d'une définition est par exemple bien insuffisante pour garantir sa mobilisation à bon escient. Il faut donc que l'élève soit en mesure d'identifier **des contextes favorables** à cette mise en œuvre et que les situations-problèmes qu'il rencontre lui évoquent les **notions mathématiques appropriées et les stratégies adéquates à déployer** pour y faire face.

153 — « Une place importante doit être accordée à la résolution de problèmes. Pour être en capacité de résoudre des problèmes, il faut à la fois prendre des initiatives, imaginer des pistes de solution et s'y engager sans s'égarer, en procédant par analogie, en rattachant une situation particulière à une classe plus générale de problèmes, en identifiant une configuration géométrique ou la forme d'un nombre ou d'une expression algébrique adaptée. Ceci suppose de disposer d'automatismes (corpus de connaissances et de procédures automatisées immédiatement disponibles en mémoire) », préambule du programme de cycle 4, extrait.

La seule confrontation des élèves à la résolution de problèmes, même régulière, en classe ou hors de la classe ne saurait suffire non plus à garantir leur réussite. Comme le précise Sylvie Cèbe dans un cadre pourtant bien différent, celui de la lecture, mais qui vaut tout autant pour les apprentissages mathématiques[154], un temps d'apprentissage pris en charge par l'enseignant est nécessaire : « Il y a très souvent des exercices dont on postule qu'à force d'en faire, ils [les élèves] vont extraire les procédures [...]. Ce dont on s'est aperçu, c'est que c'est vrai pour le littéral (pour restituer des connaissances littérales), mais dès lors qu'il y a de l'inférentiel, alors tous les élèves n'arrivent pas à extraire la procédure qui permet de le faire [...]. On les [les élèves] laisse tâtonner, explorer, découvrir les meilleures manières de faire, sans, parfois, leur expliquer comment on fait pour bien faire. »

Les propositions de ce chapitre constituent des pistes de mise en œuvre visant à permettre aux élèves de gagner en autonomie dans la démarche de résolution de problèmes. Elles reposent sur l'idée qu'en travaillant sur la mobilisation et la reconnaissance des structures et des procédures, les enseignants favorisent le développement chez les élèves d'une capacité à résoudre un problème lorsque toute autonomie leur est laissée, ainsi qu'une aptitude à identifier des classes de problèmes, à transférer des procédures à d'autres situations relevant de la même typologie.

Point sur la recherche

Favoriser le transfert d'apprentissage en résolution de problèmes[155]

La suggestion d'utiliser une situation déjà travaillée en classe peut accroître considérablement la performance des élèves. En effet, les facteurs d'accès aux connaissances sont des facteurs au moins aussi importants de la réussite du transfert d'apprentissage que la possession des connaissances elles-mêmes : lorsque l'élève ne fait pas le lien entre une situation connue et une situation nouvelle, il ne peut utiliser ses connaissances de la situation connue.

154 — http://centre-alain-savary.ens-lyon.fr/CAS/education-prioritaire/ressources/theme-1-perspectives-pedagogiques-et-educatives/realiser-un-enseignement-plus-explicite/enseigner-explicitement-pour-quoi-qui-quand-quoi-comment
155 — Contribution d'Emmanuel Sander.

Des travaux montrent que des similitudes superficielles telles que le thème général de l'histoire ou les rôles des personnages favorisent l'évocation d'une situation précédente, pour donner lieu à un transfert positif, et conduire à la résolution, lorsque les problèmes partagent effectivement la même structure mathématique, et négatif, en appliquant une stratégie inappropriée, dans le cas contraire. Dans une étude de Laura R. Novick[156], les élèves étudient les solutions à un problème partageant des traits superficiels (il s'agit de répartir des objets en un certain nombre de lignes et de colonnes), mais relevant d'une autre classe de problèmes que le problème cible, ainsi qu'à un problème n'ayant pas de traits superficiels en commun, mais étant de la même classe de problèmes que le problème cible. Les élèves font majoritairement un transfert négatif, c'est-à-dire qu'ils mettent en œuvre en priorité la stratégie de résolution étudiée pour le problème ayant des similitudes superficielles avec le problème cible, bien que le principe de solution diffère.

Concernant la mise en œuvre de stratégies de résolution d'un problème déjà travaillé en classe, différentes dimensions du contexte limitent la réussite du transfert. Prenons l'exemple d'une série de problèmes posés par Stephen Reed[157] : pour chaque thème, il y a un problème source que les élèves apprennent à résoudre et deux problèmes de transfert.

PROBLÈME SOURCE

Une infirmière mélange une solution de 6 % d'acide borique avec une solution de 12 % d'acide borique.
Combien lui faut-il de chaque solution pour avoir 4,5 litres de mélange à 8 % ?

PROBLÈME 1 DE TRANSFERT ISOMORPHE (ÉPICIER)

Un épicier mélange des cacahuètes valant 6,50 euros le kilo et des amandes valant 21 euros le kilo.
Combien de kilos de chaque sont nécessaires pour avoir 30 kilos d'un mélange qui vaut 15,30 euros le kilo ?

PROBLÈME 2 DE TRANSFERT ISOMORPHE (INTÉRÊTS)

M. Roberts reçoit 7 % d'intérêts comme revenu de ses actions et 11 % d'intérêts de ses bons du Trésor.
Combien a-t-il sur chaque compte sachant qu'il a au total 8 000 euros et qu'il a eu en moyenne 8 % d'intérêts ?

---

156 — Laura R. Novick, "Analogical Transfer, Problem Similarity, and Expertise", *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 14(3), 510, 1988.
157 — Stephen K. Reed, "A Structure Mapping Model for Word Problems", *Journal of Experimental Psychology: Learning Memory and Cognition*, 13, 124-139, 1987.

Les résultats du transfert sont faibles, de l'ordre d'un tiers de réussite, tant pour l'isomorphe épicier que pour l'isomorphe intérêts. Cela peut s'expliquer par le fait que dans le problème initial, le problème de mélanges entre acides, une fois le mélange réalisé, il n'y a plus qu'une substance, celle qui résulte du mélange, et les composants du mélange sont perdus. L'objet auquel s'applique la concentration moyenne est le résultat du mélange. Ce n'est pas le cas des deux autres énoncés. Par exemple, pour le problème d'intérêt moyen entre deux comptes, les deux comptes continuent d'exister, et l'objet auquel s'applique l'intérêt moyen est l'ensemble des deux comptes constituant le capital de la personne. Comme le problème appris a été codé comme un problème de mélange avec dissolution des composants, la solution du problème appris n'est pas reconnue pertinente pour résoudre les deux autres problèmes.

En règle générale, on peut considérer que la raison majeure des faibles performances de transfert tient à la représentation que les élèves se sont construite du problème étudié en classe et à leur représentation du problème à résoudre. Des études ont montré que la catégorisation du problème, c'est-à-dire le choix des propriétés qui font apparaître des ressemblances et des différences par rapport à d'autres problèmes, et les dimensions sur lesquelles se fondent les élèves, ne sont souvent pas celles qui sont pertinentes sur le plan mathématique[158]. Un enjeu crucial est donc que le codage que l'élève a réalisé de la situation-problème soit pertinent sur le plan mathématique et ne tienne pas principalement à des traits superficiels de la situation. En effet, dans le cas contraire, l'élève ne sera pas en mesure de transférer à une nouvelle situation la stratégie travaillée en classe, car il ne reconnaîtra pas la possibilité de la mettre en œuvre, comme dans cet exemple précédent où ce qui est travaillé dans le cas d'un mélange de solution chimique n'est réinvesti que par un tiers des élèves dans le contexte de mélange de fruits secs ou de calcul de taux d'intérêt.

Une activité explicite de comparaison entre problèmes peut favoriser le traitement en profondeur des deux situations et l'extraction de caractéristiques communes pertinentes sur le plan mathématique[159]. Dans les recherches qui s'inscrivent dans ce paradigme, il est demandé à l'élève de comparer des situations ou des stratégies afin d'identifier les similitudes ou dissemblances entre elles et ainsi acquérir un codage commun et utiliser une stratégie efficace. Il a été montré que plus l'élève est guidé durant le processus de comparaison, plus il sera attentif aux relations partagées entre les situations. Ainsi, il est bénéfique de demander explicitement aux élèves une comparaison des cas pendant la phase d'enseignement, car les comparaisons utiles sont faciles à manquer, même lorsqu'elles peuvent conduire à un meilleur apprentissage et transfert[160]. Les études ont aussi mis en évidence une efficacité plus grande lorsque les situations comparées sont présentées simultanément plutôt que séquentiellement.

---

158 — Hippolyte Gros, Jean-Pierre Thibaut, Emmanuel Sander, "What We Count Dictates How We Count: A Tale of Two Encodings", *Cognition* (online first), 2021: https://doi.org/10.1016/j.cognition.2021.104665
159 — Bethany Rittle-Johnson, Jon R. Star, "The Power of Comparison in Learning and Instruction: Learning Outcomes Supported by Different Types of Comparisons", in Psychology of Learning and Motivation, vol. 55, p. 199-225, Academic Press, 2011.
160 — Lindsey E. Richland, Ian M. McDonough, "Learning by Analogy: Discriminating between Potential Analogs", *Contemporary Educational Psychology*, 35, p. 28-43, 2010.

Autrement dit, il y a un bénéfice à reprendre à nouveau le problème d'apprentissage et à le remettre côte à côte avec le nouvel énoncé[161]. Des travaux ont étudié l'impact de la distance sémantique dans les tâches de transfert et ont montré que l'augmentation de la distance sémantique entre deux situations analogues favorisait la perception des similarités structurelles. Cela indique que moins les situations ont de traits superficiels en commun, plus la perception des propriétés mathématiques pertinentes sera favorisée[162].

Un enjeu fort est donc de rendre perceptibles les similitudes et les différences entre énoncés relevant d'une même classe de problèmes. Une telle activité de comparaison entre problèmes favorise la prise de conscience chez l'élève des caractéristiques structurelles du problème par opposition à ses caractéristiques superficielles, ce qui est crucial dans la perspective du transfert d'apprentissage à de nouveaux problèmes. Cette forme d'approche s'est avérée un mode particulièrement efficace pour que les élèves réussissent à situer ce en quoi deux énoncés partagent une structure mathématique commune au-delà d'habillages différents. Elle permet également de montrer en quoi des énoncés, qui ont en commun un certain habillage, peuvent incarner des structures mathématiques différentes et comment une procédure de résolution applicable pour l'un des énoncés cesse de l'être pour l'autre. Cette démarche est exemplifiée à travers les études de cas présentées dans la suite de ce chapitre.

