MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE

OLYMPIADES NATIONALES DE MATHEMATIQUES 2020

Métropole-Europe-Afrique-Orient-Inde

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents.

La première partie est constituée des exercices nationaux. À son issue, les copies sont ramassées et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie, constituée des exercices académiques.

L'usage de la calculatrice **avec le mode examen activé** est autorisé.

L'usage de la calculatrice **sans mémoire**, « type collège », est autorisé.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

La seconde partie de l'épreuve contient trois exercices.

Les candidats de voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices académiques 1 et 2.

Les autres candidats doivent traiter les exercices académiques 1 et 3.

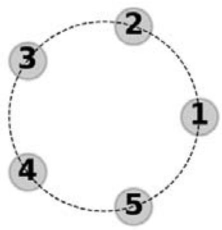
Exercices académiques

Mercredi 11 mars 2020 (10 h 10 – 12 h 10)

Exercice académique 1 (à traiter par tous les candidats)

Dernier à table

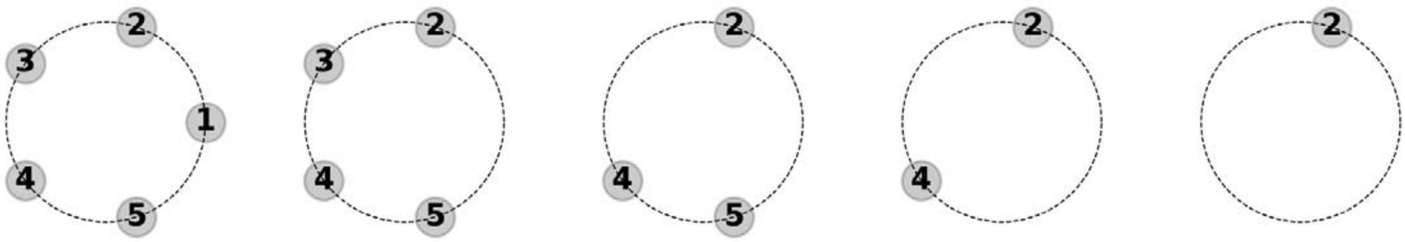
N est un nombre entier supérieur ou égal à 2.
N personnes prennent place en cercle autour d'une table ronde.
Elles sont numérotées de 1 à N dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, comme indiqué par la figure suivante pour $N = 5$:



La personne portant le numéro 1 se lève et s'en va. La personne immédiatement à sa droite reste assise. Puis la personne située à la droite de cette dernière se lève et s'en va. Ce procédé se répète jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'une seule personne à table.

Exemple avec $N = 5$:

On retirera successivement les personnes numéro 1, numéro 3 et numéro 5 au premier tour de table. On rencontre ensuite la personne numéro 2 qui reste, puis la personne numéro 4 est retirée. La dernière personne à table est donc la personne numéro 2.



1. Justifier que, pour $N = 6$, la quatrième personne retirée porte le numéro 2 et celle qui reste en dernier porte le numéro 4.

2. On note $f(N)$ le numéro de la dernière personne qui reste, lorsque N personnes étaient présentes au début. Ainsi $f(5) = 2$ et $f(6) = 4$. On montre de même que $f(16) = 16$.
Donner, sans justification, les valeurs de $f(N)$ pour N variant de 2 à 16.

3. Pour cette question $N = 1\ 024$.
   a. Justifier qu'à l'issue du premier tour de table la prochaine personne retirée porte le numéro 2.
   b. À l'issue du premier tour de table il reste donc 512 personnes.
   Justifier que $f(1\ 024) = 2\,f(512)$.
   c. Calculer $f(1\ 024)$.

4. Pour cette question $N = 63$.

a. Justifier qu'à l'issue du premier tour de table la prochaine personne retirée porte le numéro 4.

b. À l'issue du premier tour de table, il reste donc 31 personnes.
Justifier que $f(63) = 2\,(f(31) + 1)$.

c. Calculer $f(63)$.

5. Calculer $f(65)$.

6. Pour cette question on prend $N = 2\,020$.

a. Calculer $f(2\,020)$.

b. Une personne qui compte vite s'est positionnée pour être la dernière à rester, mais on décide de tourner dans l'autre sens, en commençant par le numéro 1.
Combien de personnes quitteront la table avant celle qui compte vite ?

7. Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 1.
Démontrer la formule $f(2^n + p) = 2\,p$, pour p nombre entier naturel inférieur à 2^n.

