Labomaths SSSL décembre 2025

Situation des motifs – Algèbre en cycle 3

Programme 2025

L'objectif est d'initier les élèves à la « pensée algébrique » et en particulier de développer leur capacité à résoudre des problèmes en raisonnant sur des nombres sans connaître leur valeur. Les élèves apprennent à désigner ces nombres par des symboles ou par des lettres et à raisonner en écrivant avec ces symboles des relations mathématiques. **Ils sont aussi amenés à identifier et à généraliser des structures, notamment dans le cadre de suites de motifs en exprimant la relation entre deux éléments consécutifs ou entre le rang d'un élément et la valeur associée.**

Les nombres dont la valeur n'est pas connue peuvent être représentés par un symbole.

Objectifs d'apprentissage

Identifier et formuler une règle de calcul pour poursuivre une suite de nombres

Identifier des régularités et poursuivre une suite de motifs évolutive

Trouver le nombre d'éléments pour une étape donnée dans une suite de motifs évolutive

Analyse de la situation

A partir de l'évolution d'un motif à base d'un assemblage de carrés, déterminer le nombre de carrés nécessaires pour réaliser le $n^{\text{ième}}$ motif.

Objectif d'apprentissage : Trouver le nombre d'éléments pour une étape donnée dans une suite de motifs évolutive

Nous avons trois variables :

- Le numéro du motif (suite des nombres entiers à partir de 1 donc on ajoute 1 pour obtenir le numéro du motif suivant)
- Le nombre de carrés ajoutés au motif précédent
- Le nombre total de carrés utilisés

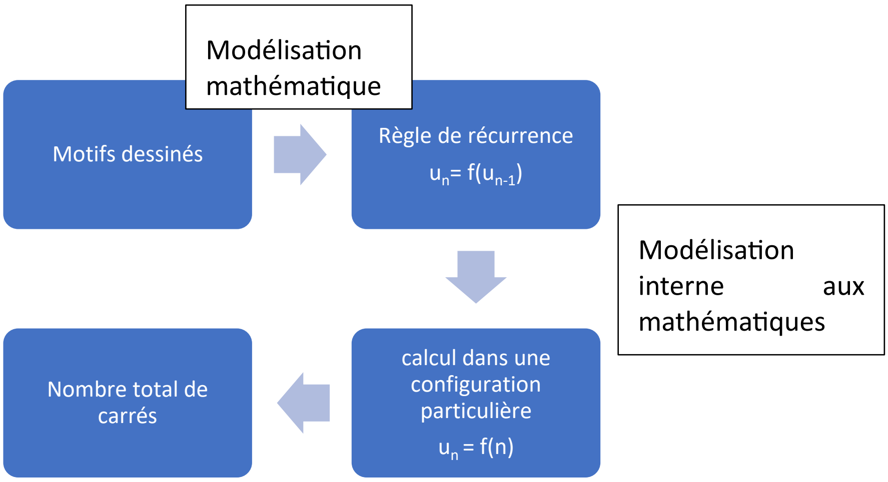
La procédure attendue :

- Analyser les étapes successives pour identifier une règle de passage d'un motif au suivant
- Identifier que la règle peut être appliquée à d'autres assemblages et donc à d'autres motifs.
- Déterminer un motif permettant de dénombrer facilement le nombre de carrés en fonction du numéro du motif
- Déterminer le nombre de carrés en fonction du numéro du motif

Quelle est la tâche ?

