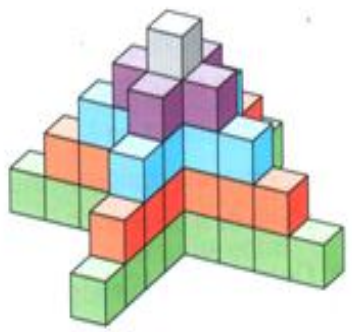
Gérard CORDES – groupe TraAM Maths et TICE de l'académie de Nantes – Mai 2012

La pyramide (1S devoir maison)



Compétences calculatoires :

▫ Modéliser une situation à l'aide des suites.
▫ Mise en œuvre de la formule 1+2+…+n
▫ Mobilisation des acquis sur les suites arithmétiques.
▫ Faire le lien entre différentes écritures algébriques d'un nombre obtenues par différentes stratégies.
▫ Possibilité de mise en œuvre d'une démarche de vérification grâce à un logiciel de calcul formel.

Descriptif rapide

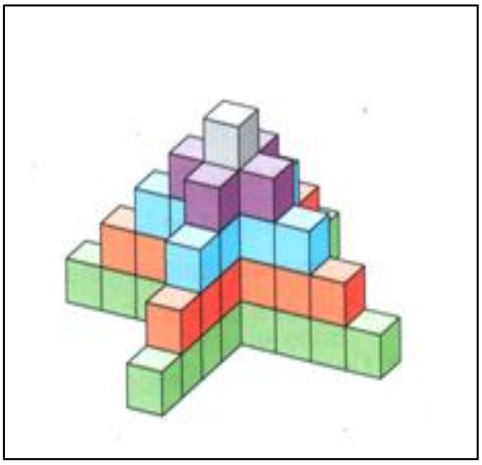
Les élèves utilisent différentes stratégies pour découper la pyramide et obtiennent différentes écritures pour le nombre de cubes qui composent une pyramide à n étages. L'interaction entre la vision géométrique et les calculs est fructueuse : les calculs ont du sens, le passage à l'algèbre permet une généralisation.

Travail de recherche donné en 1S en novembre deux semaines après le début de la séquence sur les suites.
Remarque : Dans la pratique de la classe est installée l'habitude de proposer des problèmes ouverts qui ne mobilisent pas nécessairement les outils mathématiques étudiés dans la séquence travaillée

Sommaire

Enoncé de l'exercice

La pyramide (1S devoir maison)



Voici un empilement de cubes à 5 niveaux

a) Combien y a-t-il de cubes dans cet empilement à 5 niveaux ?

b) Combien y a-t-il de cubes dans un empilements à n niveaux ?

c) Quel est le plus grand empilement de ce type que l'on peut réaliser si on dispose de 12420 cubes ?

Remarque : on aurait pu limiter l'énoncé du problème à la seule question c).

Objectifs du programme de 1S :

Mettre en œuvre une recherche de façon autonome, mener des raisonnements, avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats, choisir et appliquer des techniques de calcul, modéliser et étudier une situation à l'aide des suites.
Cette activité posée sous forme ouverte vise prioritairement à renforcer la maitrise des compétences de résolution de problème. Elle permet de donner sens à la notion de suite et d'utiliser les formules de sommation.

Scénario :

▪ L'activité plaît : tous les élèves se mettent vite en situation de recherche.
▪ Certains élèves ont choisi de casser la pyramide en plusieurs morceaux bien choisis pour faire ensuite des assemblages astucieux. Certains ont eu besoin de mobiliser la formule du cours 1+2+….+n, d'autres non.
▪ D'autres élèves remarquent qu'on passe d'un étage au suivant en ajoutant 4 cubes d'où l'utilisation d'une suite arithmétique de raison 4 : la somme aurait pu être obtenue par un algorithme ou par tableur. Après un temps d'échange cette stratégie a finalement été laissée de côté.
▪ La dernière question a souvent été traitée en résolvant une équation du second degré ou en faisant des essais successifs avec 12420, 12419, 12418…Les élèves moyens ont utilisé la calculatrice au maximum pour ces calculs répétitifs.

Des travaux d'élèves :

Voici des travaux d'élèves : avec les différentes stratégies.
Les élèves qui avaient pensé à utiliser une suite arithmétique, on changé de stratégie avant de rédiger leur devoir : il n'y a donc aucune copie qui montre une modélisation par une suite arithmétique.

