MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE LA JEUNESSE ET DES SPORTS
Liberté Égalité Fraternité

ACADÉMIE DE NANTES
Liberté Égalité Fraternité

OLYMPIADES NATIONALES DE MATHEMATIQUES 2023

Métropole-La Réunion-Mayotte-Europe-Afrique-Orient-Inde

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc séparés, distribués puis ramassés à des moments différents.
Une des deux parties de l'épreuve est constituée des exercices nationaux, l'autre des exercices académiques.
À l'issue de la première partie, les copies et les énoncés sont ramassés et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie à l'issue de laquelle les copies et les énoncés sont également ramassés.

Déroulement de l'épreuve constituée des exercices académiques (2h)

- Les candidats de la voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices académiques 1 et 2.

- Tous les autres candidats (ceux de la voie générale n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité mathématiques, et ceux de la voie technologique) doivent traiter les exercices académiques 1 et 3.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition. Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des recherches qu'ils ont pu entreprendre.

Lorsque le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie en expliquant les initiatives qu'il a été amené à prendre et poursuit sa composition.

L'usage de la calculatrice **avec le mode examen activé** est autorisé.
L'usage de la calculatrice **sans mémoire**, « type collège », est autorisé.

Exercices académiques

Mercredi 15 mars 2023 (10 h 10 – 12 h 10)

Exercice 1 (à traiter par tous les candidats)

Séries choisies

Dans cet exercice, on précise que pour une série statistique de 24 données rangées dans l'ordre croissant :

- le **premier quartile** Q_1 est la sixième donnée de la série ;
- le **troisième quartile** Q_3 est la dix-huitième donnée de la série ;
- la **médiane** Me est la moyenne de la douzième et de la treizième données de la série.

Dans cet exercice, on appelle **série choisie** une série statistique de 24 nombres vérifiant les conditions suivantes :

- son tableau des effectifs est de la forme suivante :

Valeurs	-1	0	1	3	5
Effectifs	a	b	c	d	e

  de sorte que $a + b + c + d + e = 24$ avec a, b, c, d et e nombres entiers naturels.
- aucun des effectifs n'est égal à 0 ;
- $Q_1 = 0$ et $Q_3 = 3$.

Dans cet exercice, on convient de représenter une série choisie par la liste $[a, b, c, d, e]$ de ses effectifs avec a, b, c, d et e nombres entiers naturels non nuls.

1. Montrer que la série représentée par $[3,9,5,2,5]$ est une série choisie. Calculer la médiane Me de cette série.
2. Dans cette question, on considère la série choisie représentée par $[3,8,c,d,e]$. Quelles sont les valeurs possibles de la médiane ?
3. Dans cette question, on considère la série choisie représentée par $[a,a,a,d,d]$.
   a. Montrer que a est pair.
   b. Prouver que $3 \leq a$ puis que $a \leq 5$.
   c. En déduire les valeurs de a et d.
   d. Quelle est la médiane Me de cette série ?
4. Indiquer, en le justifiant, les valeurs possibles pour la médiane d'une série choisie quelconque.

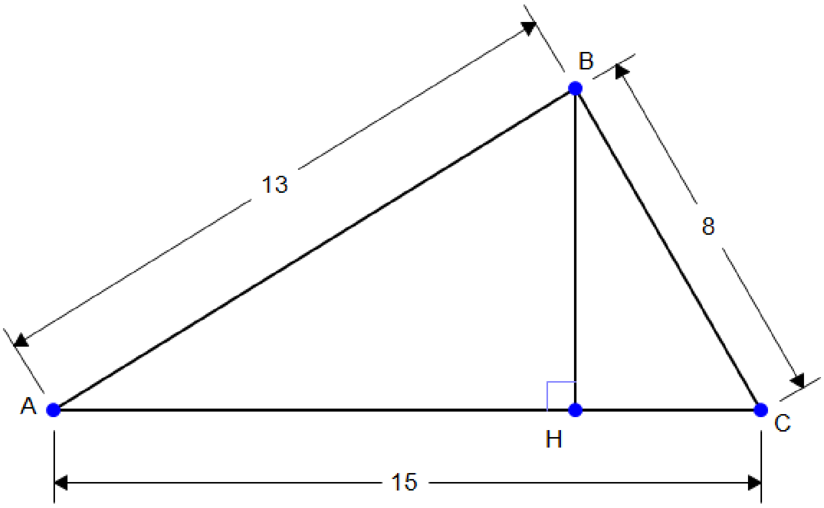
Dans la suite de l'exercice, on s'intéresse aux séries choisies dont la médiane est 2. On désigne par $\bar{x}$ la moyenne d'une telle série choisie.

5. Parmi les séries choisies de médiane 2, montrer que la série représentée par $[5,6,1,11,1]$ est celle dont la moyenne est minimale.
6.
   a. Déterminer la série choisie de médiane 2 dont la moyenne est maximale.
   b. Donner la valeur exacte de cette moyenne maximale sous la forme $\bar{x} = 2 + \frac{n}{24}$, où n est un entier que l'on déterminera.
7.
   a. Proposer un exemple de série choisie de médiane 2 et de moyenne 2.
   b. Déterminer toutes les séries choisies vérifiant $Me = \bar{x} = 2$.
8. Déterminer l'unique série choisie telle que $Me = \bar{x} = \sigma = 2$, où σ désigne l'écart-type de la série.