- Représenter le motif suivant
- Déterminer la règle de passage d'un motif au suivant
- Déterminer le nombre de carrés pour réaliser un motif déterminé
- Déterminer une formule permettant d'exprimer le nombre de carrés pour n'importe quel motif

On peut identifier une sorte de bouclé de modélisation :



Jeu sur les variables didactiques :

- Suivant le motif à représenter, peut être simple si on a tous les motifs précédents, plus difficile sinon et de plus en plus couteux suivant le rang du motif demandé (tracer le 5ème est plus facile que tracer le 15ème surtout si on n'a pas le 14ème de tracé…).
  ⇨ Variable didactique qui peut contraindre à ne plus passer par le dessin mais laisse la possibilité de le faire pour valider.
- La structure du motif peut amener à constater des règles plus ou moins facilement. Ici pour la construction sur le motif en « pyramide » la règle pour passer d'un motif au suivant est plus visible que sur le motif en carré, par contre pour le carré, il est plus facile de dénombrer le nombre total de carrés utilisés.
- La place du motif demandé : successeur, prédécesseur ou intermédiaire.

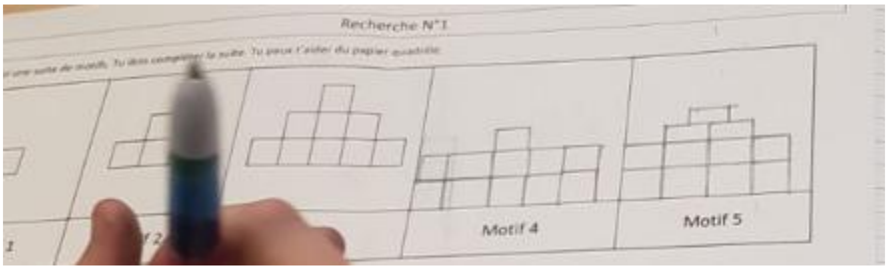
Activités possibles pour les élèves :

- Analyse des motifs : lié à la perception « géométrique » de la figure proposée amène à l'explorer de différentes manières (repérer les points communs et les différences, repérer des symétries, repérer le contour, identifier le motif précédent à l'intérieur du motif…)
- Repérer une procédure de construction du motif suivant
- Dénombrer les carrés ajoutés à chaque étape
- Analyser l'évolution de ces ajouts pour repérer des propriétés
- Ecrire une règle générale

A minima les élèves sont censés pouvoir produire le motif successeur (le 5ème motif) à partir de l'observation des 4 premiers motifs et expliquer oralement comment ils ont procédé.

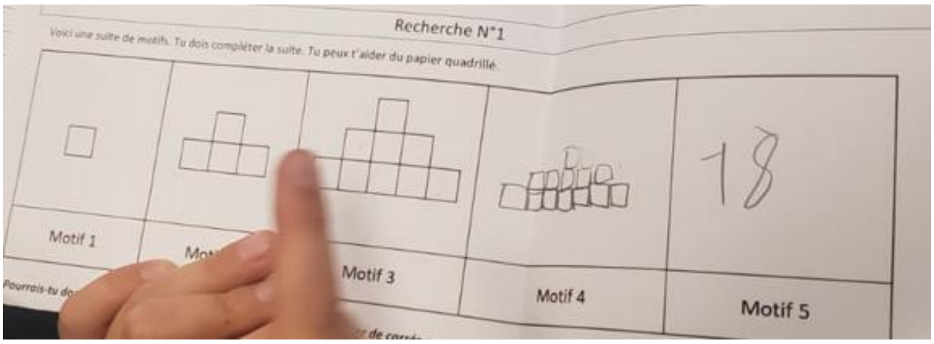
Obstacles potentiels :

- **<u>Du statique au dynamique</u>** : le motif dessiné ne montre pas la chronologie de sa réalisation, les élèves doivent donc remettre du dynamique dans ce dessin. On remarque la différence entre cette « déconstruction instrumentale » du motif en observant comment les élèves réalisent le motif. Certains élèves n'arrivent pas à repérer une structure comme ici :