Copie 1 :
L'idée est de faire des assemblages géométriques : la pyramide est cassée en quatre ailes qui sont regroupées deux par deux pour former des « rectangles ».
L'expression du nombre de cubes en fonction du nombre n de niveaux est $n\times n+n\times(n-1)$
La dernière question est résolue par essais successifs.

Copie 2 :
L'idée est de casser la pyramide en 3 « ailes » : l'une a pour hauteur n et les trois autres ayant pour hauteur n-1. Puis l'élève utilise la formule $1+2+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ et l'adapte au rang n-1.

L'expression du nombre de cubes en fonction du nombre n de niveaux est :

$$(1+2+...+n)+3\times(1+2+...+n-1)=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{3(n-1)n}{2}=....$$

La dernière question est résolue par équation du second degré.

<u>Copies 3 et 4:</u>
L'idée est de faire des assemblages géométriques : la pyramide est cassée en une colonne centrale et quatre escaliers identiques de hauteur n-1.
L'expression du nombre de cubes en fonction du nombre n de niveaux est :

$$n+4(1+2+...+n-1)=n+\frac{4(n-1)n}{2}=....$$

La dernière question est résolue par équation du second degré avec vérification.

<u>Copie 5:</u>
L'idée est d'imaginer la pyramide formée de quatre « ailes » identiques de hauteur n et de retire 3 colonnes centrales de hauteur n.
L'expression du nombre de cubes en fonction du nombre n de niveaux est :

$$4(1+2+...+n)-3n=\frac{4n(n+1)}{2}-3n=....$$

La dernière question est résolue par équation du second degré avec vérification.

Piste de prolongement par une activité rapide destinée à renforcer une habileté calculatoire :

On propose les différentes expressions trouvées dans les copies. A charge pour les élèves de démontrer que toutes ces expressions sont égales.

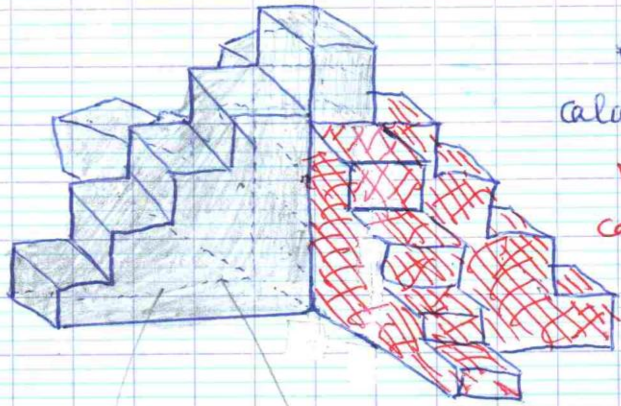
Voir les copies pages suivantes

Copie 1

DM du 24 novembre

a) 5 colonnes, $5\times5 + 5\times4 = \underline{45}$

ce qui revient à en fait à faire $n\times n + n\times(n-1)$



* Pour faire 5×5 j'ai calculé la partie grise

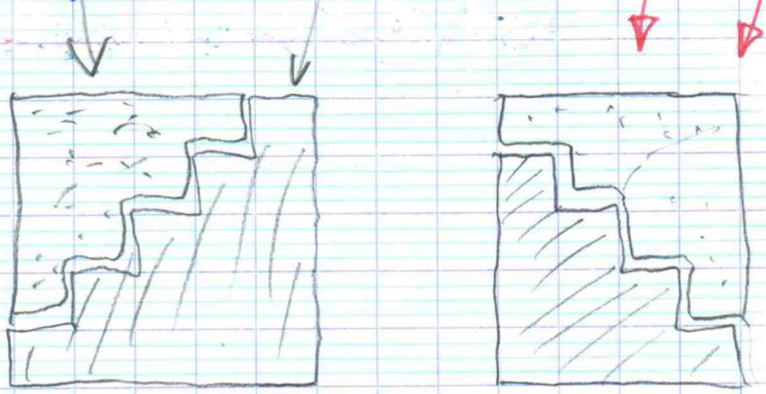
* Pour faire 5×4, j'ai calculé la partie

b) Donc, avec n niveaux on fait $\underline{n\times n + n\times(n-1)}$

c) Ensuite, pour arriver à 12420 je fais des essais avec ma formule, $70\times70+70\times69 = 9730$;

ou

J'arrive alors à 12403 avec $79\times78 + 79\times79$, je ne peux pas aller plus près que 12403, donc avec 12403 cubes, je peut faire 79 niveaux et il me reste 17 cubes.