Des situations et des dispositifs de recherche de problèmes en classe[163]

Les programmes de ces vingt dernières années, tout comme les évaluations internationales, renforcent la dimension « résolution de problèmes » dans l'enseignement, à tous les niveaux de la scolarité. Ce champ est considéré comme difficile par les enseignants. La recherche en didactique des mathématiques a défini et exploré différents types de problèmes et de situations qui ont diffusé plus ou moins dans l'enseignement et qui ont été étudiés régulièrement dans les Irem : situations-problèmes, problèmes ouverts, problèmes longs, situations ou ateliers de recherche, activités de recherche et de preuve entre pairs, activités d'étude et de recherche, parcours d'étude et de recherche, etc.

La plupart de ces problèmes et situations nécessitent certes un temps long en classe, mais favorisent à la fois l'acquisition de connaissances et le développement des compétences transversales de l'activité mathématique (chercher, modéliser, représenter, raisonner, communiquer) chez les élèves.

161 — Bethany Rittle-Johnson, Jon R. Star, "Does Comparing Solution Methods Facilitate Conceptual and Procedural Knowledge? An Experimental Study on Learning to Solve Equations", *Journal of Educational Psychology*, 99(3), p. 561-574, 2007.
162 — Michael Vendetti, Bryan J. Matlen, Lindsey Engle Richland, Silvia Bunge, "Analogical Reasoning in the Classroom: Insights from Cognitive Science", *Mind, Brain, and Education*, 9(2), p. 100-106, 2015.
163 — Contributions de Cécile Ouvrier-Buffet et Marie-Line Gardes.

Les **situations-problèmes** sont conçues dans le cadre de la théorie des situations didactiques[164]. L'objectif est l'acquisition d'une connaissance nouvelle : il y a des obstacles à l'acquisition de cette connaissance, ou celle-ci est plus appropriée que celles dont disposent les élèves pour résoudre le problème, ou encore les connaissances des élèves sont insuffisantes pour résoudre immédiatement le problème. En travaillant sur des situations-problèmes, les élèves peuvent facilement s'approprier la situation (imaginer ce qu'est une solution, s'engager dans la résolution, etc.), ont les moyens de valider leurs productions mais aussi de construire (une partie de) la connaissance nouvelle[165].

Les **problèmes ouverts** permettent de développer des compétences transversales chez les élèves, les concepts mathématiques en jeu peuvent être de complexité variable. L'énoncé d'un problème ouvert est court, n'induit ni la méthode ni la solution. Il est facile pour les élèves de prendre possession du problème et de s'engager dans des essais, conjectures, projets de résolution, contre-exemples[166].

Les **situations de recherche pour la classe** (Sirc) sont des situations issues de la recherche mathématique actuelle. Cette proximité avec des questions encore partiellement non résolues est déterminante pour le rapport que les élèves vont avoir avec la situation. Le problème initial est facile d'accès. Il se situe, pour l'élève, hors des mathématiques formalisées. De plus, la question est facilement identifiable. Des stratégies initiales existent. Mais les connaissances requises ne sont pas scolaires, c'est-à-dire qu'elles ne sont pas notionnelles. Ainsi, il n'y a pas d'obstacles constitués par des contenus notionnels. Il n'y a pas de « fin de la situation », il n'y a que des critères de fin locaux. Une question résolue renvoie à une nouvelle question[167].

164 — Guy Brousseau, *Théorie des situations didactiques*, Éditions La pensée sauvage, Grenoble, 1998.
165 — Guy Brousseau, ***op. cit.***; Régine Douady, « Jeux de cadres et dialectique outil-objet », *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), p. 5-31, 1986.
166 — Gilbert Arsac, Michel Mante, *Les Pratiques du problème ouvert*, Sceren-CRDP, académie de Lyon, France, 2007 ; Fabrice Vandebrouck, Dominique Baroux-Raymond, Géraldine Bonal, Charlotte Derouet, Ruis Dos Santos, Francoise Hérault, Cécile Prouteau, Gaëlle Temam, *Autour des problèmes ouverts en classe de mathématiques*, Irem de Paris, 2015 : https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/PS/IPS15002/IPS15002.pdf
167 — Denise Grenier, Roland Bacher, Hervé Barbe, Emmanuel Beffara, Yvan Bicaïs, Grégoire Charlot, Monique Decauwert, Martin Deraux, Tarkan Gezer, Jean-Baptiste Meilhan, Frédéric Mouton, *Situations de recherche pour la classe, pour le collège et le lycée... et au-delà*, Irem de Grenoble, 2017 : https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/recherche-action/themes/raisonnement-logique-situations-de-recherche-pour-la-classe/situations-de-recherche-pour-la-classe-498450.kjsp?RH=413148517470877

Les **situations didactiques de recherche de problèmes** (SDRP) sont des situations didactiques qui visent l'acquisition de connaissances notionnelles et le développement de compétences transversales via la résolution d'un problème mathématique. Le problème est souvent issu de la recherche, il est robuste et se trouve dans un domaine conceptuel familier des élèves. Il comporte une forte dimension expérimentale, c'est-à-dire qu'il permet aux élèves de s'engager dans une démarche de type expérimental par des allers et retours entre la manipulation des objets mathématiques en jeu (tangibles ou non) et l'élaboration de nouveaux objets et éléments théoriques[168].

Notons que le **rôle de l'enseignant** dans ces dispositifs est très important. Il adopte une posture d'observateur, de médiateur et d'animateur du travail des élèves. Ainsi, il va s'assurer de l'engagement de tous les élèves, les relancer et les aider si besoin, en veillant toutefois à ne pas fermer le problème ou (in)valider leurs propositions. Il est également important de les encourager et de favoriser l'autocritique de leurs propositions. Pendant le débat, il doit dynamiser, orienter et cadrer les échanges, sans trop les influencer. En effet, on cherche à ce que les conjectures, preuves et résultats soient produits et formulés par les élèves. Enfin, dans le temps de synthèse, l'enseignant est de nouveau acteur et meneur. C'est lui qui (re)met en évidence les savoirs et les compétences développés pendant la recherche du problème. Il fait alors des choix d'institutionnalisation en fonction de ses objectifs d'apprentissage et de sa progression.

Faire de l'explicitation un levier

Dans la suite de ce chapitre, le choix a été fait de présenter une stratégie d'apprentissage fondée sur l'explicitation ; d'autres stratégies pourraient compléter ces propositions. Cette démarche est bien à différencier d'un enseignement magistral (*ex cathedra*) et doit se comprendre comme intégrée à l'activité de cette même résolution de problème. Elle est également destinée à potentialiser les bénéfices de l'engagement des élèves dans une démarche de recherche de solution propice à faire évoluer favorablement leurs conceptions.

Cette approche de l'explicitation requiert un changement de pratique relativement minime par rapport aux usages courants. Une explicitation des notions et compétences mathématiques mobilisées, des procédures suivies, etc., peut en effet permettre au professeur de mettre en évidence dans un premier temps les invariants, les structures communes à une classe de problèmes, des méthodes transférables à d'autres situations, et ainsi de permettre à l'élève de mieux structurer sa pensée et gagner en autonomie.

168 — Marie-Line Gardes, « Démarches d'investigation et recherche de problèmes », in Gilles Aldon, *Le Rallye mathématique, un jeu très sérieux !*, p. 73-96, Canopé Éditions, 2018 ; http://dreamaths.univ-lyon1.fr

Qu'est-il utile d'expliciter ?

Au-delà des étapes nécessaires pour résoudre un problème particulier, au-delà des questions qu'on se pose, des stratégies utilisées lors de cette résolution, il convient d'expliciter les compétences mobilisées transposables à d'autres situations ainsi que le cadre que l'élève pourra réinvestir. L'élève doit avoir conscience des compétences qu'il mobilise. Patrick Rayou[169] indique : « La pédagogie explicite ne va pas de soi et conduit à s'interroger sur ce qui est explicitable, ce qui est explicité dans les pratiques et ce qu'il faudrait expliciter pour une plus grande efficience des apprentissages. D'une manière générale, les enseignants savent plutôt bien expliciter :

- l'objet de savoir en fin de séance ; c'est l'institutionnalisation (qui ne rencontre pas toujours les attentes des élèves des milieux populaires) ;
- les supports de l'étude, c'est-à-dire le sens de la consigne.

Le constat qui est fait, c'est que même lorsque les enseignants tiennent explicitement ces deux bouts, ce qui semble manquer, c'est l'explicitation de la forme scolaire, ce que signifie “apprendre à l'école”. »

Quand faut-il expliciter ?

Jacques Bernardin[170] pointe quatre moments propices dans la séance et/ou dans la séquence pour expliciter et faire expliciter :

« — Les cinq premières minutes de cours, pour la présentation des enjeux de l'activité et l'appropriation commune de la consigne (éclaircir le but).
- Au cours de la tâche, quand cela s'avère nécessaire, suspendre l'activité [d'un élève ou d'un groupe] pour faire expliciter les procédures amorcées et, si besoin réorienter la tâche pour faire évoluer l'activité de l'élève. Dévoilement et inventaire critique des moyens mis en œuvre qui peuvent aussi se faire au terme de la réalisation.
- Le temps d'institutionnalisation. C'est le passage du réussir au comprendre, trop souvent éludé (ou pris en main de manière unilatérale par l'enseignant), pour dégager le noyau dur de l'activité et en faire un objet de savoir générique que les élèves pourront transférer dans une situation de même nature.
- La transition, le tissage entre une séance et la suivante qui permet parfois de faire saisir à certains ce qui ne l'avait pas été lors de l'institutionnalisation. »

169 — http://centre-alain-savary.ens-lyon.fr/CAS/education-prioritaire/ressources/theme-1-perspectives-pedagogiques-et-educatives/realiser-un-enseignement-plus-explicite/enseigner-explicitement-pour-quoi-qui-quand-quoi-comment
170 — *Ibid.*

Disposer de procédures automatisées

Une première modalité présentée ici conduit, tout au long de l'année, à développer des réflexes intellectuels chez les élèves et à les inciter à développer une posture réflexive. Il s'agit de les outiller pour leur permettre de s'engager dans une résolution de problèmes quel que soit le type de problème (problème pour chercher, problème basique ou atypique, etc.).

Pour rendre les élèves capables de résoudre des problèmes en autonomie, il est nécessaire de développer certains automatismes. En complément d'un travail sur le développement de savoirs et savoir-faire, certaines questions flash peuvent permettre d'entraîner les élèves à développer les six compétences mathématiques.

Par exemple, les questions flash proposées ci-dessous visent à entraîner les élèves du collège à développer trois des six compétences mathématiques.