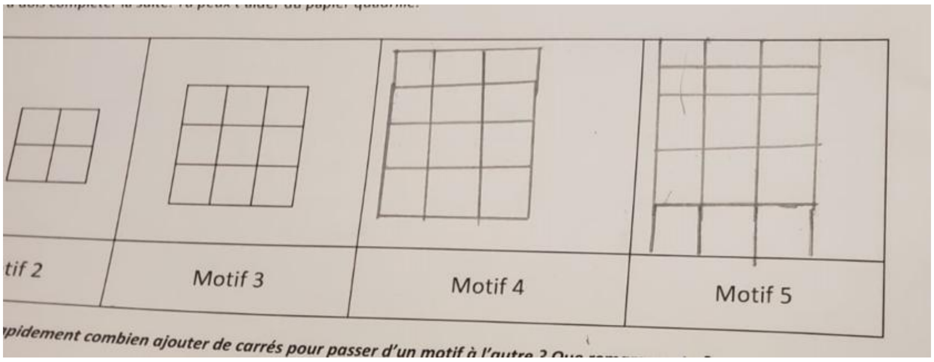
  

  D'autres partent d'une règle qu'ils posent « *il y en a un de plus* ».

  Un autre trouve que c'est trop long, il cherche à écrire le nombre de carrés mais peine à trouver une règle stable, il en change plusieurs fois :

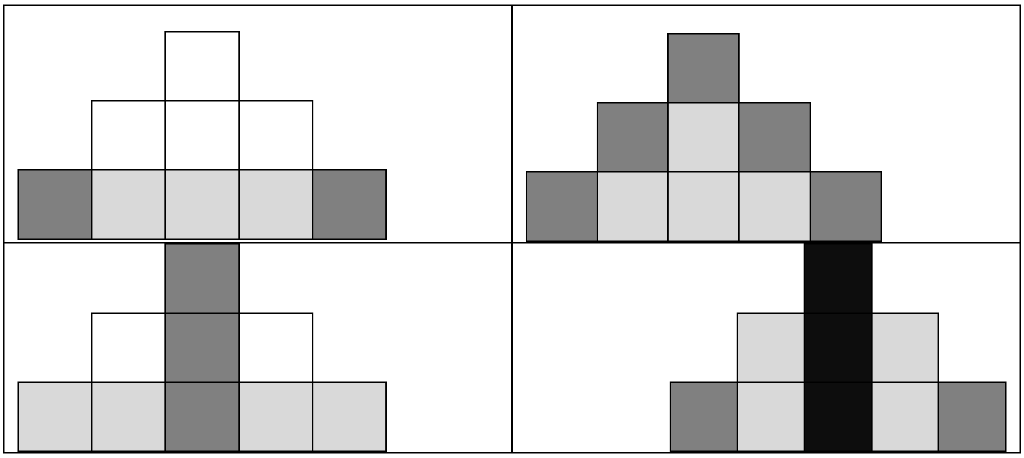


Une autre ne tient pas compte des deux premiers motifs :

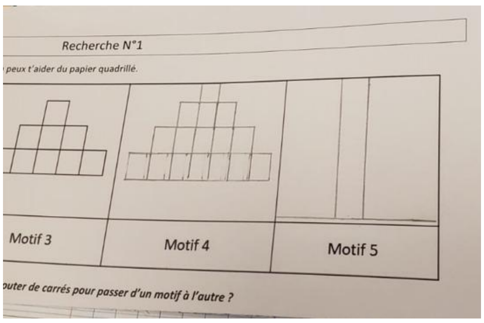


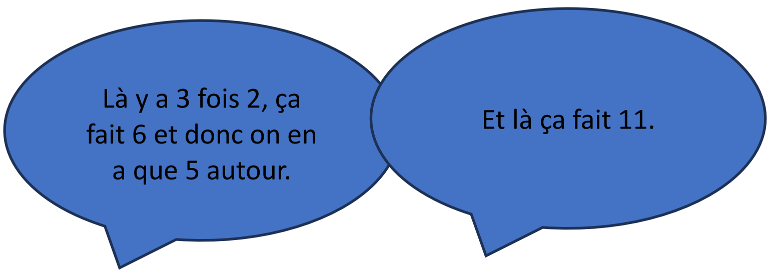
Par exemple pour le motif en « pyramide » :

