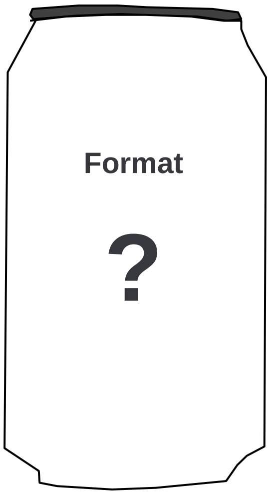
Damien RIVIERE– groupe de recherche de l'académie de Nantes ; TRAAM 2019-2020

Choix d'une canette.



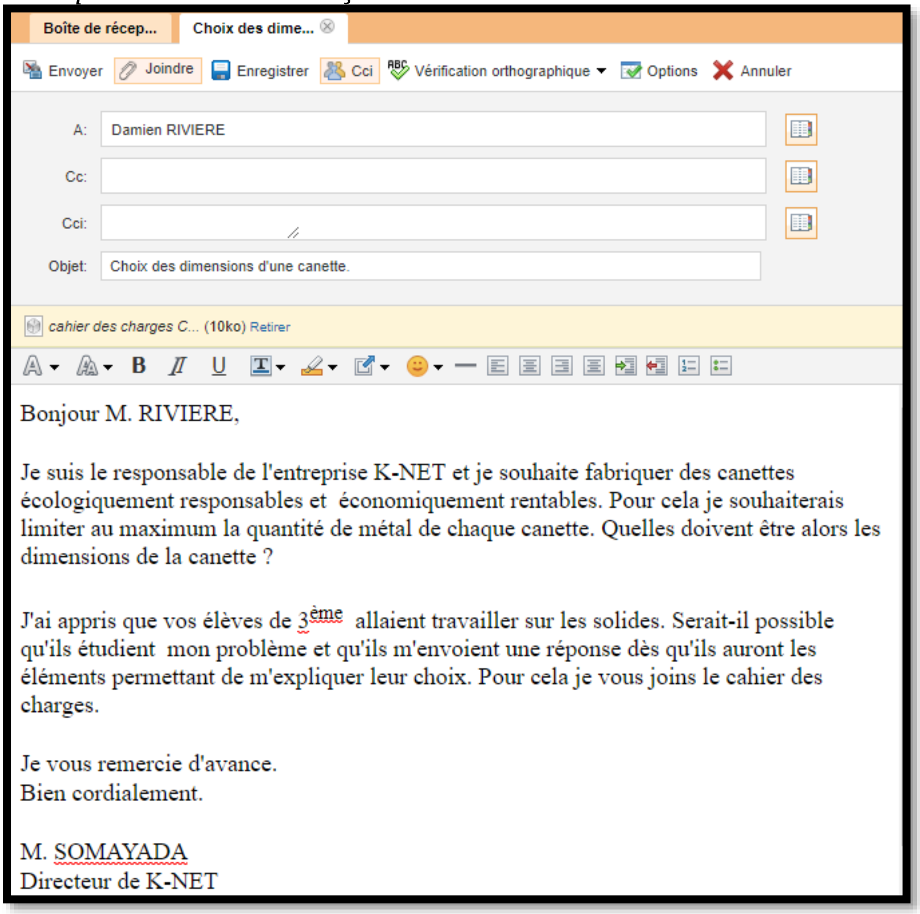
SOMMAIRES

CONTEXTE

Classe concernée : classe de 3ème.
Durée de la séance : 2h avec des ordinateurs à disposition.
Matériel : Il y a dans la classe, à disposition des élèves, des canettes de différents formats, qu'ils peuvent manipuler autant qu'ils veulent.