Exercice 2 (à traiter par les candidats suivant l'enseignement de spécialité de la voie générale)

Les triplets d'Eisenstein

1. On considère un triangle ABC tel que $AB = 13$, $AC = 15$ et $BC = 8$. Le point H est le pied de la hauteur issue de B, c'est-à-dire que les droites (HB) et (AC) sont perpendiculaires.
On pose $CH = x$.



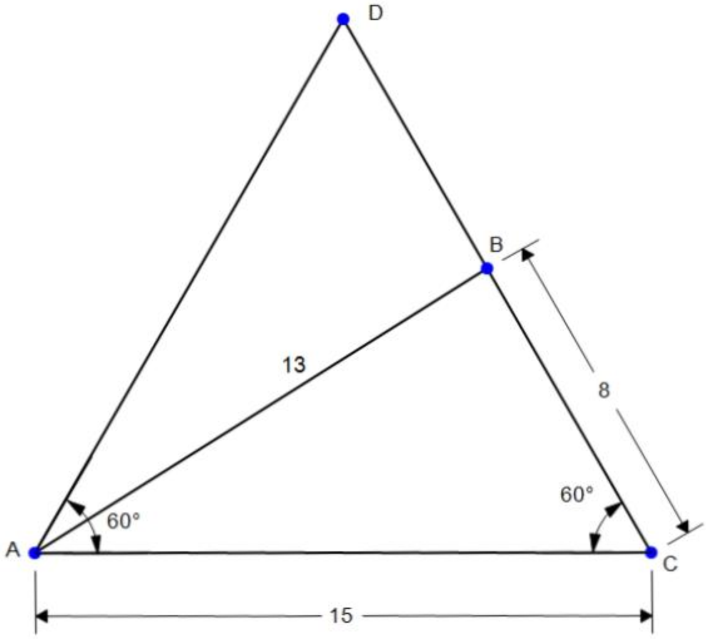
Prouver que : $13^2 - (15 - x)^2 = 8^2 - x^2$.

En déduire la valeur de x puis la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{ACB}$.

Le triplet $(8,15,13)$ est appelé un **triplet d'Eisenstein**.

Un triplet d'Eisenstein est un triplet (a, b, c) de trois nombres entiers naturels non nuls tels que : $a < c < b$ et le triangle de côtés de longueur a, b et c possède un angle de $60°$.

2. En considérant la figure ci-dessous, montrer que le triplet $(7,15,13)$ est un triplet d'Eisenstein.



3. En reprenant la démarche des questions **1.** et **2.**, montrer que les triplets $(5,8,7)$ et $(3,8,7)$ sont deux triplets d'Eisenstein.

4. On considère un triangle de côtés de longueur a, b et c tels que (a, b, c) soit un triplet d'Eisenstein. Démontrer que :

$$c^2 = a^2 - ab + b^2 \qquad (1)$$

On admet la réciproque suivante : si le triplet d'entiers naturels non nuls (a, b, c) est tel que $a < c < b$ et vérifie la relation (1), alors ce triplet est un triplet d'Eisenstein.

5. À partir de la relation (1), montrer que si le triplet (a, b, c) est un triplet d'Eisenstein, alors le triplet $(b - a, b, c)$ est un triplet d'Eisenstein.

6. Démontrer que si le triplet (a, b, c) est un triplet d'Eisenstein, alors le triplet $(2a, 2b, 2c)$ est aussi un triplet d'Eisenstein.
En déduire qu'il existe une infinité de triplets d'Eisenstein.

Dans la suite du problème, on recherche des triplets d'Eisenstein dont l'une des composantes a, b ou c est égale à 2023.

7. Décomposer 2023 en produit de facteurs premiers.

8. En déduire un triplet d'Eisenstein (a, b, c) tel que $a = 2023$ puis un triplet d'Eisenstein (a, b, c) tel que $c = 2023$.

On admet **dans la suite du problème** que :
les triplets de la forme $(3n^2 + 2mn, 3n^2 + 4mn + m^2, 3n^2 + 3mn + m^2)$ où m et n sont deux entiers naturels non nuls, sont des triplets d'Eisenstein.