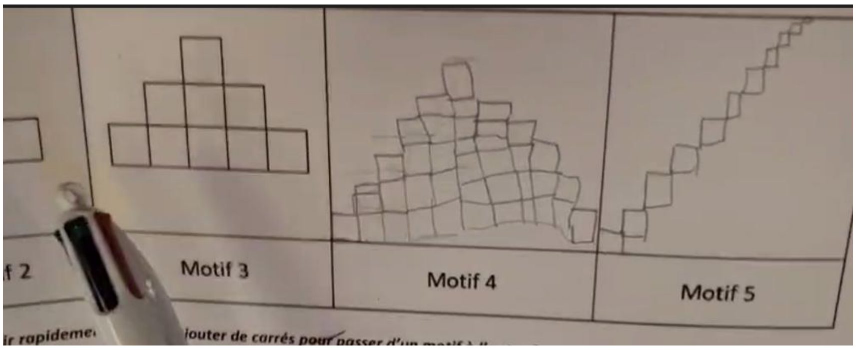
a. Partir du motif précédent, ajouter une ligne identique à la base et ajouter deux carrés aux deux extrémités (lecture du motif du haut vers le bas). *« Je rajoute celui du bas plus 2 ».*
b. Partir du motif précédent et ajouter un carré sur chacun des côtés et « en haut » (sorte de « grossissement » du motif posé sur sa base).
c. Partir d'un tronc et ajouter des « branches » (repérage de la symétrie par rapport à la colonne centrale).
d. Représenter de la gauche vers la droite : 1, puis 2, puis 3… jusqu'à n et diminuer jusqu'à 1 (lecture de gauche à droite avec une augmentation et une réduction dans l'idée d'un escalier qui monte et redescend).
e. Commencer par les marches extérieures (il y en a autant que le numéro du motif « *fois 2 moins 1* »).



procédure d)