ENONCE

Voici le mail que M. RIVIERE a reçu :


Boîte de récep... Choix des dime...
Envoyer Joindre Enregistrer Cci Vérification orthographique Options Annuler

A: Damien RIVIERE
Cc:
Cci:
Objet: Choix des dimensions d'une canette.

cahier des charges C... (10ko) Retirer

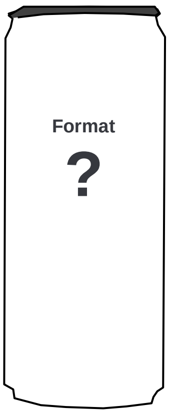
Bonjour M. RIVIERE,

Je suis le responsable de l'entreprise K-NET et je souhaite fabriquer des canettes écologiquement responsables et économiquement rentables. Pour cela je souhaiterais limiter au maximum la quantité de métal de chaque canette. Quelles doivent être alors les dimensions de la canette ?

J'ai appris que vos élèves de 3ème allaient travailler sur les solides. Serait-il possible qu'ils étudient mon problème et qu'ils m'envoient une réponse dès qu'ils auront les éléments permettant de m'expliquer leur choix. Pour cela je vous joins le cahier des charges.

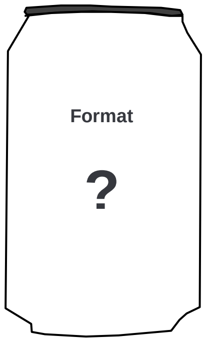
Je vous remercie d'avance.
Bien cordialement.

M. SOMAYADA
Directeur de K-NET



Extrait du cahier des charges.

Volume de boisson contenu.	*33 cl*
Contenance de la canette	*39 cl*
Largeur de la canette	*Entre 4 cm et10 cm*
Epaisseur des parois	*0,075 mm*



DEROULEMENT DE L'ACTIVITE

Les élèves lisent l'énoncé, puis après un temps de réflexion individuelle, ils commencent à élaborer une stratégie de résolution du problème par groupe de 4.

LA MODELISATION DU PROBLEME.

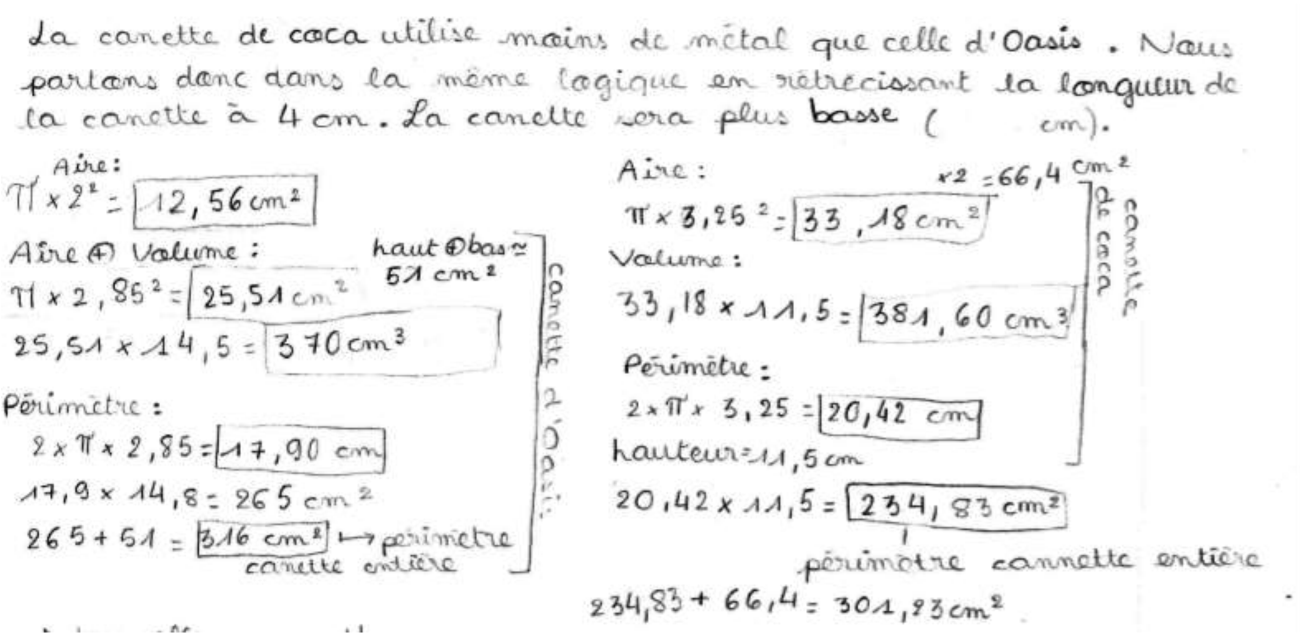
Une première modélisation évidente !