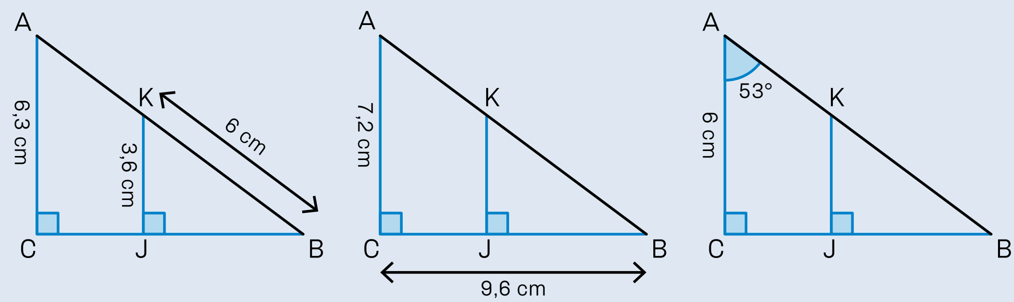
EXEMPLE DE QUESTION FLASH : ENTRAÎNER LES ÉLÈVES À DÉVELOPPER LA COMPÉTENCE « MODÉLISER »

Pour résoudre un problème, les élèves ont à reconnaître un modèle mathématique et à raisonner dans le cadre de ce modèle.

Dans les trois situations suivantes, malgré un habillage commun, des structures mathématiques différentes sont à mobiliser : respectivement le théorème de Thalès, le théorème de Pythagore et des relations trigonométriques. On ne cherchera pas à résoudre les exercices, mais à identifier les théorèmes à mobiliser grâce aux données présentes sur les figures.

ÉNONCÉ

Dans chaque situation suivante, indiquer le théorème ou la définition à utiliser pour calculer la longueur AB.



Situation 1 **Situation 2** **Situation 3**

EXEMPLE DE QUESTION FLASH : ENTRAÎNER LES ÉLÈVES À DÉVELOPPER LA COMPÉTENCE « CALCULER »

Une aisance en calcul permet de décharger l'élève de processus cognitifs couteux. Ici, l'élève ne doit pas calculer mais identifier les règles qui permettent de déterminer le signe des expressions proposées (cas 1 et 2) ou de transformer les équations.

ÉNONCÉS

1. Soit y un nombre négatif différent de 0.
Indiquer la règle à utiliser pour déterminer le signe de chacune de ces expressions.

$A = y \times y$ $B = y + y + y$ $C = (+7) \times y$ $D = y^3$

$E = y^{10}$ $F = -3 \times y$ $G = -3 + y$

2. [On rappelle la règle] Le produit de deux nombres relatifs de même signe est positif.
Dans chacun des cas suivants, y est un nombre négatif différent de 0.
Indiquer si on peut appliquer cette règle pour connaître le signe de l'expression. Expliquer.

$A = y \times (-7)$ $B = -4 - y$ $C = y^2$ $D = -y \times (+4)$

3. Voici une égalité : $3x - 7 = 5x + 2$.
Comment transformer cette égalité pour obtenir chacune des égalités suivantes ?

$3x = 5x + 9$ $-7 = 2x + 2$ $3x - 9 = 5x$ $5x + 2 = 3x - 7$

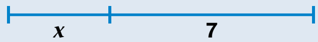
EXEMPLE DE QUESTION FLASH : ENTRAÎNER LES ÉLÈVES À DÉVELOPPER LA COMPÉTENCE « REPRÉSENTER »

Les expressions algébriques sont souvent associées à des processus calculatoires, alors qu'elles peuvent aussi générer des représentations géométriques qui donnent du sens aux expressions. Souvent travaillées dans le cadre de l'addition, ces représentations le sont plus rarement dans le cadre de la multiplication. Dans l'exemple ci-après, tiré d'une évaluation Timss, les nombres 3 et 4 représentent des grandeurs et il faut interpréter $3x$ comme 3 multiplié par x.

ÉNONCÉ

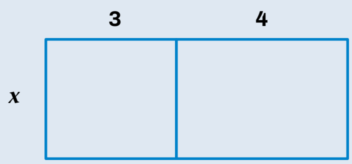
Quelle situation représente l'expression $3x + 4x$?

a. La longueur de ce segment :

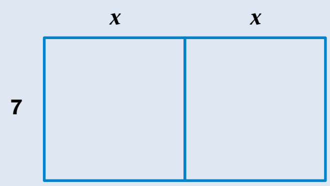


b. La longueur de ce segment :

c. L'aire de cette figure :



d. L'aire de cette figure :



Installer des temps dédiés à la résolution de « classes de problèmes »

On propose, comme seconde modalité, une mise en œuvre pour apprendre à résoudre une « classe de problèmes classiques »[171] ou pour apprendre une stratégie de résolution classique (par exemple, décomposer un problème en sous-problèmes). Il s'agit d'un apprentissage groupé sur quelques séances qui pourra être répété à chaque rencontre d'une nouvelle classe de problèmes, tout au long du cursus de l'élève.

Beaucoup d'enseignants sont démunis face aux difficultés éprouvées par certains élèves qui peinent à s'engager dans la tâche lorsqu'il s'agit de résoudre un problème, et sont découragés par l'impression que les élèves ne retirent pas suffisamment de bénéfice de ces séances de résolution de problèmes.

171 — Problèmes se ramenant à des équations du premier degré, problèmes mettant en jeu la divisibilité, problèmes de proportionnalité, problèmes arithmétiques mettant en jeu des fractions et décimaux, problèmes modélisés par des fonctions, problèmes abordant des questions relatives au hasard, problèmes de géométrie.

La confrontation des élèves à la résolution de problèmes est évidemment nécessaire et doit être régulière, en classe ou hors de la classe, mais elle ne saurait effectivement suffire à garantir leur réussite. Il convient d'installer des temps d'apprentissage centrés sur la résolution des différentes classes de problèmes inventoriées dans les programmes. Ce choix n'implique pas en général de dénommer auprès des élèves les classifications concernées, qui relèvent souvent d'approches didactiques et permettent de s'assurer qu'une notion a été travaillée dans la diversité de ses contextes (par exemple, la classification de Vergnaud pour les cycles 2 et 3). En revanche, lorsque la classification concerne des notions mathématiques, elle est utile à formuler auprès des élèves (par exemple, les problèmes de proportionnalité).

Il convient de consacrer à cet enseignement un temps d'apprentissage suffisamment long, sur quelques séances consécutives, de manière à montrer aux élèves qu'ils comprennent, qu'ils sont en capacité de reproduire, qu'ils progressent.

Ce temps d'enseignement de la résolution de problèmes doit être clairement identifié comme tel par l'enseignant et annoncé aux élèves. Il vise à rendre explicite avec les élèves les ressemblances et les différences entre plusieurs situations afin d'identifier avec eux les dimensions pertinentes sur le plan mathématique. Pour cela, il s'agit d'associer les élèves, lors d'une résolution de problèmes, à la verbalisation de chacune des étapes, des questions qui se posent, en explicitant à voix haute le raisonnement suivi, ainsi que les stratégies qu'on utilise. Les opérations mentales effectuées sont rendues explicites par l'enseignant et/ou par les élèves à l'occasion d'échanges avec la classe. Régulièrement, l'enseignant s'assure de la compréhension des élèves en les faisant reformuler.

Au-delà du *dire*, les élèves doivent pouvoir garder une trace écrite de cette explicitation. Ils pourront ainsi se référer à quelques problèmes ayant valeur de modèle à l'occasion de nouvelles résolutions. Sur ce point, on pourra s'appuyer sur ce qui est inscrit dans le préambule des programmes de cycle 4[172].

Le focus suivant détaille une séquence de mise en œuvre en classe d'un tel apprentissage, dans le cadre d'une résolution de problème relevant de la classe « problèmes se modélisant par une équation ».

172 — « Une trace écrite récapitulant de façon organisée les connaissances, les procédures et les stratégies mises en œuvre. L'élève pourra ainsi se référer à quelques exercices ayant valeur de modèle. Leur consultation régulière (notamment au moment de la recherche de problèmes, sous la conduite du professeur ou en autonomie) favorise à la fois la mise en mémoire et le développement de compétences. »

Focus | Une étude de cas en classe de 3e autour des problèmes se modélisant par une équation

Cette séquence prévoit trois phases de longueurs différentes : un temps d'apprentissage, une évaluation formative, une remédiation. Le travail conduit en séances 1 à 3 vise à rendre l'élève en mesure d'identifier les dimensions pertinentes sur le plan mathématique pour les situations relevant de cette famille de problèmes. Dans un second temps (séance 4), la résolution d'un problème partageant la même structure mathématique est confiée aux élèves en pleine autonomie. Enfin, en cas de besoin, une cinquième séance a fonction de remédiation. Les énoncés présentés dans ce focus sont donnés à titre d'exemples pour illustrer ces trois phases.

L'enjeu de cette séquence est donc de permettre aux élèves de reconnaître une situation et de la rattacher à une classe plus générale de problèmes, d'être en capacité de prendre des initiatives dans des situations similaires et de résoudre des problèmes relevant de la même classe sans indications du professeur ou d'un pair, sans questions intermédiaires ni aides. Il s'agit d'outiller l'élève pour qu'il dispose d'un codage des énoncés qui concorde avec leur structure mathématique.

Le scénario de classe proposé repose sur une explicitation des compétences et des connaissances mobilisées, des procédures transposables à d'autres situations, des invariants entre plusieurs problèmes, et donc pas uniquement des étapes de résolution du problème en cours.

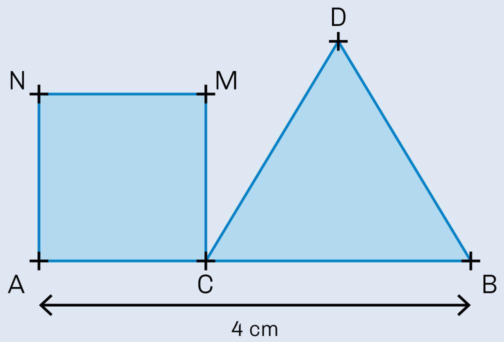
Cette proposition de séquence est pleinement modulable en fonction des besoins des élèves, de leur degré d'autonomie, une différenciation pouvant être à prévoir. Elle a également vocation à pouvoir être transposée à d'autres classes de problèmes.

Séance n° 1. Durée estimée : 45 min

Un premier problème est proposé. L'enseignant met en œuvre une phase d'explicitation des dimensions pertinentes sur le plan mathématique à relever dans ce problème.

PROBLÈME 1

Le point C appartient au segment [AB].
La longueur du segment [AB] vaut 4 cm.
Le carré ACMN et le triangle équilatéral BDC sont dessinés du même côté du segment [AB].
Où placer le point C pour que le périmètre du carré soit égal à celui du triangle ?



