

Nombres quadripartites, définition :

Soit A un entier positif non nul.

Le nombre A est dit quadripartite s'il existe 4 entiers positifs a, b, c, d et un entier positif non nul m tels que

- d'une part, le nombre A est égal à la somme des entiers a, b, c, d ;
- d'autre part, les quatre nombres suivants sont égaux : a augmenté de m , b diminué de m , c multiplié par m et d divisé par m .

Le nombre m est appelé opérateur du nombre quadripartite A .

Les quatre nombres a, b, c et d sont appelés éléments du nombre quadripartite A associés à l'opérateur m .

Exemple :

Le nombre $A = 8$ est un nombre quadripartite d'opérateur $m = 1$ et d'éléments associés $a = 1$, $b = 3$, $c = 2$ et $d = 2$.

En effet, on a :

- d'une part, $8 = a + b + c + d$;
- d'autre part, les nombres $a + 1$, $b - 1$, $c \times 1$, $\frac{d}{1}$ sont égaux.

Début du problème :

1. Vérifier que le nombre 500 est un nombre quadripartite d'opérateur $m = 4$ et d'éléments $a = 76$, $b = 84$, $c = 20$ et $d = 320$.
2. Vérifier que le nombre 288 est un nombre quadripartite d'opérateur 2 et d'opérateur 3.
3. a) Soit m et c deux entiers non nuls.
On pose $A = c(m + 1)^2$. Montrer que A est un nombre quadripartite en déterminant les autres éléments a, b et d en fonction de A et m .
b) Réciproquement, montrer que si A est un nombre quadripartite d'opérateur m alors $\frac{A}{(m+1)^2}$ est un entier.
4. a) Soit $A = 2 \times 19^2 \times 53^2$. Montrer que A est quadripartite et déterminer tous les opérateurs possibles m .
b) 2014 est-il un nombre quadripartite ?
5. Donner le plus petit nombre quadripartite à 5 chiffres, d'opérateur 13, ainsi que le plus grand nombre quadripartite à 5 chiffres, d'opérateur 13. Préciser les éléments a, b, c et d associés dans chacun des cas.
6. Démontrer que 18 126 est quadripartite et qu'il n'a qu'un seul opérateur. Donner alors les quatre éléments associés.