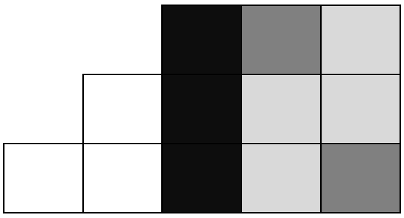




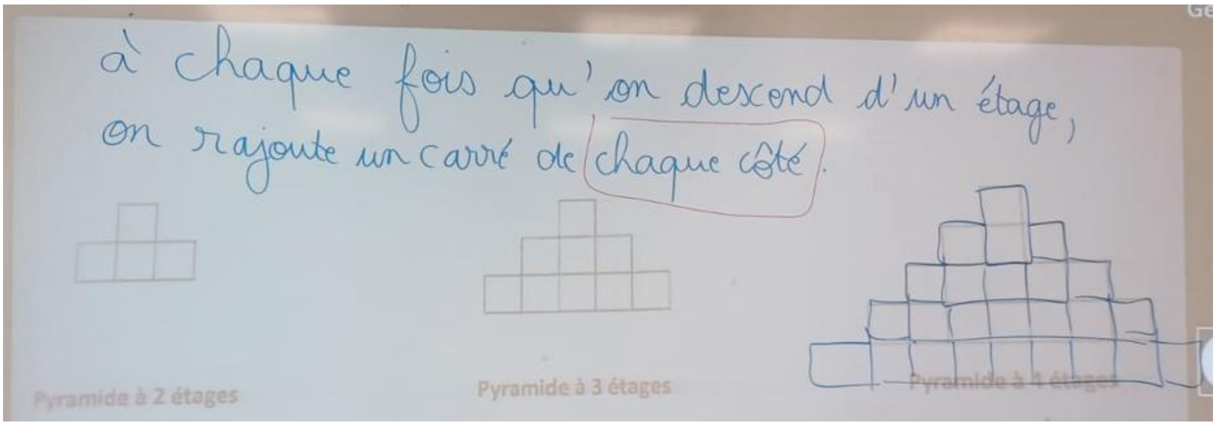


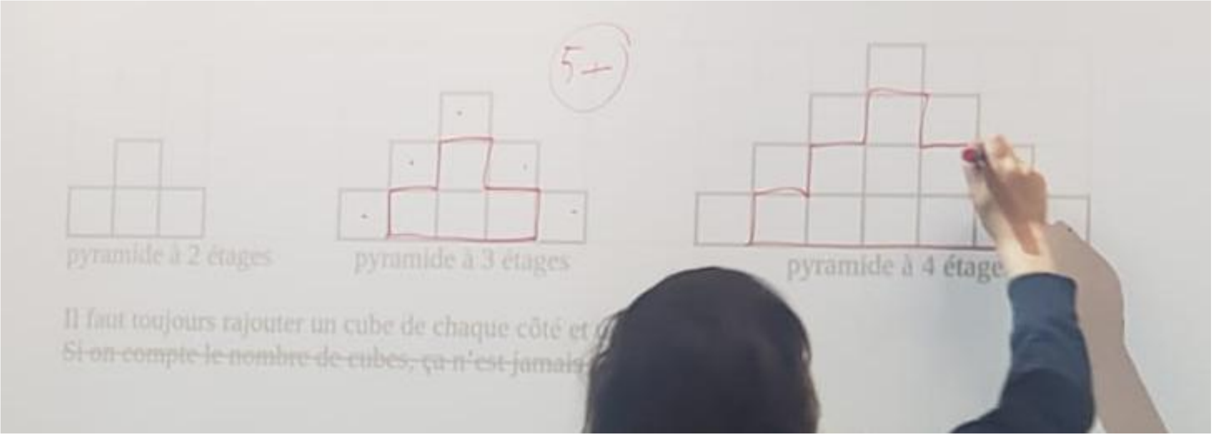
Procédure e)

Ces différentes manières de concevoir l'évolution du motif amène des représentations différentes de l'ajout. La a) permet de repérer le fait qu'on ajoute « 2 carrés de plus que la fois précédente », la b) peut amener à prouver que l'on ajoute toujours un nombre impair de carrés puisqu'il en faut deux par ligne et un supplémentaire en haut, les c) et d) peuvent amener à concevoir le déplacement mental des carrés pour compléter la partie symétrique afin de former un carré.



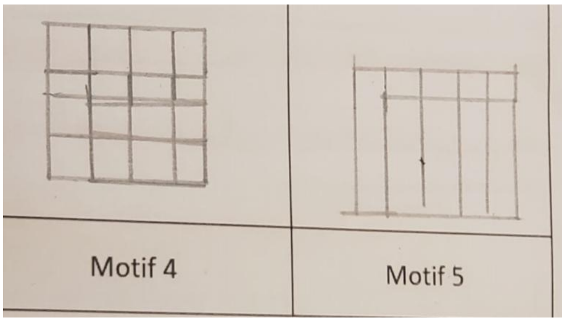
Il semble donc important de prévoir un temps pour que les élèves puissent comparer les procédures et arriver à changer de point de vue pour mieux voir les propriétés visées (nombre impair, deux de plus à chaque ajout d'une étape.