Étape 1 : recherche individuelle (environ 5 min). Il s'agit, pour l'élève, de disposer d'un temps suffisant pour l'appropriation et la réflexion et, pour le professeur, de disposer d'un temps suffisant pour prendre des informations sur les productions des élèves : recenser les élèves qui ne démarrent pas ou se trouvent en impasse, les stratégies de résolution mises en œuvre par certains, etc.

Ce temps de recherche individuelle conduit en général les élèves à exprimer leur incapacité à calculer les périmètres, ne connaissant pas certaines longueurs. Les étapes 2 et 3 sont prévues ensuite pour prendre en charge collectivement la résolution du problème.

Étape 2 : première mise en commun. L'objectif est d'amener les élèves, en suscitant des prises de parole pour impliquer le plus grand nombre, à introduire une inconnue et à identifier les étapes du travail. On ne cherchera pas à les résoudre, à ce stade. Le recours à un logiciel de géométrie dynamique est susceptible de faciliter la compréhension du problème.

Interroger en premier les élèves qui n'ont pas démarré et rebondir sur leurs difficultés :
— faire expliquer où est le problème ;
— comment y répondre (stratégies envisagées par certains) ?

À ce stade, il s'agit de faire comprendre aux élèves que trouver la position du point C demandée revient à trouver une longueur : AC ou CB, ce qui n'est pas immédiat pour les élèves. Il doit émerger la nécessité de choisir une inconnue pour remplacer une donnée manquante puis de calculer les deux périmètres et de traduire la contrainte du problème. Ces étapes de résolution seront inscrites au tableau : s'assurer qu'elles sont comprises par tous les élèves.

Point de vigilance : l'objectif n'est pas de dire à l'élève ce qu'il doit faire, mais comment y arriver. Il convient de ne pas devancer sa réflexion, par exemple, il serait contre-productif d'évoquer à ce stade la notion d'équation alors que l'élève ne l'a pas encore mise en place.

Étape 3. On poursuit la résolution du problème, soit en relançant une phase de travail individuel, soit en la relançant sur un mode collectif.

Étape 4 : deuxième mise en commun. Cette synthèse poursuit deux objectifs :

— **Terminer la résolution du problème.** Les élèves n'ont pas forcément choisi la même inconnue. Les deux solutions seront proposées. Mettre en évidence le fait que le choix de l'inconnue, qu'il s'agisse de AC ou de CB, n'influe pas sur le résultat.

— **Expliciter les compétences et connaissances mobilisées** dans ce problème de façon à ce que les élèves les identifient, pour guider leur démarche lors d'une prochaine résolution d'un problème du même type. Ces éléments seront notés pour que les élèves en conservent une trace écrite. On nommera les notions et savoir-faire mobilisés : les formules du périmètre, le recours à des expressions littérales, la reconnaissance d'une équation du premier degré comme traduction de la contrainte, la résolution de l'équation, et on fera le lien avec les compétences mathématiques :
  - **représenter :** représenter une longueur par une inconnue ;
  - **modéliser :** recours à une inconnue pour désigner une donnée manquante ; recours au calcul littéral ; modélisation de la situation par une équation. Il s'agit de faire comprendre aux élèves qu'on a recours au cadre algébrique pour résoudre un problème géométrique ;
  - **raisonner :** mise en évidence des différentes étapes (la position de C peut être indiquée par la longueur AC par exemple, calculs des périmètres, traduction de l'égalité des périmètres) ;
  - **calculer :** on est amené à résoudre une équation. On explicite les étapes de résolution de l'équation du premier degré ;
  - **communiquer :** la communication concerne l'ensemble de ce qui est au tableau, elle prend autant la forme de phrases que de calculs, de schémas, etc. : tout ce qui se comprend de sa trace. On précisera aux élèves l'objectif de la communication : être compris. Les étapes de raisonnement doivent apparaître autant que la réponse au problème initial. Elle peut prendre la forme présentée sur la photo ci-dessous. Ces éléments viendront compléter la trace écrite de résolution.

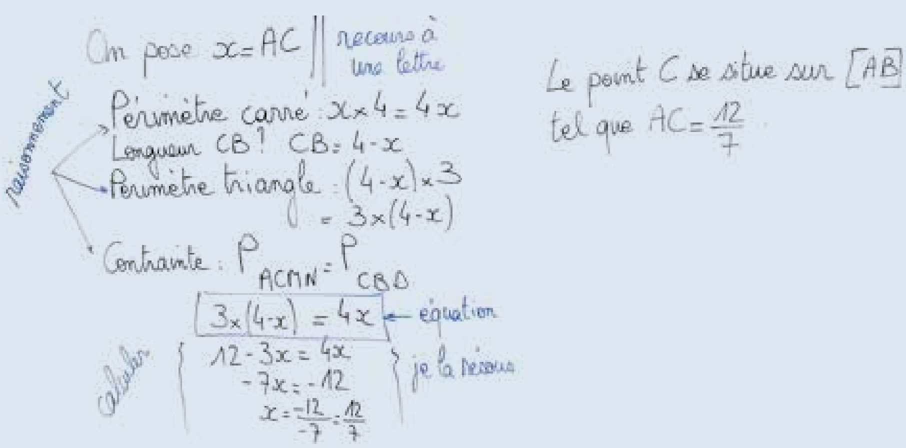
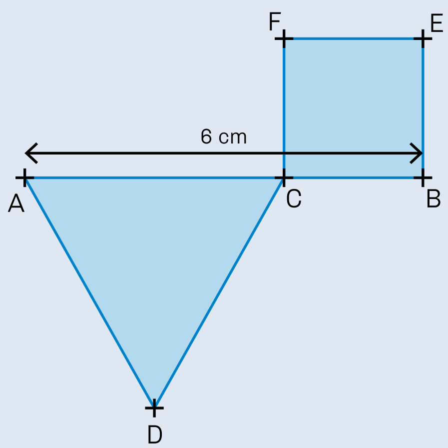


Figure 38. Un exemple de trace écrite au tableau exposant les étapes du raisonnement.

Étape 5 : travail d'entraînement à faire hors la classe pour la prochaine séance. Le problème donné est similaire à celui travaillé en classe afin d'ancrer la méthode de résolution chez les élèves, de leur permettre de prendre confiance en eux. On l'indiquera aux élèves. Pour l'enseignant, ce sera l'occasion de mesurer l'efficacité du travail de la séance 1. Sur le plan du codage des propriétés mathématiquement pertinentes de la situation, ce sera l'occasion de mettre en évidence que le fait que les figures soient d'un même côté ou d'un côté et de l'autre du segment est sans incidence sur la stratégie qui peut mener à la solution.

PROBLÈME À RÉSOUDRE POUR LE COURS SUIVANT

Le point C appartient au segment [AB].
La longueur du segment [AB] vaut 6 cm.
Le carré CBEF et le triangle équilatéral ADC sont dessinés de part et d'autre du segment [AB].
Où placer le point C pour que le périmètre du carré soit égal à celui du triangle ?



Séance n° 2. Durée estimée : 1 h

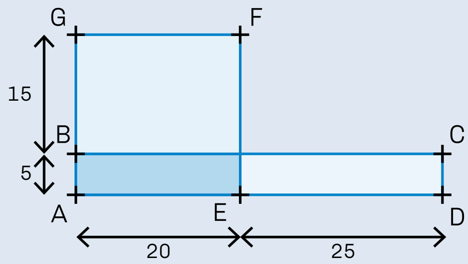
Cette seconde séance commence par une phase de correction du travail donné lors de la dernière séance. Puis une question flash est posée aux élèves, pour les préparer au problème du jour.

Ce second problème, de la même classe que le premier, est traité collectivement. L'objectif est de poursuivre la phase d'apprentissage pour les élèves ayant besoin d'un temps plus long d'appropriation. En fin de séance, il s'agira de montrer aux élèves les invariants aux trois problèmes déjà rencontrés dans la séquence, et d'identifier les notions qui diffèrent.

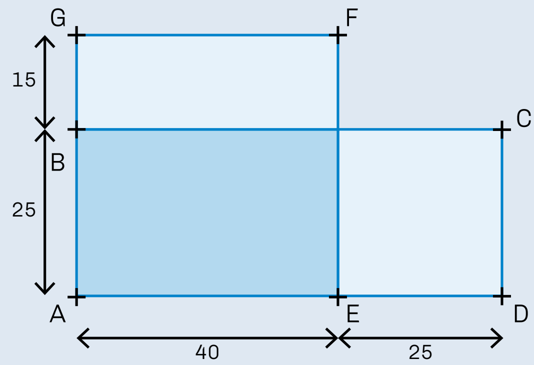
QUESTION FLASH

L'objectif de cette question est de permettre aux élèves de comprendre que E est un point mobile et que le résultat de la comparaison des aires varie en fonction de la position de E, l'aire la plus grande pouvant être selon les cas celle du carré ou celle du rectangle.

ABCD est un rectangle. E est un point du segment [AD] et B un point du segment [AG].
AEFG est un carré.
Comparer l'aire du rectangle ABCD et celle du carré AEFG.



Cas 1



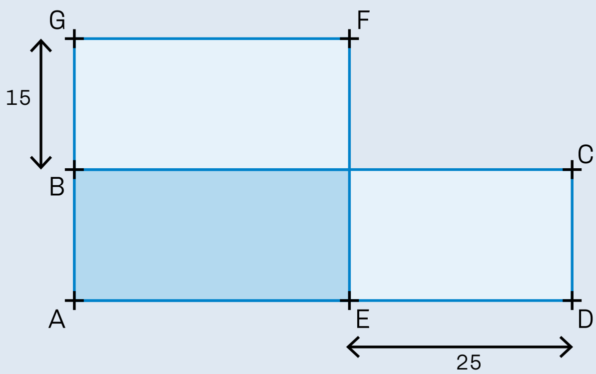
Cas 2

Cette question s'avère utile pour réactiver les formules de calculs d'aire et pour entraîner les élèves à reconnaître le carré et le rectangle concernés en dépit des segments distracteurs.

Le recours à un logiciel de géométrie dynamique permet de compléter ce travail préparatoire. Les élèves observent notamment que l'aire du carré peut être supérieure ou inférieure à celle du rectangle et suggèrent même parfois la question de l'égalité proposée dans le problème suivant.

PROBLÈME 2 (TRANSFERT DANS UN CONTEXTE SÉMANTIQUEMENT PROCHE)

ABCD est un rectangle.
E est un point du segment [AD], B est un point du segment [AG].
AEFG est un carré.
ED = 25 et BG = 15.
Déterminer les dimensions du carré AEFG et du rectangle ABCD afin qu'ils aient la même aire.



