Corrigé exercice 3 : Nombres quadripartites (version pour les séries S)

1) Vérifier que le nombre 500 est un nombre quadripartite d'opérateur 4 et d'éléments $a = 76$, $b = 84$, $c = 20$ et $d = 320$.

$76 + 84 + 20 + 320 = 500$ et $76 + 4 = 84 - 4 = 20\times4 = \dfrac{320}{4} = 80$.

2) 288 quadripartite d'opérateur 2 :

$a = 62$, $b = 66$, $c = 32$, $d = 128$.

On a bien : $62 + 66 + 32 + 128 = 288$ et $a + 2 = b - 2 = c\times2 = \dfrac{d}{2} = 64$.

288 quadripartite d'opérateur 3 :

$a = 51$, $b = 57$, $c = 18$, $d = 162$.

On a bien : $51 + 57 + 18 + 162 = 288$ et $a + 3 = b - 3 = c\times3 = \dfrac{d}{3} = 54$.

3) a) m et c sont deux entiers non nuls et $A = c(m + 1)^2$.
On pose $a = cm - m$, $b = cm + m$ et $d = cm^2$
d'où, $a + m = b - m = \text{c}m = \dfrac{d}{m}$
et $a + b + c + d = (cm - m) + (cm + m) + c + m^2c = (m + 1)^2c = A$.
A est donc un nombre quadripartite d'opérateur m
et d éléments $a = cm - m = m(c - 1) = m\left[\dfrac{A}{(m+1)^2}-1\right]$.
De même, on obtient : $b=m\left[\dfrac{A}{(m+1)^2}+1\right]$, $d=\left(\dfrac{m}{m+1}\right)^2 A$.
b) ***Réciproquement*** :
Soit A un nombre quadripartite d'opérateur m.
a, b, c, d sont des entiers tels que $a + m = b - m = \dfrac{d}{m} = cm$,
et $a + b + c + d = mc + m + mc - m + c + cm^2 = (m+1)^2c = A$.
On a donc $\dfrac{A}{(m+1)^2} = c$, d'où, $\dfrac{A}{(m+1)^2}$ est un entier.

4) a) D'après la question précédente, A doit être divisible par $(m + 1)^2$, d'où,
$A = 2\times19^2\times53^2$ est un nombre quadripartite d'opérateur18, d'opérateur 52 et d'opérateur $19\times53 - 1 = 1\,006$.
Si $m = 18$, $a = 101106$, $b = 101142$, $c = 5618$, $d = 1820232$.
Si $m = 52$, $a = 37492$, $b = 37596$, $c = 722$, $d = 1952288$.
Si $m = 1006$,$a = 1006$, $b = 3018$, $c = 2$, $d = 2024072$.
b) $2\,014 = 2\times19\times53$.
Ce nombre n'est pas un nombre quadripartite d'après la question 3 puisque, 2, 19 et 53 étant des nombres premiers, on ne peut pas trouver un entier m tel que $\dfrac{2014}{(m+1)^2}$ est un entier.

5) Si $m=13$ on a : $A=196c$.
Le plus petit multiple de 196 à 5 chiffres est 10192 et le plus grand 99960.
On en déduit les éléments et opérateurs correspondants :

$c_1=52$ puis $a_1=663$, $b_1=689$, $d_1=8788$ pour A_1=10192.
$c_2=510$ puis $a_2=6617$, $b_2=6643$, $d_2=86190$ pour A_2=99960.

6) Démontrer que 18 126 est quadripartite et qu'il n'a qu'un seul opérateur.
Donner alors les quatre éléments associés.
18 126 = 9×2014 = 9×(2×19×53).
S'il existe un opérateur m, $(m+1)^2$ doit diviser 18 126. Or m étant un naturel strictement positif, $(m+1)$ est strictement supérieur à 1.
Les entiers 2, 19 et 53 étant premiers, on a nécessairement , $(m+1)^2=9$, soit : $m+1=3$ i.e. $m=2$.
On a alors : a = 4026, b = 4030, c = 2 014, d = 8056.