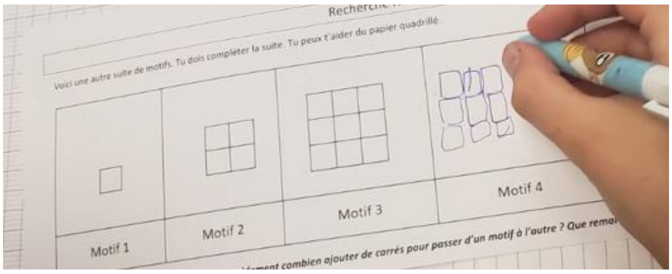




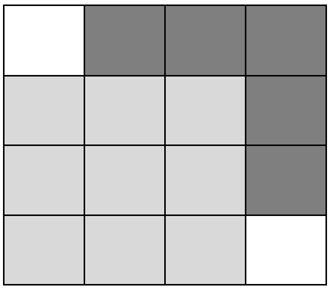
Pour le motif en « carré » :

a. Commencer par tracer un carré (l’enveloppe) et le découper.
b. Reproduire le motif précédent et ajouter une ligne et une colonne puis un angle
c. Reproduire le motif précédent et ajouter un carré pour border tout le tour.
d. Reproduire le motif précédent et ajouter une ligne avec un carré de plus et une colonne avec un carré de plus en repérant que l’angle est compté deux fois
e. Et l’ajout peut se faire ici sur n’importe quel côté.
f. Prendre l’avant dernier motif et lui ajouter un carré tout autour (carré bordé)

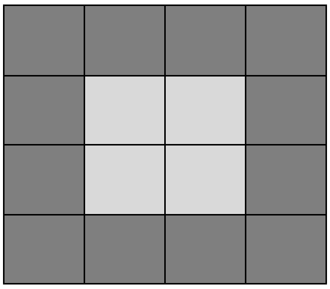


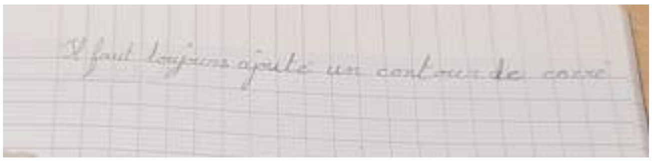


Ici les procédures ne permettent pas d’identifier qu’on ajoute 2 carrés de plus à chaque fois si ce n’est de voir le carré « à partir de l’angle » (procédure non observée dans les classes ?) :



Pour le carré bordé, la réponse a été mise de côté car on a alors une règle qui est difficile à exprimer, en fait on ajoute toujours 8 de plus à l’avant dernier motif. Par exemple ici le passage du motif 2 au motif 4, on ajoute 12 carrés et du motif 4 au 6 on ajoutera 12 + 8 soit 20 carrés etc…





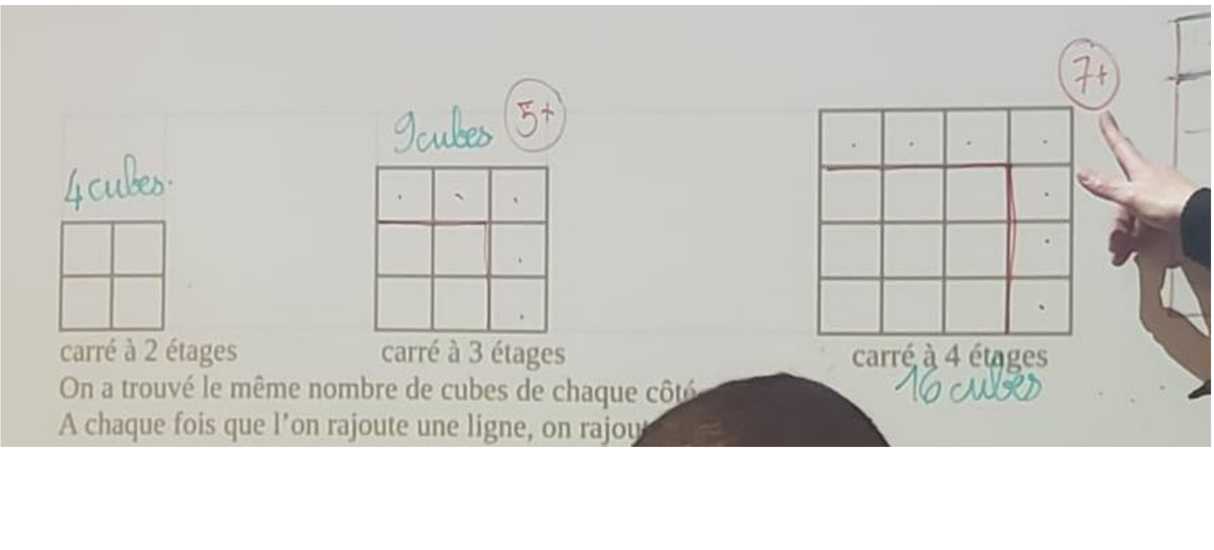
A noter que certains élèves ont du mal à garder en mémoire toutes les informations nécessaires (mémoire de travail insuffisante) comme ici où l'élève explique qu'elle sait qu'il faut ajouter 3 puis 5, puis 7 et enfin 9 (qu'elle écrit en chiffre entre parenthèse) mais complète le motif 4 en reproduisant le motif 2 et en essayant de caser 7 carrés sur le pourtour, et pour le motif 5 elle se contente de dessiner les 9 carrés ajoutés.