Étape 1 : recherche individuelle (environ 5 min). Cette phase permet d'observer si les élèves s'investissent plus facilement que lors de la première séance, s'ils y font référence. Le professeur recense les élèves qui ont progressé depuis la première séance, et ceux qui sont en impasse. Si les élèves parviennent tous à résoudre le problème, on passera directement à l'étape 3.

Étape 2 : première mise en commun. L'objectif reste celui de mettre en évidence les étapes du travail :

— interroger à nouveau en premier les élèves qui n'ont pas démarré, et rebondir sur leurs difficultés en les questionnant, en prenant appui sur les stratégies mises en œuvre par d'autres et sur le travail conduit en séance 1 (quelles sont les données qui manquent ? Comment peut-on s'y prendre pour compenser l'absence de la donnée de telle longueur ?). Là encore, on fera émerger la nécessité de choisir une inconnue pour désigner une longueur manquante (plusieurs choix possibles pour cette inconnue), de calculer les aires en fonction de cette inconnue, de traduire la contrainte imposée par le problème, en l'occurrence l'égalité des aires. Les étapes de résolution seront inscrites au tableau ;

— relancer la recherche individuelle ;

— recenser les élèves qui éprouvent encore des difficultés.

Étape 3 : synthèse. Deux objectifs sont poursuivis ici.

— Résoudre le problème. Mettre en évidence le fait que le choix de l'inconnue n'influe pas sur le résultat.

— Expliciter les connaissances et compétences mobilisées dans ce problème en insistant sur les points communs avec le problème 1, malgré un contexte qui est différent : recours à une lettre pour désigner une inconnue, calculs d'aires en fonction de l'inconnue, traduction de la situation faisant apparaître une équation. Nommer cette classe de problèmes : problèmes se modélisant par une équation. Il s'agit également d'expliciter ce qui diffère : obtention d'une équation du second degré pouvant se ramener au premier degré. On nommera les calculs mis en œuvre : développement, identités remarquables, et on nommera, à côté de la trace écrite de résolution, les compétences :

  - **modéliser :** choix de l'inconnue, du calcul littéral qui conduit à une mise en équation ;
  - **raisonner.** Élaboration des étapes du travail : expression de chaque longueur en fonction de x puis calcul des aires en fonction de x et traduction de la contrainte ;
  - **calculer :** résolution d'une équation se ramenant au premier degré[173]. Les calculs littéraux sont plus complexes que ceux du problème 1, mais aboutissent à une résolution de même nature (même classe de problèmes) ;
  - **communiquer.**

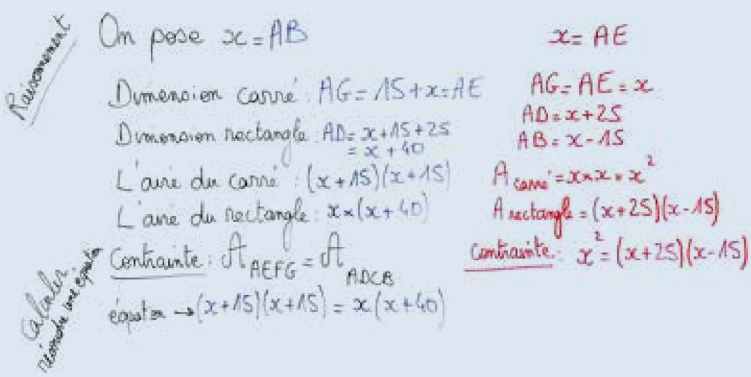


Figure 39. Un exemple de trace écrite au tableau exposant les étapes du raisonnement.

173 — On peut aussi se ramener directement à une équation du premier degré, si on a compris qu'il faut et qu'il suffit que les deux rectangles légèrement bleutés (BGFH et EDCH) aient la même aire.

Séance n° 3. Durée estimée : 40 min

On poursuit la phase d'appropriation à partir de deux autres problèmes du même type afin de s'assurer que le transfert est bien mis en œuvre dans des contextes plus éloignés que ceux des problèmes initiaux. La séance peut aussi nécessiter une différenciation en fonction du degré d'autonomie déjà construit par les élèves. L'enseignant questionne les élèves, leur donne des indices et diminue graduellement l'aide apportée. La correction collective permet de s'assurer de la compréhension de tous.

PROBLÈME 3

Voici trois carrés.
Quelles doivent être les longueurs des côtés des carrés vert et blanc pour que l'aire du carré blanc soit égale à la somme des aires des carrés bleu et vert ?

La séance commence là encore par une phase de recherche individuelle : appropriation du problème, engagement dans la tâche pour les élèves, prise d'informations par le professeur.

Les élèves travaillent en autonomie. L'enseignant s'assure de la compréhension des élèves.

Il pourra être utile de regrouper les élèves ayant éprouvé des difficultés lors de la résolution du problème 2 pour simplifier la gestion de classe, par exemple, dans un îlot en fond de classe.

La correction est organisée lorsque les élèves ont terminé, ou si plusieurs d'entre eux sont bloqués.

On mettra en évidence les invariants avec les problèmes déjà résolus. Cette séance est, comme les précédentes, complétée d'une explicitation des connaissances et compétences mobilisées :
- **raisonner.** Durant les différentes étapes du travail : recours à l'inconnue, expressions des aires des carrés, traduction de la contrainte imposée par l'énoncé ;
- **modéliser.** Travail dans un cadre algébrique : expression littérale des aires, mise en équation ;
- **calculer :** résolution d'une équation se ramenant à une équation du premier degré.

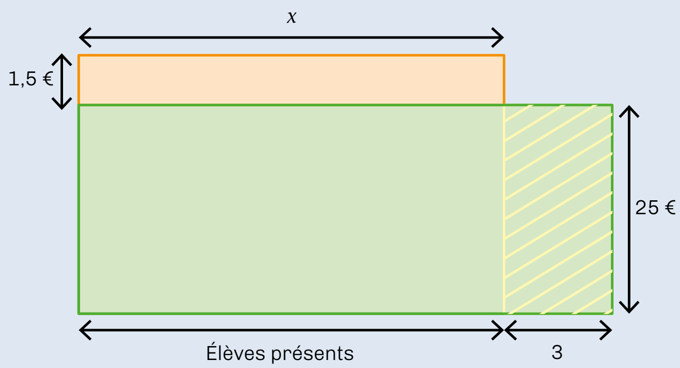
À l'issue de ces trois séances, on pourra faire observer aux élèves que la structure des trois problèmes est la même, mais qu'en fonction des choix effectués, une différence peut apparaître dans le traitement de telle ou telle étape. En particulier, les calculs algébriques à mener peuvent être plus ou moins complexes.

PROBLÈME 4

Si tous les élèves inscrits étaient venus, la sortie en autocar aurait coûté 25 € par personne. Mais il y a eu 3 absents et chaque participant a dû payer un supplément de 1,50 €.
Combien y avait-il d'inscrits ?

On fera remarquer aux élèves que les procédures mises en œuvre dans les problèmes précédents sont transférables à ce problème : le nombre d'élèves présents est une donnée manquante. On peut donc avoir recours à une inconnue pour la représenter (deux choix d'inconnue possibles). Les étapes du raisonnement sont ensuite dégagées : nécessité d'exprimer le nombre d'élèves inscrits en fonction de cette inconnue, de calculer le prix payé par les élèves présents puis de traduire l'égalité des coûts, que les élèves soient tous présents ou non. On reconnaît alors une équation du premier degré qu'il convient de résoudre.

La modélisation de la situation est la suivante : l'aire du grand rectangle vert représente le coût initial (l'unité « élève » étant sans dimension, la grandeur produit associée au rectangle est bien exprimée en euros). L'aire du rectangle jaune vertical représente la perte due à l'absence des 3 élèves. Le rectangle orange représente le coût supplémentaire supporté par les élèves participants. Les rectangles jaune et orange doivent être de même « aire ». Ce qui permet de conclure que $x = 50$, et donc qu'il y avait 53 élèves inscrits au départ.



L'objectif du problème 4 est de créer les meilleures conditions de transfert, y compris pour des problèmes superficiellement éloignés des problèmes d'apprentissage. Il s'agira de travailler avec les élèves à un codage du problème 4 qui soit compatible avec les stratégies de résolution élaborées lors de la résolution des problèmes précédents. En soi, le problème est difficile, mais utile, et il est possible de s'appuyer sur les démarches expliquées dans les points sur la recherche pour conduire à une bonne compréhension de la part de l'élève qui permette de mettre en œuvre les stratégies travaillées dans une classe diversifiée de problèmes.

Séance n° 4. Durée estimée : 30 min

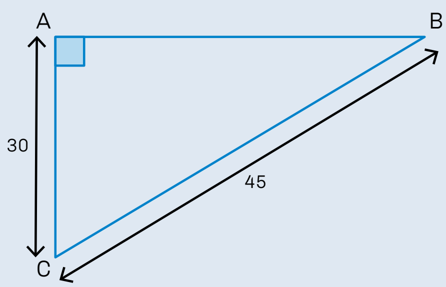
À l'issue de ces séances d'enseignement, un problème de la même classe est proposé aux élèves, en autonomie, pour une évaluation formative.

Il s'agit pour l'élève de réinvestir seul le travail collectif précédent. À ce stade, l'enseignant n'intervient pas durant la résolution afin d'évaluer les acquisitions des élèves et leur degré d'autonomie. Toutefois, pour préparer les élèves au problème du jour, une question flash est introduite, et corrigée, avant de passer à la résolution du problème proprement dite.

QUESTION FLASH

L'objectif de cette question est de réactiver le calcul de l'aire d'un triangle rectangle, afin d'éviter des difficultés de résolution liées à la non-disponibilité de cette connaissance.

Parmi les formules suivantes, lesquelles permettent de calculer l'aire du triangle ABC ?



a. 15 AB

b. $\frac{45 \times 30}{2}$

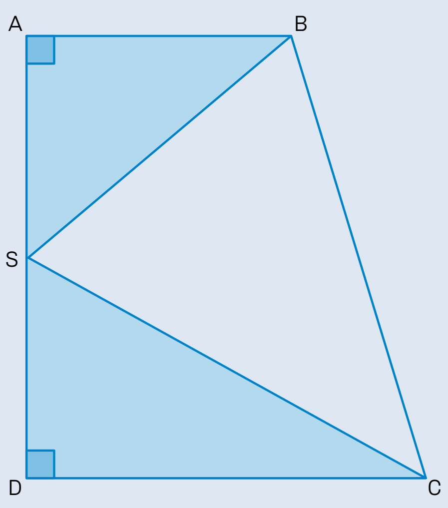
c. $\frac{30 \times AB}{2}$

d. $\frac{AB}{2} \times 30$

e. $\frac{30 \times AB}{2}$

PROBLÈME CIBLE

Le trapèze ABCD ci-dessous est un trapèze rectangle tel que AB = 60 cm, AD = 100 cm et DC = 80 cm.
S est un point du segment [AD].
Où placer le point S pour que les aires des triangles ABS et DSC soient égales ?



