



OLYMPIADES NATIONALES DE MATHÉMATIQUES 2025

Métropole-La Réunion-Mayotte-Europe-Afrique-Orient

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc séparés, distribués puis ramassés à des moments différents.

Une des deux parties de l'épreuve est constituée des exercices nationaux, l'autre des exercices académiques.

À l'issue de la première partie, les copies et les énoncés sont ramassés et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie à l'issue de laquelle les copies et les énoncés sont également ramassés.

Déroulement de l'épreuve constituée des exercices académiques (2h) :

- Les **candidats de la voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité** de mathématiques doivent traiter les exercices académiques 1 et 2.
- Tous les **autres candidats** (ceux de la voie générale n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité mathématiques, et ceux de la voie technologique) doivent traiter les exercices académiques 1 et 3.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition. Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des recherches qu'ils ont pu entreprendre.

Lorsque le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie en expliquant les initiatives qu'il a été amené à prendre et poursuit sa composition.

L'usage de la calculatrice **avec le mode examen activé** est autorisé.

L'usage de la calculatrice **sans mémoire**, « type collègue », est autorisé.

Exercices académiques

L'énoncé comporte 8 pages

Mercredi 19 mars 2025 (10 h 10 – 12 h 10)



Exercice 1 (à traiter par tous les candidats)

Ramasse tes billes

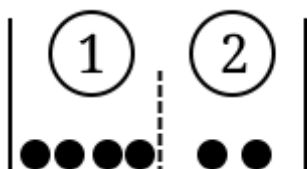
Soient b et c deux entiers naturels non nuls.

On dispose de b billes identiques, ainsi que d'une boîte de rangement comportant c compartiments numérotés de 1 à c . Dans ce problème, on s'intéresse à la façon de ranger toutes ces billes dans les compartiments.

Première partie : Une modélisation

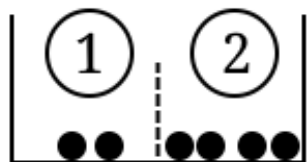
Dans cette partie, on modélise une façon de ranger les billes par la liste ordonnée (dans l'ordre de numérotation des compartiments) des effectifs de billes de chaque compartiment. Une telle liste est appelée **rangement**. Voici quelques exemples :

Illustrations :

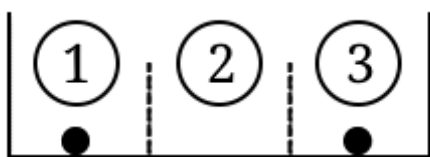


Rangements :

$(4; 2)$ est un rangement de six billes ($b = 6$) dans deux compartiments ($c = 2$).



$(2; 4)$ est un autre rangement de six billes ($b = 6$) dans deux compartiments ($c = 2$).



$(1; 0; 1)$ est un rangement de deux billes ($b = 2$) dans trois compartiments ($c = 3$).

Enfin, on note $R(b; c)$ le nombre de rangements possibles de b billes dans c compartiments.

- 1) Commençons par étudier quelques cas particuliers :
 - a) Dans cette question, on prend $b = 2$ et $c = 3$. Donner et illustrer tous les rangements possibles et en déduire $R(2; 3)$.
 - b) Dans cette question, on prend $b = c = 3$. Sans justifier, donner la valeur de $R(3; 3)$.
 - c) Que valent $R(1; c)$ et $R(b; 1)$? Justifier.
 - d) Montrer que $R(b; 2) = b + 1$.
- 2) Existe-t-il une valeur de b pour laquelle $R(b; 2025) < 2025$?

3) Dans cette question, on suppose que $c \geq 2$.

a) Justifier l'égalité suivante :

$$R(b; c) = 1 + \sum_{i=1}^b R(i; c - 1)$$

Autrement écrite :

$$R(b; c) = 1 + R(1; c - 1) + R(2; c - 1) + R(3; c - 1) + \dots + R(b; c - 1)$$

b) Recopier et compléter le tableau à double-entrée ci-dessous avec les valeurs de $R(b; c)$.

	$c = 1$	$c = 2$	$c = 3$	$c = 4$	$c = 5$
$b = 1$	...	2	...	...	...
$b = 2$	...	3	...	...	...
$b = 3$	...	4	...	...	...
$b = 4$	...	5	...	...	...
$b = 5$	...	6	...	...	...

c) En observant le tableau de valeurs, compléter la conjecture suivante :

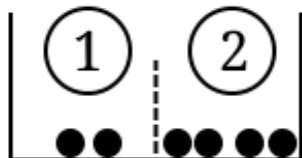
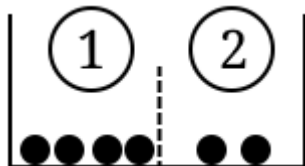
$$R(b; c) + R(b + 1; c - 1) = \dots$$

Démontrer cette conjecture.