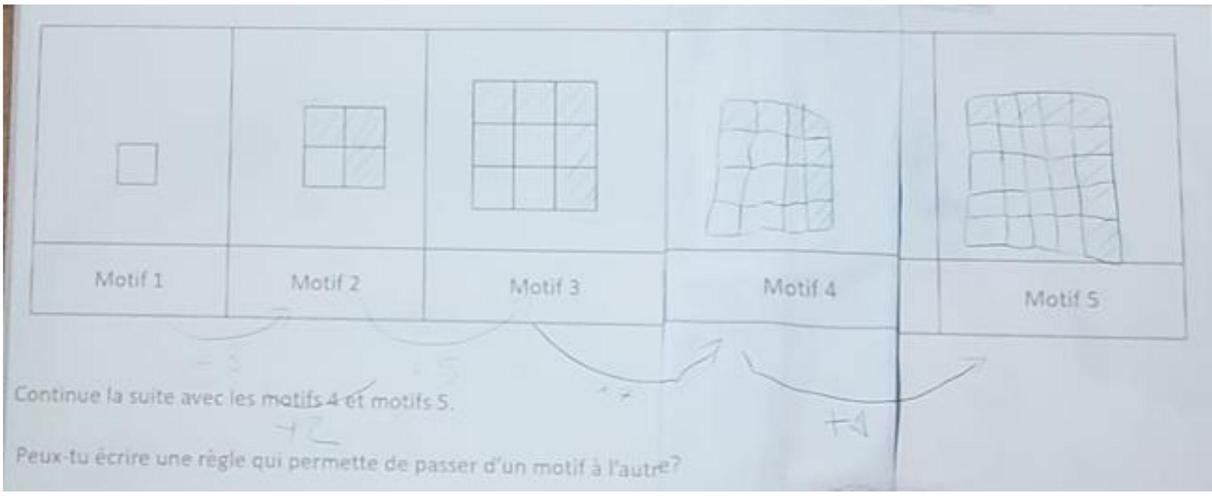
- ⇨ A noter que si l'enseignante représente le motif au tableau, la manière dont elle dessine donne une dynamique au motif. Prévoir des motifs de couleurs manipulables (à base de post-its par exemple) peut être un atout.
- ⇨ Pour remettre de la dynamique dans le motif, la couleur et des symboles sont utilisés comme ci-dessus (motif précédent en rouge et point dans les carrés ajoutés).

