Problèmes ouverts sur les équations diophantiennes

Comme au début de l'année, on donne une banque de problèmes ouverts aux élèves.
Par groupe, les élèves choisissent un sujet et développent des stratégies de recherche pour le résoudre.
L'objectif est d'aboutir à une mise en équation du problème (mais pas nécessairement sa résolution).

Banque de problèmes :

Problème 1 :

1. Lisa veut mesurer une durée de 2 minutes avec deux sabliers, l'un mesurant une durée de 11 minutes et l'autre une durée de 5 minutes. Sa sœur affirme « C'est facile, car $2\times 11-4\times 5=2$ ».
Expliquer comment Lisa doit alors procéder.
2. Est-il possible pour Lisa de mesurer toute durée entière de d minutes avec ces deux sabliers ?

Problème 2 :

Le 27 décembre 2011, un astronome a observé le corps céleste A dont la fréquence d'apparition est 105 jours. Le 2 janvier 2012, ce même astronome a vu le corps céleste B qui apparaît tous les 81 jours.
Si on note x le nombre de jours séparant la date cherchée du 27 décembre, comment peut-on déterminer la date de la prochaine apparition simultanée des deux corps ?

Problème 3 :

La droite, tracée dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, et passant par les points A(1 ; 2) et B(– 3 ; – 5), passe-t-elle par d'autres points à coordonnées entières ?
Combien ?

Problème 4 :

On assimile chaque lettre de l'alphabet à un nombre entier selon la correspondance habituelle (A → 0 ; … ; Z → 25).
On chiffre tout nombre entier x compris entre 0 et 25 en calculant $11x+8$, puis en calculant le reste y de la division euclidienne de $11x+8$ par 26. L'entier x est alors codé par y.
Selon ce procédé de codage, quelle lettre va se coder en la lettre J ?

Éléments de correction :

1/ *Objectif : Existence ou non d'une solution*

Pour mesurer une durée de 2 minutes, on tourne en même temps les deux sabliers. Ensuite, on retourne **deux** fois de suite le sablier de 11 minutes et **quatre** fois de suite le sablier de 5 minutes.
L'intervalle de temps entre la fin du **quatrième** écoulement du petit sablier (5 minutes) et la fin du **second** écoulement du grand sablier (11 minutes) est exactement de deux minutes.

De même, toute durée de *d* minutes peut être mesurée avec ces deux sabliers.
Si *d* est un multiple de 5, le petit sablier suffira pour obtenir la durée.
Si *d* est un multiple de 11, le grand sablier suffira pour obtenir la durée.
Sinon, il suffit de remarquer que $d\times 11-2d\times 5=11d-10d=d$ et ainsi l'intervalle de temps entre la fin du **2d-ième** écoulement du petit sablier (5 minutes) et la fin du **d-ième** écoulement du grand sablier (11 minutes) est exactement de *d* minutes.

Prolongements possibles : Est-ce aussi possible pour des sabliers de 14 minutes et de 3 minutes ?
Et pour des sabliers de 9 minutes et de 6 minutes ?

2/ *Objectif : Recherche d'une solution particulière*

Le corps céleste A apparaît tous les 105 jours donc si on note k le nombre de révolutions qu'il a effectuées avant l'apparition simultanée des deux corps, on en déduit que $x = 105\,k$.
Le corps céleste B apparaît tous les 81 jours donc si on note m le nombre de révolutions qu'il a effectuées avant l'apparition simultanée des deux corps, on en déduit que $x = 81m + 6$ (on ajoute 6 qui correspond au nombre de jours entre le 27 Décembre et le 2 Janvier).

Le but de l'exercice est de trouver **une solution de l'équation suivante à deux inconnues** : $105\,k = 81\,m + 6$.

L'utilisation **d'un tableur ou de la calculatrice** permet de vérifier que la première coïncidence correspond à $105\times 7=81\times 9+6=735$ et donc elle a lieu 735 jours après le 27 Décembre 2011, alors que l'astre céleste A aura effectué sept révolutions et l'astre céleste B neuf révolutions.

Ce qui nous amène alors au 02/01/14 (Pour mémoire, 2012 est une année bissextile).

Prolongements possibles : Au bout de combien de jours aura lieu la seconde coïncidence ?
Le nombre de coïncidences possibles est-il fini ou non ?

3/ *Objectif : Nombre de solutions d'une équation diophantienne*

Le point de départ est la détermination d'une équation de la droite (AB).
Après calculs, une équation cartésienne est $7x - 4y + 1 = 0$ et l'équation réduite est $y=\frac{7}{4}x+\frac{1}{4}$.

On veut donc le nombre de solutions de l'équation 7x – 4y = – 1

En utilisant le coefficient directeur de la droite (AB), on sait alors que $\vec{u}\left(1;\frac{7}{4}\right)$ dirige la droite ainsi que $\vec{v}(4;7) = 4\vec{u}$ donc en partant du point A(1 ; 2) et en appliquant ce vecteur, on trouve un point M_1 (1 + 4 = 5 ; 2 + 7 = 9) qui se trouve aussi sur le droite (AB).

En réitérant ce procédé en ajoutant *k* fois le vecteur $\vec{v}$ (ou en le retranchant), on peut trouver alors une **infinité de points** de la droite (AB) à coordonnées entières et on peut vérifier que tous les point M_k (1 + 4k ; 2 + 7k), avec *k* entier relatif, conviennent.
Pour cela, il suffit de vérifier que les coordonnées de ces points vérifient une équation de la droite (AB).

Prolongements possibles : Existent-ils d'autres points à coordonnées entières sur cette droite ?

4/ Objectif : Lien entre le déchiffrement affine et les équations diophantiennes

Notons x le rang de la lettre qui va se coder en J (de rang 9). Alors x est un entier compris entre 0 et 25.
On obtient la relation $11x + 8 \equiv 9$ (mod 26)
Ce qui nous donne l'égalité $(11x + 8) - 9 = 26k$ avec k entier.
Et après simplification, le problème revient **résoudre l'équation suivante à deux inconnues** $11x - 26k = 1$

Par tâtonnement, on trouve un couple solution (19 ; 8) (on peut notamment se servir du tableur de la calculatrice avec les fonctions $Y_1 = 11X$ et $Y_2 = 1 + 26X$)
La lettre chercher est donc la lettre de rang 19 à savoir le T.

Autres pistes étudiées :

- Avec un tableur, la construction complète du chiffrement de chaque lettre avec la clé de codage (11 ; 8)
- L'élaboration d'un algorithme qui part de 0 et qui continue tant que le rang de la lettre codée n'est pas 9.

Prolongements possibles : Trouver la lettre de départ si le chiffrement se fait en ***deux*** *étapes (on part de la lettre de rang k, on arrive celle de rang l puis en repartant de cette lettre, on arrive à la lettre J).*
Même démarche avec une autre clé de codage.