Les élèves vont tous, très naturellement, modéliser la canette par un cylindre et vont considérer comme négligeable les rebords, les creux… Quand je leur demande pourquoi, voici les réponses que j'obtiens : « c'est évident ! », « qu'est-ce que vous voulez qu'on prenne d'autre ? » …

Une deuxième modélisation qui pose plus de difficultés !

Les élèves ont beaucoup plus de difficultés à savoir ce qu'ils doivent calculer et à trouver le lien entre les différentes grandeurs : « Est-ce le volume qu'il faut calculer ? », « Quel rapport entre la quantité de métal et le volume ? » Et certains vont même jusqu'à : « Si elles ont le même volume, elles utilisent forcément la même quantité de métal ».

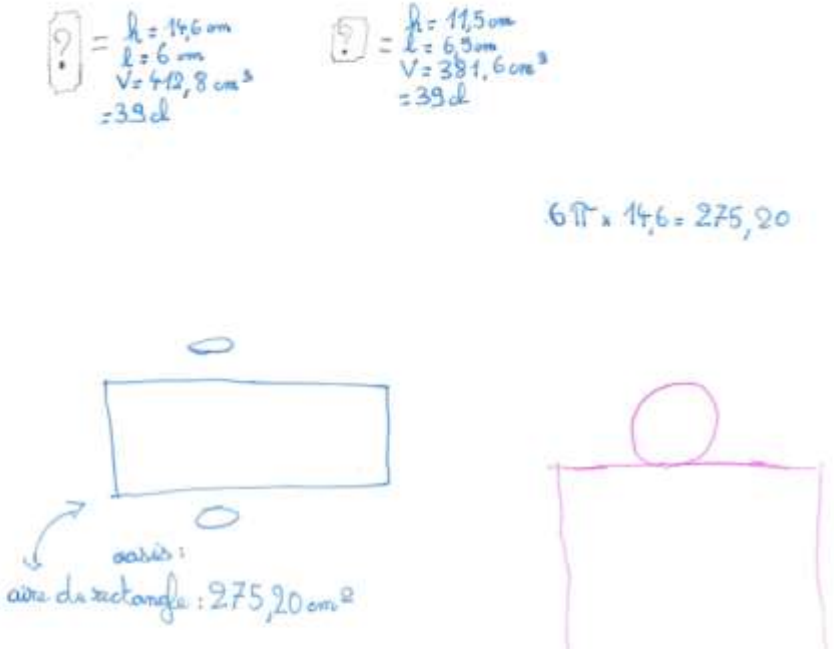
Tous les groupes demandent s'ils peuvent avoir les 2 formats de canettes pour pouvoir les mesurer et faire des calculs. Voici les premiers résultats obtenus :


La canette de coca utilise moins de métal que celle d'Oasis. Nous partons donc dans la même logique en rétrecissant la longueur de la canette à 4 cm. La canette sera plus basse (cm).