8. Déterminer les nombres entiers N inférieurs à $2\,020$ vérifiant $f(N) = 100$.

9. Déterminer tous les nombres entiers N tels que $f(N) = N$.

Excercice académique 2
(à traiter par les candidats de voie générale ayant choisi la spécialité mathématiques)

Chaîne-produit

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel tel que $n \geq 3$.
On place sur un cercle n nombres réels en les associant à des points de ce cercle.
Dans cet exercice, on appelle chaîne-produit toute liste de n nombres réels vérifiant les deux règles suivantes :

- Règle 1 : les nombres sont tous strictement positifs et différents deux à deux.
- Règle 2 : chaque nombre est égal au produit des deux nombres placés avant et après lui sur le cercle.

Un exemple :

$\left(3; 4; \frac{4}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right)$ est une chaîne-produit car elle est formée de six nombres strictement positifs, différents deux à deux et on a les six égalités :

$$3 = \frac{3}{4} \times 4\ ;\ 4 = 3 \times \frac{4}{3}\ ;\ \frac{4}{3} = 4 \times \frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \text{ et } \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \times 3.$$

La chaîne précédente pourra aussi être notée en choisissant un autre point de départ sur le cercle ou l'autre sens de parcours. Par exemple :

$$\left(4; \frac{4}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{3}{4}; 3\right) \text{ ou } \left(3; \frac{3}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{4}{3}; 4\right).$$

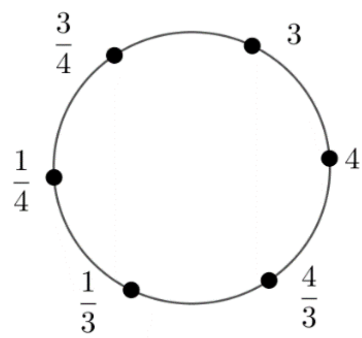


Figure 1

On dit qu'une chaîne-produit est de longueur n si elle contient n nombres avec les deux règles précédentes.
On obtient sa somme en additionnant les nombres qui la composent.
Ainsi, la chaîne de l'exemple a pour longueur 6 et pour somme $3 + 4 + \frac{4}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{29}{3}$.

A. Un autre exemple.

1. Compléter la liste $(2; 5; \dots)$ pour qu'elle soit une chaîne-produit puis donner sa longueur et sa somme.

2. Une chaîne-produit peut-elle contenir le nombre 1 ? Si oui, donner un exemple, sinon expliquer pourquoi.

B. Chaîne-produit contenant deux réels donnés.

On considère deux nombres réels a et b strictement positifs et on souhaite compléter la liste $(a; b; \dots)$ pour qu'elle soit une chaîne-produit.

3. Justifier que a est différent de 1 puis que b ne peut être égal à aucune des valeurs ci-dessous :

$$1\ ;\ a\ ;\ a^2\ ;\ \sqrt{a} \text{ ou } \frac{1}{a}.$$

4. Faire une figure et la compléter.

5. Donner la longueur puis la somme de la chaîne-produit $(a; b; \dots)$ ainsi complétée.

C. *Chaîne-produit contenant plusieurs nombres entiers et à somme entière.*

On dit qu'une chaîne-produit est entière si elle contient au moins deux nombres entiers et si sa somme est un nombre entier.

6. **a.** Montrer qu'il n'existe pas de chaîne-produit entière contenant plus de trois entiers.
b. Déterminer toutes les chaîne-produits à somme entière contenant trois nombres entiers.

7. Existe-t-il une chaîne-produit contenant le nombre 6 et de somme 23 ?

8. **a.** Montrer que si une chaîne-produit contient exactement deux entiers a et b alors ces entiers sont placés l'un à côté de l'autre sur le cercle.
b. Déterminer toutes les chaîne-produits à somme entière contenant exactement deux entiers inférieurs à 100. (On pourra répondre à cette question en produisant un algorithme).
c. Déterminer toutes les chaîne-produits qui contiennent le nombre 611 et dont la somme est un nombre entier.

D. *Chaîne-produit contenant deux réels x et $x+1$.*

Soit x un réel strictement positif et différent de 1.

9. On considère une chaîne-produit qui contient les deux réels x et $x+1$ placés l'un à côté de l'autre sur le cercle.
Montrer qu'alors la somme de la chaîne est strictement supérieure à 7.

10. Montrer qu'il existe une chaîne-produit contenant les deux réels x et $x+1$ ayant une somme inférieure à 6,5 et faire la figure correspondante.

Exercice académique 3
(à traiter par les candidats n'ayant pas suivi la spécialité de mathématiques de voie générale)

Rectangle mosaïque

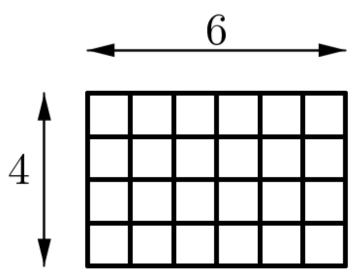
Une unité de longueur est choisie.
Étant donnés deux réels a et b avec $0 < a \leq b$, on note $R(a\,;b)$ le rectangle de largeur a et de longueur b.
Étant donné un réel strictement positif x, dire qu'un rectangle est une ***x*-mosaïque** signifie que les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- x est strictement inférieur à la largeur du rectangle ;
- on peut quadriller le rectangle à l'aide de carrés de côté x.