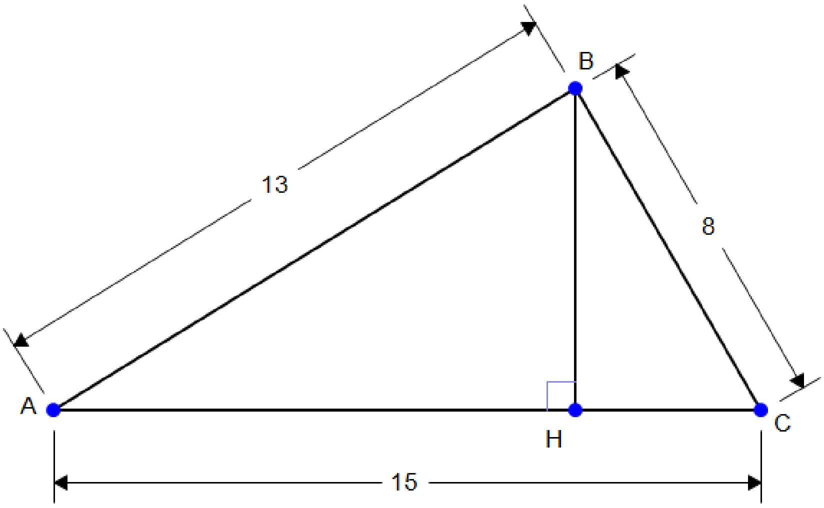
9. Déterminer deux entiers naturels m et n tels que $(m + 2n)^2 - n^2 = 119$.

10. En déduire deux triplets d'Eisenstein (a, b, c) tels que $b = 2023$.

Exercice 3 (candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité de la voie générale)

Les triplets d'Eisenstein

1. On considère un triangle ABC tel que $AB = 13$, $AC = 15$ et $BC = 8$. Le point H est le pied de la hauteur issue de B, c'est-à-dire que les droites (HB) et (AC) sont perpendiculaires.
On pose $CH = x$.



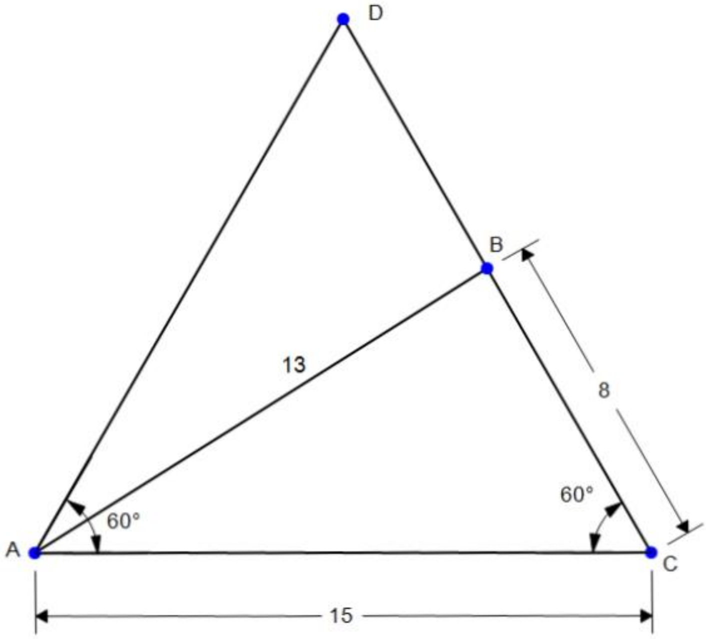
Prouver que : $13^2 - (15 - x)^2 = 8^2 - x^2$.

En déduire la valeur de x puis la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{ACB}$.

Le triplet $(8,15,13)$ est appelé un **triplet d'Eisenstein**.

> **Un triplet d'Eisenstein** est un triplet (a, b, c) de trois nombres entiers naturels non nuls tels que : $a < c < b$ et le triangle de côtés de longueur a, b et c possède un angle de $60°$.

2. En considérant la figure ci-dessous, montrer que le triplet $(7,15,13)$ est un triplet d'Eisenstein.



3. En reprenant la démarche des questions **1.** et **2.**, montrer que les triplets $(5,8,7)$ et $(3,8,7)$ sont deux triplets d'Eisenstein.

4. On considère un triangle de côtés de longueur a, b et c tels que (a, b, c) soit un triplet d'Eisenstein. Démontrer que :

$$c^2 = a^2 - ab + b^2 \qquad (1)$$

On admet la réciproque suivante : si le triplet d'entiers naturels non nuls (a, b, c) est tel que $a < c < b$ et vérifie la relation (1), alors ce triplet est un triplet d'Eisenstein.

5. À partir de la relation (1), montrer que si le triplet (a, b, c) est un triplet d'Eisenstein, alors le triplet $(b - a, b, c)$ est un triplet d'Eisenstein.

6. Démontrer que si le triplet (a, b, c) est un triplet d'Eisenstein, alors le triplet $(2a, 2b, 2c)$ est aussi un triplet d'Eisenstein.
   En déduire qu'il existe une infinité de triplets d'Eisenstein.

Dans la suite du problème, on recherche des triplets d'Eisenstein dont l'une des composantes a, b ou c est égale à 2023.

7. Décomposer 2023 en produit de facteurs premiers.

8. En déduire un triplet d'Eisenstein (a, b, c) tel que $a = 2023$ puis un triplet d'Eisenstein (a, b, c) tel que $c = 2023$.

9. Déterminer la valeur de l'entier a pour laquelle $(a, 119,109)$ est un triplet d'Eisenstein, en détaillant la démarche suivie.

10. En déduire un triplet d'Eisenstein (a, b, c) avec $b = 2023$.