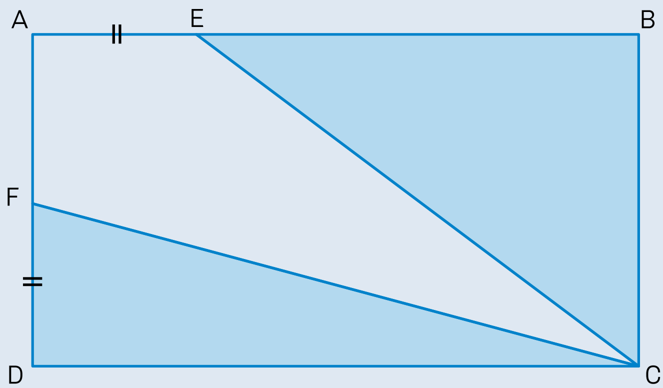
Séance n° 5

Si des élèves éprouvent encore des difficultés, un travail de remédiation pourra s'engager sur les séances suivantes. Pour ces élèves, la poursuite de l'apprentissage pourra se faire également lors de séances différenciées ou d'aide personnalisée.

Par exemple, on pourra donner aux élèves des problèmes à résoudre en autonomie pendant que l'enseignant travaillera, avec les élèves en difficulté, le problème « piste verte », dans un îlot « coup de pouce ». Il s'agira de reprendre en petit groupe les étapes précédentes.

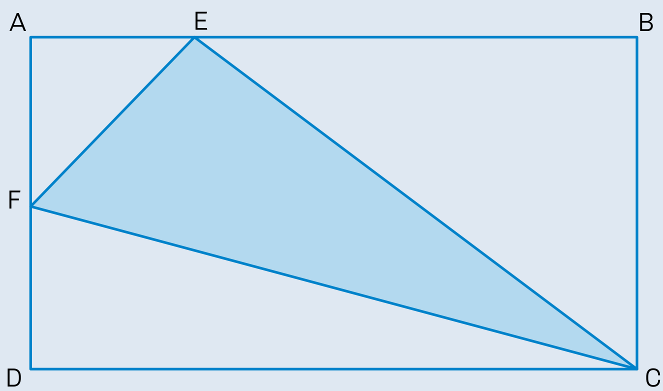
PROBLÈME : PISTE VERTE

ABCD est un rectangle tel que AB = 100 cm et BC = 60 cm.
E est un point du segment [AB] et F est un point du segment [AD] tel que AE = FD.
Où placer les points E et F pour que les aires des triangles FCD et EBC soient égales ?



AUTRE PROBLÈME POSSIBLE : PISTE NOIRE

ABCD est un rectangle tel que AB = 10 cm et BC = 6 cm.
E est le point du segment [AB] tel que AE = 4 cm.
F est un point du segment [AD].
Où placer le point F pour que l'aire du triangle FEC soit égale à 28 cm^2 ?



En résumé

- La résolution de problèmes n'est pas uniquement applicative, elle contribue au développement des notions mathématiques elles-mêmes. Certaines stratégies d'enseignement permettent de soutenir la réussite des élèves en résolution de problèmes.

- Il importe que l'enseignant favorise de diverses manières des processus de prise de conscience des caractéristiques mathématiquement pertinentes d'un problème. En particulier, des activités de comparaison de problèmes, destinées à rendre perceptibles les similitudes et les différences entre énoncés appartenant à une même classe de problèmes, s'avèrent un mode particulièrement efficace pour permettre aux élèves de résoudre d'autres problèmes relevant de la même structure mathématique.

- Deux stratégies d'enseignement pour la résolution de problèmes peuvent concourir à ces objectifs. La première met l'accent sur la reconnaissance de compétences qui sont mobilisées en résolution de problèmes. La seconde repose sur une démarche d'explicitation visant à favoriser le transfert d'apprentissage dans le cadre d'une classe de problèmes.

Bibliographie et outils de référence

INTRODUCTION

- Bassok Miriam, Wu Ling-Ling, Olseth Karen L., “Judging a Book by its Cover: Interpretative Effects of Content on Problem Solving Transfer”, *Memory & Cognition*, 23, p. 354-367, 1995.
- Bell Alan, Swann Malcolm, Taylor Glenda, “Choice of Operation in Verbal Problems with Decimal Numbers”, *Educational Studies in Mathematics*, 12, p. 399-420, 1981.
- Dehaene Stanislas, *Apprendre ! Les talents du cerveau, le défi des machines*, Odile Jacob, Paris, 2018.
- *Éduquer à l’esprit critique – Bases théoriques et indications pratiques pour l’enseignement et la formation.* Publication du Conseil scientifique de l’éducation nationale. ➔ https://www.reseau-canope.fr/fileadmin/user_upload/Projets/conseil_scientifique_education_nationale/Ressources_pedagogiques/VDEF_Eduquer_a_lesprit_critique_CSEN.pdf
- Fischbein Efraim, Deri Maria, Sainati Nello Maria, Sciolis Marino Maria, “The Role of Implicit Models in Solving Verbal Problems in Multiplication and Division”, *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, p. 3-17, 1985.
- Hofstadter Douglas, Sander Emmanuel, *L’Analogie - Cœur de la pensée*, chap. 7, « Les analogies naïves », Odile Jacob, Paris, 2013.
- Lautrey Jacques, Rémi-Giraud Sylvianne, Sander Emmanuel, Tiberghien Andrée, *Les Connaissances naïves*, Armand Colin, Paris, 2008.
- Nathan Mitchell, Petrosino Anthony J., “Expert Blind Spot among Preservice Teachers”, *American Educational Research Journal*, 40 (4), p. 905-928, 2003. Retrieved July 21, 2021. ➔ http://www.jstor.org/stable/3699412
- Reed Stephen K., “A Structure Mapping Model for Word Problems”, *Journal of Experimental Psychology: Learning Memory and Cognition*, 13, p. 124-139, 1987.
- Sander Emmanuel, Richard Jean-François, *Les Apprentissages numériques*, in Miljkovitch Raphaëlle, Morange-Majoux Françoise, Sander Emmanuel (dir.), *Psychologie du développement*, p. 252-258, Elsevier-Masson, Paris, 2017.
- Sander Emmanuel, « La résolution de problèmes arithmétiques à énoncés verbaux », Anae (approche neuropsychologique des apprentissages chez l’enfant), 156, 611-619, 2018.

- Schoenfeld Alan H., *Mathematical Problem Solving*, Academic Press Inc, 1985.
- Silver Edward A., “Recall of Mathematical Problem Information: Solving Related Problems”, *Journal of Research in Mathematical Education*, 12, p. 54-64, 1981.

CHAPITRE 1

- Batanero Carmen, Fine Jeanne, Raoult Jean-Pierre, « Le curriculum statistique dans le secondaire : comparaisons internationales », *Statistique et Enseignement*, 4(1), p. 1-4, 2013.
- Chevallard Yves, Wozniak Floriane, « Enseigner la statistique : un problème de la profession », in Actes du 14e colloque de la Corfem [commission inter-Irem de recherche sur la formation des enseignants de mathématiques du second degré], Antony Val de Bièvre, site de l’IUFM de Versailles, 21-22 Juin 2007.
- Masselin Blandine, *Étude du travail de l’enseignant autour de la simulation en classe de troisième et seconde : métamorphose d’un problème au fil d’une formation en probabilité*, thèse de doctorat, université Paris-Diderot, 2019. ➔ http://www.theses.fr/240200012
- Masselin Blandine, Derouet Charlotte, « Sur la mise en évidence des effets d’une formation courte sur les pratiques d’enseignants autour de la simulation en probabilité en classe de troisième », in Abboud Maha, « Mathématiques en scènes, des ponts entre les disciplines », 198-207, 2019, université de Cergy-Pontoise, France, octobre 2018.
- Masselin Blandine, « Dynamique du travail mathématique en classe entre un enseignant et des groupes d’élèves sur la simulation en probabilité : une étude de cas », *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 25, p. 49-88, 2020.
- Masselin Blandine, *Ingénieries de formation en mathématiques de l’école au lycée – Des réalisations inspirées des Lesson Studies*, Presses universitaires de Rouen et du Havre, 2020. ➔ http://purh.univ-rouen.fr/node/1309
- Samueli Jean-Jacques, Boudenot Jean-Claude, *Une histoire des probabilités des origines à 1900*, Ellipses, Paris, 2009.

CHAPITRE 2

- Barmby Patrick, Harries Tony, Higgins Steve, Suggate Jennifer, "The Array Representation and Primary Children's Understanding and Reasoning in Multiplication", *Educational Studies in Mathematics*, 70(3), p. 217-241, 2009.
- Behr Merlyn, Lesh Richard, Post Thomas, Silver Edward A. "Rational Number Concepts", in Lesh Richard, Landau Marsha (eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, p. 91-126, Academic Press, New York, 1983.
- Fischbein Efraim, Deri Maria, Sainati Nello Maria, Sciolis Marino Maria, "The Role of Implicit Models in Solving Verbal Problems in Multiplication and Division", *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(1), p. 3-17, 1985.
- Fosnot Catherine Twomey, Dolk Maarten, *Young Mathematicians at Work: Constructing Multiplication and Division*, Heinemann, Portsmouth, NH, 2001.
- Harel Guershon, Confrey Jere (eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics*, State University of New York Press, 1994.
- Lamon Susan J., "Rational Numbers and Proportional Reasoning: Toward a Theoretical Framework", in Lester Franck K. (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, p. 629-668, Charlotte, NC: Information Age Publishing, 2007.
- Lobato Joanne, Orrill Chandra H., Druken Bridget, Jacobson Erik, "Middle School Teachers' Knowledge of Proportional Reasoning for Teaching", in Lobato Joanne (chair), *Extending, Expanding, and Applying the Construct of Mathematical Knowledge for Teaching*, symposium conducted at the annual meeting of the American Educational Research Association, New Orleans, LA, 2011.
- Luke Clifton, "The Repeated Addition Model of Multiplication and Children's Performance on Mathematical World Problems", *Journal of Mathematical Behavior*, 7, p. 217-226, 1988.
- Masselin Blandine, Mondragon Fabrice, *Probabilités - Statistiques, cinq scénarios (3e/2de)*, Irem, université de Rouen Haute-Normandie, 2015.