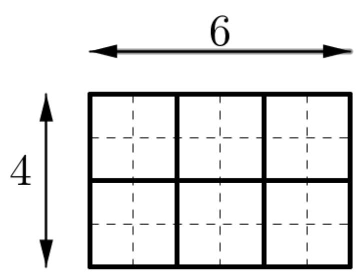
Les carrés de côtés x sont alors appelés ***x*-carreaux**.

Exemples :

$R(4\,;6)$ est une 1-mosaïque.
Le nombre de 1-carreaux est 24.

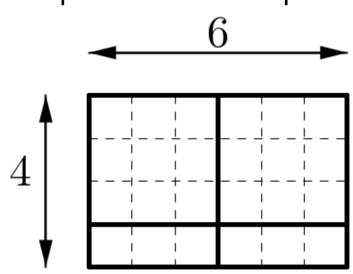


$R(4\,;6)$ est une 2-mosaïque.
Le nombre de 2-carreaux est 6.

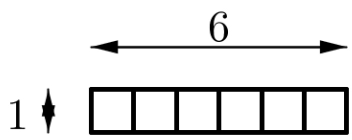


Contre-exemples :

$R(4\,;6)$ n'est pas une 3-mosaïque.



$R(1\,;6)$ n'est pas une 1-mosaïque puisque 1 est la largeur du rectangle.



Dire qu'un rectangle est une **mosaïque** signifie qu'il existe un réel strictement positif x tel que ce rectangle soit une x-mosaïque.

1. Montrer que $R(7\,;9)$ est une 0,5-mosaïque.

2. Justifier que $R(3\,;\ 4{,}6)$ est une mosaïque. Même question avec $R(\sqrt{45}\,;\sqrt{80}\,)$.

3. Montrer que tous les carrés sont des mosaïques.

Pour les questions de 4) à 8), a et b sont deux <u>entiers naturels</u> avec $0 < a \leq b$.

4. Dresser la liste des entiers naturels k non nuls pour lesquels $R(2\,020\,;2\,222)$ est une k-mosaïque.

5. Soit k, un entier naturel non nul, diviseur commun de a et b. $R(a\,;b)$ est-il toujours une k-mosaïque ?

6. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que $R(a\,;b)$ soit une 2-mosaïque.

7. Déterminer le nombre de couples $(a\,;b)$ tels que $R(a\,;b)$ soit une 2-mosaïque d'aire 2 020.

8. Déterminer le nombre de couples $(a\,;b)$ tels que $R(a\,;b)$ soit une 2-mosaïque de périmètre 2 020.

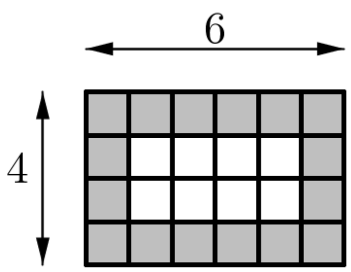
Dans la suite de l'exercice, a et b sont deux <u>nombres réels</u> avec $0 < a \leq b$.

9. Montrer que si $R(a\,;b)$ est une mosaïque, alors $\frac{b}{a}$ peut s'écrire sous la forme d'un quotient de deux entiers naturels non nuls. La réciproque est-elle vraie ?

10. Donner un couple $(a\,;b)$ tel que $R(a\,;b)$ ne soit pas une mosaïque.

Dans la suite, on considère un réel x strictement positif tel que $R(a\,;b)$ soit une x-mosaïque.
On note N le nombre total de x-carreaux et B le nombre de x-carreaux sur le contour du rectangle.
L'aire de $R(a\,;b)$ est notée A et son périmètre P.

<u>Dans l'exemple ci-dessous</u> :



Pour la 1-mosaïque $R(4\,;6)$, on obtient :
$N = 24$ et $B = 16$.

11. Prouver que dans le cas général, on a : $\frac{N}{(B+4)^2} = \frac{A}{P^2}$.

12. Montrer que : $\frac{ab}{4(a+b)^2} - \frac{1}{16} = \frac{-(a-b)^2}{16(a+b)^2}$.

13. En déduire l'inégalité $B \geq 4\left(\sqrt{N} - 1\right)$. Quels sont les cas d'égalité ?

14. On suppose qu'un rectangle est une mosaïque de périmètre $P = 2\,020$ avec $N = 1\,020\,100$ et $B = 4\,036$.
Quelles sont les dimensions a et b de ce rectangle ?