Exercice 4 ensembles bi-connexes

Éléments de correction.

1) En ajoutant l'entier 5 ou l'entier 7, l'ensemble B est bi-connexe.

2) Le plus petit ensemble bi-connexe contenant tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à 13 est : {2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 7 ; 11 ; 12 ; 13}.

3) L'ensemble {1 ; 2 ; ... ; 10} ne reste pas bi-connexe en enlevant 2 ou 9.

Dans tous les autres cas, l'ensemble reste bi-connexe : Probabilité vaut $\frac{8}{10} = \frac{4}{5} = 0{,}8$.

4) Pour obtenir un sous-ensemble bi-connexe à 3 éléments, les trois entiers doivent être consécutifs :

{1 ; 2 ; 3} ; {2 ; 3 ; 4} ; …. ; {2012 ; 2013 ; 2014}.

On a donc : 2012 sous-ensembles bi-connexes à 3 éléments dans {1 ; 2 ; ... ; 2014}.

5) a) Les sous-ensembles bi-connexes à 4 éléments dans {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6} :

{1 ; 2 ; 3 ; 4} ; {1 ; 2 ; 4 ; 5} ; {1 ; 2 ; 5 ; 6}

{2 ; 3 ; 4 ; 5} ; {2 ; 3 ; 5 ; 6}

{3 ; 4 ; 5 ; 6} .

b) Pour former les sous-ensembles bi-connexes à 4 éléments dans $\{1 ; 2 ; ... ; n\}$, on peut : former tous les sous-ensembles de la forme par $\{1 ; 2 ; k-1 ; k\}$ avec $4 \leqslant k \leqslant n$, soit : $n-3$ sous-ensembles commençant par {1 ; 2 ; ….}

puis tous les sous-ensembles de la forme par $\{2 ; 3 ; k-1 ; k\}$ avec $5 \leqslant k \leqslant n$,soit : $n-4$ sous-ensembles commençant par {2 ; 3 ; ….}

jusqu'à $\{n-3; n-2 ; n-1 ; n\}$.

On a donc : $1 + 2 + \ldots + (n-3) = \sum_{i=1}^{i=n-3} i = \frac{(n-2)(n-3)}{2}$

c) $\frac{(n-2)(n-3)}{2} \geqslant 2014$ si et seulement si $n^2 - 5n - 4022 \geqslant 0$

$n \geqslant 66$.

6) a) Soit {1 ; 2 ; 3 ; 4}.

On peut former les sous-ensembles bi-connexes :

{1 ; 2} ; {2 ; 3} ; {3 ; 4} ; {1 ; 2 ; 3} ; {2 ; 3 ; 4} ; {1 ; 2 ; 3 ; 4}.

On a bien 6 sous-ensembles bi-connexes dans {1 ; 2 ; 3 ; 4}. Soit : $u_4 = 6$.

b) À la première boucle, on a : $u_5 = 2\times6 - 3 + 1 + 1 = 11$

à la deuxième boucle, on a : $u_6 = 2\times11 - 6 + 3 + 1 = 20$

$u_7 = 2\times20 - 11 + 6 + 1 = 36$

$u_8 = 2\times36 - 20 + 11 + 1 = 64$

$u_9 = 113$

$u_{10} = 199$

$u_{11} = 350$

$u_{12} = 615$

$u_{13} = 1080$

$u_{14} = 1896$

L'algorithme affiche 1 896 = u_{14} qui représente le nombre de sous-ensembles bi-connexes de {1 ; 2 ; ... ; 14}.

c) On modifie la ligne 4 en faisant :

Tant que $u \leqslant 2014$ faire

et la ligne 9 : FinTantQue

et on ajoute un compteur dans la boucle

on affiche le compteur pour afficher n_0.

$n_0 = 15$

Traitement :	a prend la valeur 1
	b prend la valeur 3
	c prend la valeur 6
	k prend la valeur 4
	Tant que $u \leqslant 2014$ faire
	u prend la valeur $2c - b + a + 1$
	a prend la valeur b
	b prend la valeur c
	c prend la valeur u
	k prend la valeur $k + 1$
	FinTantQue.
Sortie :	Afficher u, afficher k.