- Modestou Modestina, Gagatsis Athanasios, “Cognitive and Metacognitive Aspects of Proportional Reasoning”, *Mathematical Teaching and Learning*, 12(1), p. 36-53, 2010.
- Moyon Marc, « Récréations mathématiques et algorithmique dans le *Liber Abaci* de Fibonacci (XIII^e siècle) », in Chevalarias Nathalie, Gandit Michèle, Morales Marcel, Tournès Dominique (éd.), *Mathématiques récréatives – Éclairages historiques et épistémologiques*, UGA Éditions, EDP Sciences, Grenoble, 2019.
- Moyon Marc, *Fibonacci – Extraits du livre de calcul (Liber Abaci)*, ACL, Les éditions du Kangourou, Paris, 2016.
- Sesiano Jacques, *Récréations mathématiques au Moyen Âge*, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 2014.
- Sesiano Jacques, « La poursuite du lièvre par un chien ». ➔ https://images.math.cnrs.fr/La-poursuite-du-lievre-par-un-chien
- Siemon Dianne, Breed Margarita, Virgona Jo, in Mousley Judy, Bragg Leicha, Campbell Coral (eds.), *Mathematics – Celebrating Achievement, Proceedings of the 42nd Conference of the Mathematical Association of Victoria*, Melbourne: MAV, 2008.
- Sullivan Peter Arnold, McLean Clarke Douglas, Cheeseman Jill, Mulligan Joanne, “Moving beyond Physical Models in Multiplicative Reasoning”, in van den Heuvel-Panhuizen Marja (ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Utrecht, Freudenthal Institute, 2001.
- Vergnaud Gérard, “Multiplicative Structures”, in Hiebert James, Behr Merlyn J. (eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, p. 141-161, Hillsdale, NJ: Erlbaum and Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1988.

CHAPITRE 3

- Alves Christophe, Coppé Sylvie, Duval Vincent, Goislard Alexandra, Kuhman Hélène, Martin Dametto Sylvie, Roubin Sophie, *Utilisation des programmes de calcul pour introduire l'algèbre au collège*, *Repères Irem*, 92, p. 9-30, 2013.
- Assude Teresa, Coppé Sylvie, Pressiat André, « Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au collège : atomisation et réduction », in Coulange Lalina, Drouhard Jean-Philippe, Dorier Jean-Luc, Robert Aline (dir.), « Enseignement de l'algèbre élémentaire : bilan et perspectives », p. 41-62, Éditions La pensée sauvage, Grenoble, 2012.
- Booth Lesley, « Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire », *Petit x*, n° 5, p. 5-17, 1985.
- Bernard Alain, « Les séries de problèmes, un genre au carrefour des cultures », éd. 2015, vol. 22, SHS Web of Conferences, EDP Sciences, Les Ulis. ➔ http://dx.doi.org/10.1051/shsconf/20152200001
- Caveing Maurice, *Essai sur le savoir mathématique dans la Mésopotamie et l'Égypte anciennes*, Presses universitaires de Lille, 1994.
- Chemla Karine, Guo Shuchun, *Les Neuf Chapitres. Le Classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*, Dunod, Paris, 2004.
- Chevallard Yves, « Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège, première partie. L'évolution de la transposition didactique », *Petit x*, 5, p. 51-94, 1985.
- Chevallard Yves, « Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège, deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation », *Petit x*, 19, p. 43-75, 1989.
- Chevallard Yves, « Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège, troisième partie. Voies d'attaque et problèmes didactiques », *Petit x*, 23, p. 5-38, 1990.
- Djebbar Ahmed, *L'Algèbre arabe, genèse d'un art*, Vuibert Adapt, Paris, 2005.
- Douady Régine, « Jeux de cadres et dialectique outil/objet », *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), p. 5-32, 1986.

- Duval Raymond, « Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ? », *Recherches en didactique des mathématiques*, vol 16(3), p. 349-382, Éditions La pensée sauvage, Grenoble, 1995.
- Fibonacci Leonardo, *Liber Abaci*, Enrico Gisuto (éd.), Firenze, Leo S. Olschki, 2020.
- Grugeon-Allys Brigitte, Pilet Julia, Chenevotot-Quentin Françoise, Delozanne Élisabeth, « Diagnostic et parcours différenciés d'enseignement en algèbre élémentaire », in Coulange Lalina, Drouhard Jean-Philippe, Dorier Jean-Luc, Robert Aline (dir.), *Enseignement de l'algèbre élémentaire : Bilan et perspectives*, p. 137-162, Éditions La pensée sauvage, Grenoble, 2012.
- Høyrup Jens, *L'Algèbre au temps de Babylone – Quand les mathématiques s'écrivaient sur de l'argile*, Vuibert, Paris, 2010.
- Irem de Grenoble, *Les Mathématiques en Mésopotamie – Niveaux 6e et 5e*, 2015.
- Keller Agathe, *Expounding the Mathematical Seed: A Translation of Bhaskara I on the Mathematical Chapter of the Aryabhatiya* (2 vol.), Birkhauser, Basel, Boston, Berlin, 2006.
- Kieran Carolyn, "Learning and Teaching Algebra at the middle School through College Levels: Building Meaning for Symbols and their Manipulation", in Frank K. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, p. 707-762, Greenwich, CT: Information Age Publishing, 2007.
- Kieran Carolyn, *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12- Year-Olds: The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice*, Springer, New York, 2018.
- Moyon Marc, « Comprendre les géométries de la mesure par les "séries de problèmes". L'exemple des pays d'Islam et de l'Occident latin du IXe au XIVe siècle », SHS Web of Conferences, vol. 22, n° 7, p. 13, 2015.
- Moyon Marc, *Fibonacci – Extraits du livre de calcul (Liber Abaci)*, ACL, Les éditions du Kangourou, Paris, 2016.
- Moyon Marc, *La géométrie de la mesure dans les traductions arabo-latines médiévales*, Brepols, Turnhout, 2017.

— Proust Christine, *Problèmes de partage : des cadastres à l'arithmétique*, CultureMath (ENS Ulm), 2012.
➔ http://culturemath.ens.fr/

— Proust Christine, « Mathématiques en Mésopotamie », Images des Mathématiques, 2014.
➔ http://images.math.cnrs.fr/Mathematiques-en-Mesopotamie.html

— Proust Christine, « Trouver toutes les diagonales. Plimpton 322 : à la recherche des rectangles sexagésimaux, une version mésopotamienne de la recherche des “triplets pythagoriciens” », Images des Mathématiques, 2015.
➔ http://images.math.cnrs.fr/Trouver-toutes-les-diagonales.html

— Proust Christine, “How did Mathematics Masters Work Four Thousand Years Ago? Curricula and Progressions in Mesopotamia”, in *The ‘Resources’ Approach to Mathematics Education*, edited by Trouche Luc, Gueudet Gislaine, Pepin Birgit, in *Advances in Mathematics Education*, p. 61-88, Springer, Berlin, 2019.

— Rashed Roshdi, Al-Khwârizmî, *Le Commencement de l'algèbre*, Blanchard, Paris, 2007.

— Radford Luis, “The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking”, Mathematics Education Research Group of Australasia, 26, p. 257-277, 2014.

— Sfard Anna, “On the Dual Nature of Mathematics Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin”, *Educational Studies in Mathematics*, 22, p. 1-36, 1991.

— Tirosh Dina, Even Ruhama, Robinson Naomi, “Simplifying Algebraic Expressions: Teacher Awareness and Teaching Approaches”, *Educational Studies in Mathematics*, 35, p. 51-64, 1998.

— Varent (de) Charlotte, *Pluralité des concepts liés aux unités de mesure. Liens entre histoire des sciences et didactique, le cas de l'aire du carré dans une sélection de textes anciens*, PhD doctorat, histoire et philosophie des sciences, université Paris-Diderot, 2018.

— Vergnaud Gérard, Cortès Anibal, Favre-Artigue Pierre, « Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles. Problèmes épistémologiques et didactiques », in Vergnaud Gérard, Brousseau Guy, Hulin Michel (éds.), *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*, Actes du colloque de Sèvres, p. 259-288, Éditions La pensée sauvage, Grenoble, 1987.

CHAPITRE 4

- Alturkmani Mohammad Dames, Roubin Sophie, Piolti-Lamorthe Claire, Trouche Luc *et al*, *Penser les ressources de l'enseignement des mathématiques dans un temps de transitions 2017-2019, programme de l'Institut Carnot de l'éducation : rapport scientifique des composantes PR 03 et PAE* 21, IFÉ-ENS Lyon, 2019.
➔ https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-02103459
- Ascher Marcia, *Mathématiques d'ailleurs. Nombres, formes et jeux dans les sociétés traditionnelles*, 1998, traduction de l'anglais (États-Unis) et postface de Karine Chemla et Serge Pahaut (traduit et publié avec le concours du Centre national des lettres), p. 281, Le Seuil, Paris, 1998 (éd. orig. : *Ethnomathematics, A Multicultural View of Mathematical Ideas*. Pacific Grove, California, Brooks and Cole Publishing Compagny).
- Ascher Marcia, *Mathematics Elsewhere: An Exploration of Ideas Across Cultures*, Princeton University Press, Princeton, 2002.
- Chemillier Marc, *Les Mathématiques naturelles*, Odile Jacob, Paris, 2007.
- Gerdes Paulus, *Une tradition géométrique en Afrique. Les dessins sur le sable*, tome 1, L'Harmattan, Paris, 1995.
- Gerdes Paulus, *Le Cercle et le Carré – Créativité géométrique, artistique et symbolique de vannières et vanniers d'Afrique, d'Amérique, d'Asie et d'Océanie*, L'Harmattan, Paris, 2000.
- Kieran Carolyn, Pang JeongSuk, Schifter Deborah, Fong Ng Swee, *Early Algebra. Research into its Nature, its Learning, its Teaching*, ICME-13, Topical Surveys, Springer, 2016.
- Martin-Dametto Sylvie, Piolti Lamorthe Claire, Roubin Sophie, Train : travail de recherche ou d'approfondissement avec prise d'initiative, Bulletin de l'Apmep, 502, p. 11-22, 2013.
➔ https://www.apmep.fr/IMG/pdf/05-Train-C.pdf
- Radford Luis, "The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking", *Mathematics Education Research Journal*, 26, p. 257-277, 2014.