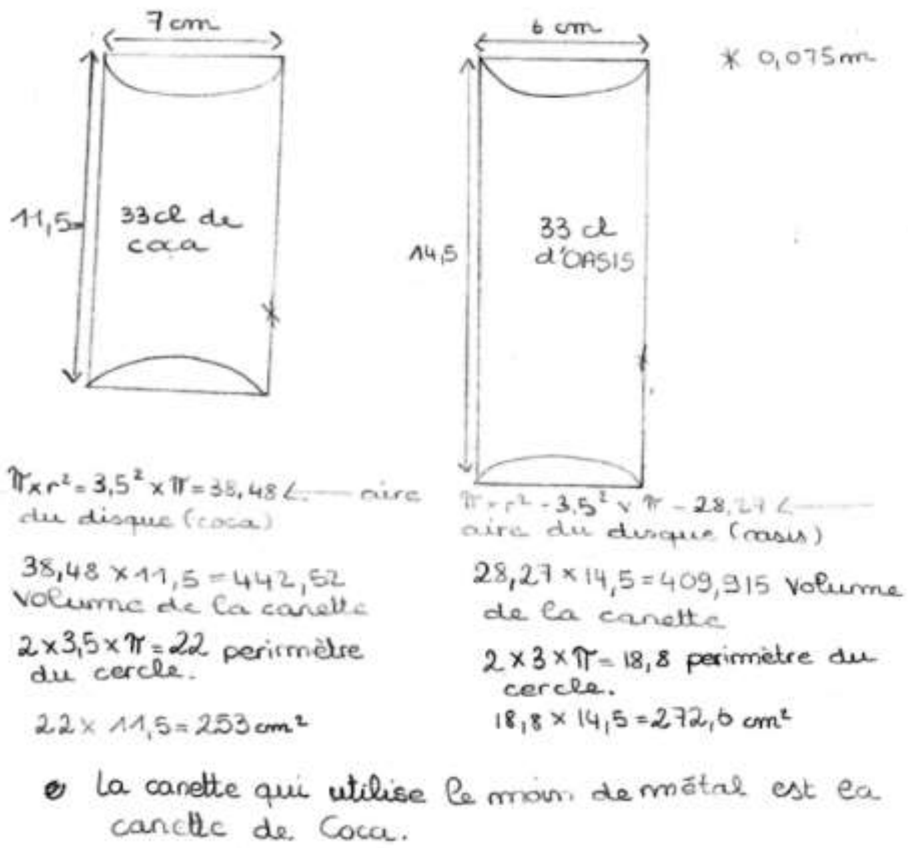
Aire :
$\pi \times 2^2 = \boxed{12,56 cm^2}$
Aire + Volume :
$\pi \times 2,85^2 = \boxed{25,51 cm^2}$ haut + bas ≃ 51 cm²
$25,51 \times 14,5 = \boxed{370 cm^3}$
Périmètre :
$2 \times \pi \times 2,85 = \boxed{17,90 cm}$
$17,9 \times 14,8 = 265 cm^2$
$265 + 51 = \boxed{316 cm^2}$ → périmètre canette entière
Canette d'Oasis

Aire :
$\pi \times 3,25^2 = \boxed{33,18 cm^2}$ ×2 = 66,4 cm²
Volume :
$33,18 \times 11,5 = \boxed{381,60 cm^3}$
Périmètre :
$2 \times \pi \times 3,25 = \boxed{20,42 cm}$
hauteur = 11,5 cm
$20,42 \times 11,5 = \boxed{234,83 cm^2}$
périmètre cannette entière
$234,83 + 66,4 = 301,23 cm^2$
Canette de coca

Dans cet exemple, les élèves calculent des grandeurs sans savoir si elles ont un sens réel, notamment le périmètre de la canette.



Dans ce 2ème exemple, les élèves ont compris le lien entre l'aire du patron et la quantité de métal utilisé.



Dans ce 3ème exemple, les élèves réussissent à comparer les 2 canettes fournies.

Presque tous les élèves, ont fini par réussir à comparer la surface latérale des 2 canettes qu'ils avaient à disposition.