Copie 2

Exercice 2.

a) Il y a 45 cubes dans cet empilement à 5 niveaux.

b) $(1+2+3+\ldots+n)+(3\times(1+2+3+\ldots+(n-1))$

$= \dfrac{(n(n+1)}{2} + \dfrac{3((n-1)(n-1+1))}{2}$

$= \dfrac{(n(n+1)) + 3((n-1)n)}{2}$

$= \dfrac{(n^2+n)+(3n^2-3n)}{2}$

$= \dfrac{4n^2-2n}{2}$

$= 2n^2 - n$.

c) $2n^2 - n = 12\,420$

$2n^2 - n - 12\,420 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4\times 2\times(-12420) = 1 + 99360 = 99361$.

$n_1 = \dfrac{1-\sqrt{99361}}{4} \simeq -78 \leftarrow$ impossible.

Copie 3

a) Cet empilement comporte 5 niveaux soit 5 cubes situés au centre. De plus il y a 4 côtés composés de 10 cubes chacun $(1+2+3+4)$.
Total de cubes : $5+4(1+2+3+4) =$
$5+(4\times10) = 45$.
Il y a donc 45 cubes dans cet empilement à 5 niveaux.

b) Pour trouver combien il y a de cubes dans un empilement à n niveaux je m'aide de l'exemple précédent.

$5+4(1+2+3+4) = n+4(1+2+3+n-1)$
$= n+4\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)$. Détaille la colonne centrale et les quatre escaliers

Donc dans un empilement à n niveaux il y a $n+4\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)$ cubes.

Copie 4

<u>Exercice n°2</u>

a) Dans cet empilement à 5 niveaux, il y a 45 cubes.

b) Dans un empilement à n niveaux, il y a $n+4\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)$ cubes.

c) On cherche la valeur de n pour laquelle on peut réaliser le plus grande empilement avec 12420 cubes.

Donc $12\,420 = n+4\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)$

$$12\,420 - n = 4\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)$$

$$\frac{12\,420-n}{4} = \frac{n^2-n}{2}$$

$$6210 - \frac{n}{2} = n^2 - n$$

$$6210 = n^2 - n + \frac{n}{2}$$

$$6210 = n^2 - 0{,}5n$$

$$0 = n^2 - 0{,}5n - 6210$$

<u>Cherchons les racines:</u>

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-0{,}5)^2 - 4\times1\times(-6210) = 0{,}25 + 24840 = 24840{,}25$$

Il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{0{,}5+\sqrt{24840{,}25}}{2} \simeq 79{,}05$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{0{,}5-\sqrt{24840{,}25}}{2} \simeq -78{,}55$$

le résultat négatif n'est pas recevable car nous cherchons un résultat positif, il semblerait donc que l'on peut réaliser un empilement maximum de 79 niveaux avec 12 420 cubes.

<u>Vérification</u> : Pour $n=79$; $79+4\left(\frac{79\times78}{2}\right) = 79+12324 = 12\,403$

Pour $n=80$; $80+4\left(\frac{80\times79}{2}\right) = 80+12\,640 = 12\,720$

On dépasse alors les 12 420 cubes.

Copie 5

Exercice 2.

a) Dans cet empilement à 5 niveaux, il y a 45 cubes.

b) Pour n niveaux, il y a x cubes. (x et n sont des entiers naturels non nuls)

$$4 \times \left(\frac{n \times (n+1)}{2}\right) - 3n = x$$

$$4 \times \left(\frac{n^2+n}{2}\right) - 3n = x$$

$$\frac{(n^2+n) \times 4}{2 \times 1} - 3n = x$$

$$\frac{4n^2+4n}{2} - \frac{6n}{2} = x$$

$$\frac{4n^2-2n}{2} = x$$

$$\boxed{2n^2 - n = x}$$

c. Nous devons trouver le plus grand empilement de ce type si on dispose de 12420 cubes, x vaut donc 12420, cherchons donc n.

$$2n^2 - n = 12420$$

$$2n^2 - n - 12420 = 0$$

$\Delta = b^2 - 4ac = 99361$ $\Delta > 0$ donc 2 solutions à l'équation.