Deuxième partie : une autre modélisation

Dans cette partie, un rangement est désormais codé par un **mot** formé des lettres B (pour bille) et P (pour paroi), comme illustré ci-dessous.

Illustrations :

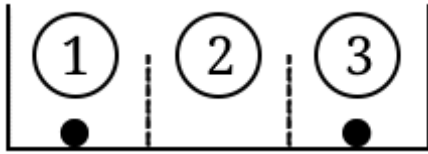


Rangements :

Le rangement de six billes ($b = 6$) dans deux compartiments ($c = 2$) ci-contre est codé par le mot **BBBPBB**.

Un autre rangement de six billes ($b = 6$) dans deux compartiments ($c = 2$) ci-contre est codé par **BBPBBBBB**.

Illustrations :



Rangements :

Un rangement de deux billes ($b = 2$) dans trois compartiments ($c = 3$) ci-contre est codé par $BPPB$.

De la même façon que dans la partie 1, $R(b; c)$ désigne le nombre de rangements de b billes dans c compartiments.

- 4) Dans cette question, on prend $b = 2$ et $c = 3$. Écrire tous les mots codant les rangements possibles et retrouver la valeur de $R(2; 3)$ établie dans la partie 1.
- 5) Dans cette question, on prend $b = 2$ et $c = 2025$. En considérant la façon de placer deux lettres B dans un mot, montrer que $R(2; 2025) = 2\,051\,325$.
- 6) Le **dual** d'un mot est le mot obtenu en remplaçant B par P et inversement. Par exemple, le dual de $BBPBBB$ et $PPBPPP$.

Quels nombres de billes et de compartiments le dual d'un rangement de $b = 2024$ billes dans $c = 3$ compartiments comporte-t-il ? En déduire $R(2024; 3)$.

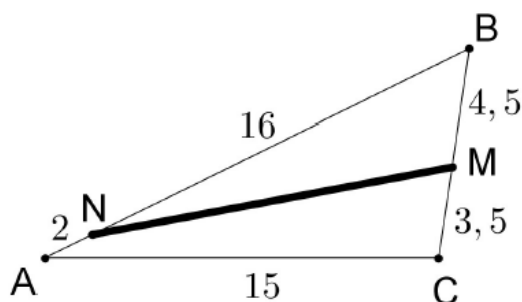
Exercice 2 (à traiter par les candidats suivant l'enseignement de spécialité de la voie générale)

Coupure parfaite d'un triangle

Une unité de longueur arbitraire a été choisie.

Dire qu'un segment est une **coupure parfaite** d'un triangle signifie qu'il vérifie à la fois les deux conditions suivantes :

- les extrémités de ce segment appartiennent à des côtés du triangle (ce sont éventuellement des sommets du triangle);
- ce segment partage le triangle en deux polygones de même aire et même périmètre.



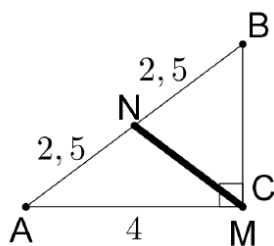
Par exemple, sur la figure ci-contre, le segment [MN] est une coupure parfaite du triangle ABC puisque l'on peut montrer que le triangle MBN et le quadrilatère ANMC ont à la fois la même aire et le même périmètre.

Le but du problème est d'établir que tout triangle possède au moins une coupure parfaite.

Première partie : questions préliminaires

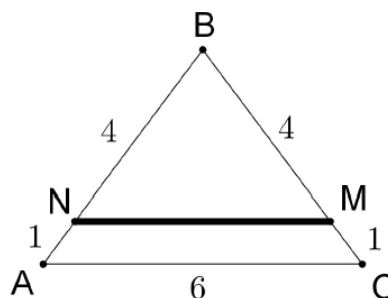
- 1) Dans chacun des cas suivants, déterminer si le segment [MN] est une coupure parfaite du triangle ABC .

a)



Les points M et C sont confondus

b)



- 2) Montrer que si un triangle est isocèle, alors il existe au moins une coupure parfaite de ce triangle.

Dans la suite du problème, on considère un triangle ABC. On note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$. Soient M et N deux points appartenant respectivement aux segments $[CB]$ et $[BA]$; on note : $m = BM$ et $n = BN$.

Deuxième partie : un triangle particulier

Pour les questions 3) à 6), on prend $a = 8$, $b = 15$ et $c = 17$.

- 3) Quelle est la nature du triangle ABC ?
- 4) Exprimer l'aire du triangle MBN en fonction de m et n .
- 5) Montrer que si $[MN]$ est une coupure parfaite du triangle ABC alors :

$$mn = 68 \text{ et } m + n = 20.$$

- 6) En déduire le(s) couple(s) $(m; n)$ tel(s) que le segment $[MN]$ soit une coupure parfaite du triangle ABC.

Pour la question 7), on prend $a = 15$, $b = 8$ et $c = 17$.