Seuls 3 groupes parmi les 7 sont allés plus loin et ont essayé de généraliser la méthode afin de minimiser la surface latérale.

L'OPTIMISATION.

Ils ont tous commencé par des essais ; et très rapidement ils ont pris conscience des contraintes du problème : « Si je choisis un rayon et une hauteur au cylindre, je ne suis pas sûr que le volume soit de 39 cl ou 390 cm^3. »

$\pi \times 4^2 = 16\pi \approx 50,26$

$8 \times \pi = 25,13$

$\frac{390}{50,2} \approx 7,76$

$50,26 \times 5 = 251,3$

$50,26 \times 6 = 301,56$

$50,26 \times 7 = 351,82$

$50,26 \times 8 = 402,08$

Choix fait : rayon de 4 cm.

Recherche de la hauteur, par essais erreurs pour arriver à un volume de 390 cm².

Un groupe résume parfaitement la situation :

Si on invente des mesures il faut que le volume de la canette soit égal à 39 cl.

Ce groupe met alors en place un algorithme permettant de trouver la surface latérale du cylindre quand la hauteur est fixée.

39 cl = 390 cm²

$410 : 16 = 25,62$

(hauteur) (aire de la base)

$25,62 : \pi = 8,15$

(rayon au carré)

$\sqrt{8,15} = 2,8$ ← (rayon)

$17,6 \times 16 + 25,62 \times 2 = 332,84$

$2 \times 2,8 \times \pi = 17,6$

(périmètre)

LA MODELISATION INFORMATIQUE.

2 groupes décident d'utiliser le tableur pour faire plus d'essais.

Les 2 stratégies sont différentes :

Le premier groupe fixe la hauteur.

E2 =2*B2+D2

	A	B	C	D	E
1	hauteur	Aire du disque	rayon	aire rectangle	aire canette
2	1	390	11,14467683	69,9885704955	849,98857
3	1,1	354,54545455	10,626032427	73,4046320064	782,495541
4	1,2	325	10,173651494	76,6686376558	726,668638
5	1,3	300	9,7745281868	79,7992481168	679,799248
6	1,4	278,57142857	9,4189710409	82,8115933913	639,954451
7	1,5	260	9,0995905276	85,7181427704	605,718143
70	7,8	50	3,9904344223	195,467439744	295,46744
71	7,9	49,367088608	3,9650980746	196,716445678	295,450623
72	8	48,75	3,9402382805	197,957571212	295,457571

E2 =2*B2+D2

	A	B	C	D	E
1	r	pi*r²	h	2*pi*r*h	surface
2	2	12,56	31,05095541	390	415,12
3	2,1	13,8474	28,16413189	371,4285714	399,1233714
4	2,2	15,1976	25,66194662	354,5454545	384,9406545
5	2,3	16,6106	23,4789833	339,1304348	372,3516348
6	2,4	18,0864	21,56316348	325	361,1728
7	2,5	19,625	19,87261146	312	351,25
8	2,6	21,2264	18,3733464	300	342,4528
9	2,7	22,8906	17,03756127	288,8888889	334,6700889
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
21	3,9	47,7594	8,165931733	200	295,5188
22	4	50,24	7,762738854	195	295,48
23	4,1	52,7834	7,388686595	190,2439024	295,8107024

POUR FINIR : LE LIEN AVEC LES FONCTIONS.

Quand j'ai ramassé la synthèse, voilà ce que j'ai découvert au dos d'une feuille :

$$\left(\sqrt{(390 : H) : \pi}\right) \times 2 \times \pi$$

Lors de la synthèse de l'activité un lien entre la formule trouvée, et le tableur que l'on peut apparenter à un tableau de valeur et la notion de fonction a été mis en évidence. Certains élèves ont alors fait remarquer fort justement que l'on aurait pu faire un graphique.
Après étude du tableur, les élèves sont arrivés à l'idée que le graphique ne serait pas plus précis.