- Squalli Hassane, Bronner Alain, *Le Développement de la pensée algébrique avant l'introduction du langage algébrique conventionnel*, vol. 1. Volume 20, numéro 3, 2017. ➔ https://www.erudit.org/fr/revues/ncre/2017-v20-n3-ncre04255/

- Squalli Hassane, Bronner Alain, *Le Développement de la pensée algébrique avant l'introduction du langage algébrique conventionnel*, vol. 2. Volume 22, numéro 1, 2020. ➔ https://www.erudit.org/fr/revues/ncre/2020-v22-n1-ncre05349/

- Squalli Hassane, Oliveira Izabella, Bronner Alain, Larguier Mirène, *Le Développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. Recherches et perspectives curriculaires*, Québec, 2020. Livres en ligne du Centre de recherche et d'intervention sur la réussite scolaire (Crires). ➔ https://lel.crires.ulaval.ca/sites/lel/files/le_developpement_de_la_pensee_algebrique_a_lecole_primaire_et_au_debut_du_secondaire.pdf

- Trgalova Jana, Alturkmani Mohammad Dames, Roubin Sophie, *Toward a common view of algebraic thinking through design of resources by primary and secondary teachers*, ICME14, Shanghai, 12th - 19th July, 2020.

- Vandendriessche Éric, Petit Céline, « Des ethnologues au pays des mathématiques », *Pour la Science*, p. 72-78, août 2020.

- Vandendriessche Éric, « Les jeux de ficelle », hors-série « Mathématiques exotiques », *Pour la science*, avril 2005.

- Vandendriessche Éric, « Ethnomathématique des jeux de ficelle trobriandais », 2015, n° 29, décembre 2014. ➔ https://www.ethnographiques.org/ethnomathematique-des-jeux-de-ficelle-trobriandais

- Vlassis Joëlle, Demonty Isabelle, Squalli Hassane, « Développer la pensée algébrique à travers une activité de généralisation basée sur des motifs (patterns) figuratifs », *Nouveaux Cahiers de la recherche en éducation*, 20(3), p. 131-155, 2017.

- Wing Jeannette, « La pensée informatique », 2009. ➔ https://interstices.info/la-pensee-informatique/

- Wolper Pierre, « La pensée algorithmique », podcast *Daily Science*, 2015. ➔ https://dailyscience.be/18/04/2016/la-pensee-algorithmique/

CHAPITRE 5

- Brousseau Guy, « Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire », Séminaire de didactique des mathématiques, Crète, Rethymon, 2000.
➔ https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00515110/fr/
- Houdement Catherine, Rouquès Jean-Philippe, « Deux géométries en jeu dans la géométrie plane : une qu'on appellera "dessinée" et une qu'on appellera "abstraite", 2016.
➔ https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03214099v2/document
- Mangiante-Orsola Christine, Perrin-Glorian Marie-Jeanne, Strømskag Heidi, "Theory of Didactical Situations as a Tool to Understand and Develop Mathematics Teaching Practices", in *Annales de didactiques et de sciences cognitives*, Irem de Strasbourg, 2018.
- Mangiante-Orsola Christine, Perrin-Glorian Marie-Jeanne, *Ingénierie didactique de développement en géométrie au cycle 3 dans le cadre du LÉA Valenciennes-Denain*, 2017, séminaire national de didactique des mathématiques, Arras, 22-23 janvier 2016.
➔ https://ardm.eu/wp-content/uploads/2017/02/pre_actes_seminaire_ARDM_janvier_2016.pdf
- Moyon Marc, "Practical Geometries in Islamic Countries: the Example of the Division of Plane Figures", in Kronfellener Manfred, Barbin Évelyne, Tzanakis Costa (éd.), *History and Epistemology in Mathematics Education. Proceedings of the 6th European Summer University* (Vienne, 19-23 juillet 2010), Verlag Holzhausen GmbH, Vienne, 2011.
- Moyon Marc, « Diviser un triangle au Moyen Âge : l'exemple des géométries pratiques latines », in Barbin Evelyne (éd.), *Les Mathématiques éclairées par l'histoire – Des arpenteurs aux ingénieurs*, Vuibert Adapt, Paris, 2012.
- Moyon Marc, « Diviser en multipliant les approches… Quand les mathématiques remontent aux sources », *Repères-Irem*, vol. 93, p. 47-77, 2013.
- Moyon Marc, *La géométrie de la mesure dans les traductions arabo-latines médiévales*, Brepols, Turnhout, 2017.
- Proust Christine, *Problèmes de partage : des cadastres à l'arithmétique*, CultureMath (ENS Ulm), 2012.
➔ http://culturemath.ens.fr/

CHAPITRE 6

- Chambris Christine, Coulange Lalina, Rinaldi Anne-Marie, Train Grégory, « Unités (relatives) pour les nombres et le calcul à l'école. Vers un état des lieux – Potentialités », in Chaachoua Hamid, Bessot Annie et al. (éds.), *Perspectives en didactique des mathématiques : point de vue de l'élève, questions curriculaires, grandeurs et mesures*, vol. 2, Éditions La pensée sauvage, Grenoble.
- Chambris Christine, Visnovska Jana, "On History of Units in French Elementary School Arithmetic: The Case of Proportionality", *Historia Mathematica*.
- Cortina Jose Luis, Visnovska Jana, Zuniga Claudia, "Unit Fractions in the Context of Proportionality: Supporting Students' Reasoning about the Inverse Order Relationship", *Mathematics Education Research Journal*, 26(1), p. 79-99, 2014.
- Davydov V. V., "The Psychological Characteristics of the 'Prenumerical' Period of Mathematics Instruction", *Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics*, 7, 109-206, 1975.
- Dougherty Barbara, Venenciano Linda, "Measure up for Understanding: Reflect and Discuss", *Teaching Children Mathematics*, 13(9), 452-456, 2007.
- De Ligt Frédéric, « 1793, la révolution du temps », in Moyon Marc, Tournès Dominique (éds.), *Passerelles. Enseigner les mathématiques par leur histoire au cycle 3*, p. 148-171, Arpeme, Bouc-Bel-Air, 2018.
- Pouchet Louis-Ézéchiel, *Métrologie terrestre, ou Tables des nouveaux poids, mesures et monnoies de France*, Guilbert et Herment, Rouen, an V (1797).
- Tournès Dominique, « Des instruments oubliés : les tables métrologiques du XVIIIe siècle », in Barbin Évelyne, Bénard Dominique, Moussard Guillaume (éds.), *Les Mathématiques et le réel. Expériences, instruments, investigations*, p. 157-172, Presses universitaires de Rennes, 2018.
- Tournès Dominique, «Calculer avec des hyperboles et des paraboles », in Barbin Évelyne (éd.), *Des Mathématiques éclairées par l'histoire. Des arpenteurs aux ingénieurs*, p. 131-148, Vuibert, Paris, 2012.

CHAPITRE 7

- Gilbert Arsac, Mante Michel, *Les Pratiques du problème ouvert*, Sceren-CRDP, académie de Lyon, France, 2007.
- Bonafé Freddy, Chevalier Arlette, Combes Marie-Claire, Deville Alain, Dray Liliane, Robert Jean-Pierre, Sauter Mireille, « Les narrations de recherche, de l'école primaire au lycée », Irem et Apmep, Montpellier, 2002.
- Brousseau Guy, *Théorie des situations didactiques*, Éditions La pensée sauvage, Grenoble, 1998.
- Douady Régine, « Jeux de cadres et dialectique outil-objet », *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), p. 5-31, 1986.
- Gardes Marie-Line, « Démarches d'investigation et recherche de problèmes », in Aldon Gilles, *Le Rallye mathématique, un jeu très sérieux !*, p. 73-96, Canopé Éditions, 2018.
- Grenier Denise, Bacher Roland, Barbe Hervé, Beffara Emmanuel, Bicaïs Yvan, Charlot Grégoire, Decauwert Monique, Deraux Martin, Gezer Tarkan, Meilhan Jean-Baptiste, Mouton Frédéric, *Situations de recherche pour la classe, pour le collège et le lycée… et au-delà*, Irem de Grenoble, 2017.
➔ https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/recherche-action/themes/raisonnement-logique-situations-de-recherche-pour-la-classe/situations-de-recherche-pour-la-classe-498450.kjsp?RH=413148517470877
- Gros Hippolyte, Thibaut Jean-Pierre, Sander Emmanuel, "What We Count Dictates How We Count: A Tale of Two Encodings", *Cognition* (online first), 2021.
➔ https://doi.org/10.1016/j.cognition.2021.104665
- Groupe Resco, « La résolution collaborative de problèmes comme modalité de la démarche d'investigation », *Repères Irem*, 96, p. 73-96, 2014.
➔ https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/WR/IWR14015/IWR14015.pdf

- Novick Laura R., "Analogical Transfer, Problem Similarity, and Expertise", *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 14(3), 510, 1988.
- Reed Stephen K., "A Structure Mapping Model for Word Problems", *Journal of Experimental Psychology: Learning Memory and Cognition*, 13, p. 124-139, 1987.
- Richard Jean-François, Sander Emmanuel, « Activités d'interprétation et de recherche de solution dans la résolution de problèmes », in Foulin Jean-Noël, Ponce Corinne (éds.), *Les Apprentissages scolaires fondamentaux*, p. 91-102, éditions du CRDP, Bordeaux, 2000.
- Richland Lindsey E., McDonough Ian M., "Learning by Analogy: Discriminating between Potential Analogs", *Contemporary Educational Psychology*, 35, p. 28-43, 2010.
- Rittle-Johnson Bethany, Star Jon R., "Does Comparing Solution Methods Facilitate Conceptual and Procedural Knowledge? An Experimental Study on Learning to Solve Equations", *Journal of Educational Psychology,* 99(3), p. 561-574, 2007.
- Rittle-Johnson Bethany, Star Jon R., "The Power of Comparison in Learning and Instruction: Learning Outcomes Supported by Different Types of Comparisons", in *Psychology of Learning and Motivation*, vol. 55, p. 199-225, Academic Press, 2011.
- Vandebrouck Fabrice, Baroux-Raymond Dominique, Bonal Géraldine, Derouet Charlotte, Dos Santos Ruis, Hérault Françoise, Prouteau Cécile, Temam Gaëlle, *Autour des problèmes ouverts en classe de mathématiques*, Irem de Paris, 2015.
  → https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/PS/IPS15002/IPS15002.pdf
- Vendetti Michael, Matlen Bryan J., Engle Richland Lindsey, Bunge Silvia, "Analogical Reasoning in the Classroom: Insights from Cognitive Science", *Mind, Brain, and Education*, 9(2), p. 100-106, 2015.

Conception graphique et suivi éditorial
Délégation à la communication

Exécution graphique
Opixido

Impression
MENJS

IMPRIM'VERT®

Décembre 2021

ISBN 978-2-11-162849-6
ISSN 2647-4786

% [AB] α^2 x

Savoirs & compétences

RESSOURCES PÉDAGOGIQUES

L'ÉCOLE DE LA CONFIANCE