- 7) Existe-t-il des couples $(m; n)$ tels que $[MN]$ soit une coupure parfaite du triangle ABC ?

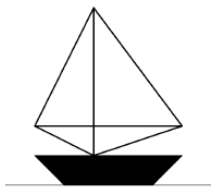
Troisième partie : cas général

Dans cette partie, on suppose que le triangle ABC est tel que : $0 < a < b < c$.

- 8) Exprimer l'aire du triangle ABC en fonction de a , de c et du sinus de l'angle $\widehat{ABC}$.
- 9) Montrer que si $[MN]$ est une coupure parfaite du triangle ABC, alors m et n sont solutions de l'équation $2x^2 - (a + b + c)x + ac = 0$.
- 10) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - (a + b + c)x + ac$.
Déterminer le signe de chacune des trois images $f(0)$, $f(a)$ et $f(c)$.
- 11) En déduire que le triangle ABC admet au moins une coupure parfaite.

Exercice 3 (à traiter par les candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité de la voie générale)

Dans le vent



Une unité de longueur arbitraire a été choisie. On appelle voile tout quadrilatère non croisé dont les **diagonales sont perpendiculaires** et de longueur 1. On appelle centre d'une voile le point d'intersection de ses diagonales.

Première partie : questions introductives

- 1) Que peut-on dire d'une voile dont le centre est le milieu des diagonales ?
Déterminer l'aire et le périmètre d'une telle voile.
- 2) Montrer que toutes les voiles ont la même aire.

Deuxième partie : optimisation de la somme des carrés des longueurs des côtés

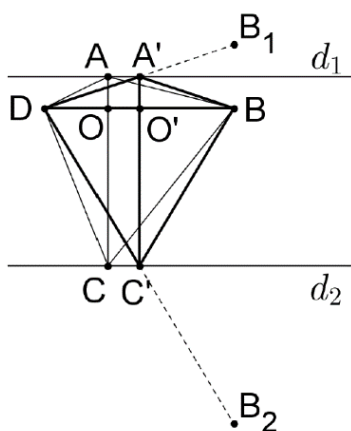
Dans cette partie, on considère une voile $ABCD$ de centre O et on note S la somme des carrés des longueurs de ses côtés : $S = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$. On note $x = OA$ et $y = OB$.

- 3) Déterminer une expression de S en fonction de x et y , puis vérifier que :

$$S = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + 2.$$

- 4) En déduire la valeur minimale de S . Quelles sont les voiles pour lesquelles cette valeur minimale est atteinte ?

Troisième partie : optimisation du périmètre



Dans cette partie, on considère une voile $ABCD$ de centre O , dont on note P le périmètre. On note d_1 et d_2 les droites parallèles à la droite (DB) passant respectivement par les points A et C .

On note B_1 le symétrique du point B par rapport à la droite d_1 et B_2 le symétrique du point B par rapport à la droite d_2 .

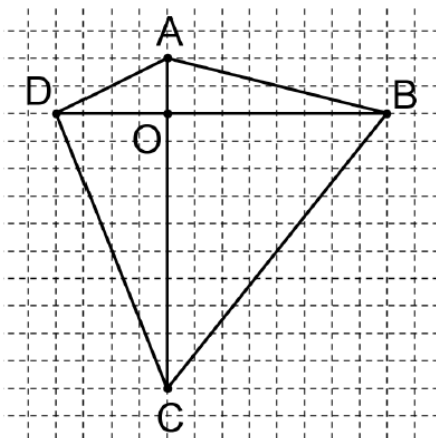
Enfin, on note A' le point d'intersection des droites (DB_1) et d_1 , C' le point d'intersection des droites (DB_2) et d_2 et O' le point d'intersection des droites $(A'C')$ et (DB) .

- 5) Montrer que $DA + AB \geq DA' + A'B$ et en déduire que P est supérieur ou égal au périmètre du quadrilatère $A'BC'D$.
- 6) Montrer que le quadrilatère $A'BC'D$ est une voile. Justifier que son centre O' est le milieu du segment $[DB]$.
- 7) Montrer que $\frac{O'A'}{O'C'} = \frac{OA}{OC}$.

Le quadrilatère $A'BC'D$ est appelé le **quadrilatère rectifié de ABCD parallèlement à la diagonale (DB)**.

On considère maintenant le quadrilatère $A'B'C'D'$ rectifié de $A'BC'D$ parallèlement à la diagonale $(A'C')$, c'est-à-dire le quadrilatère obtenu selon le procédé décrit précédemment, mais appliqué à $A'BC'D$ et en considérant des parallèles à $(A'C')$.

- 8) Reproduire la figure ci-dessous et construire le quadrilatère $A'B'C'D'$.



- 9) Quelle est la nature du quadrilatère $A'B'C'D'$? Justifier.
- 10) Déterminer la valeur minimale de P .