- **<u>Les différentes variables</u>** : parle-t-on du nombre de carrés ajoutés au motif précédent ou du nombre total ? Il faudrait sans doute proposer d'autres tâches pour permettre de mieux passer de l'un à l'autre par exemple en donnant un motif et en demandant quel est son rang, en donnant des suites de motifs sans partir du premier rang, donner une suite de motif par sa règle…

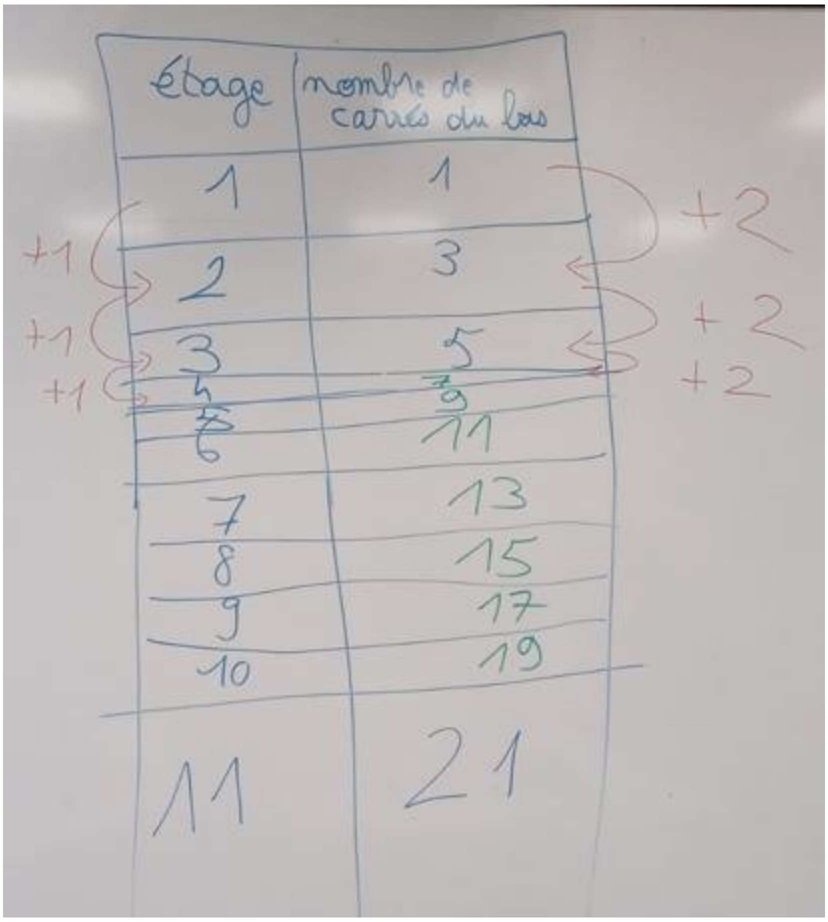
  Ici, le vocabulaire utilisé peut être déterminant : pyramide, carré, motif, cubes, petits carrés, numéro, étage… Comme il n'y a pas eu appui sur du matériel, cela peut devenir compliqué pour certains élèves. SI on passe par une manipulation physique d'objets, on peut ensuite les désigner différemment.

  - ⇨ Dans les traces écrites, la différence est mise en évidence par l'utilisation de couleurs différentes, de flèches (pour les ajouts) ou d'opérateurs entourés :





ou par une organisation en tableau comme ici, faisant apparaître les opérateurs d'une autre couleur :



- **<u>Les différents registres sémiotiques</u>** : comme sur la photo précédente, on voit différents registres mobilisés auxquels s'ajoutent le propos oral et le déictique (doigt pointé sur ce dont on parle)
  - Les écritures numériques : nombres et signes opératoires
  - Le langage naturel
  - Les symboles
  - Les dessins

Les effets de contrat

Les habitudes de la classe jouent sur l'activité des élèves :

- Habitude de l'énigme de Noël : amène les élèves à penser qu'il y a une énigme à trouver (réponse) et se posent moins la question de ce qu'ils sont en train d'apprendre

- Habitude de problèmes ouverts avec différentes procédures et solutions : chercher à créer une règle de motif « originale »
- Habitude de problèmes arithmétique : chercher à jouer sur les nombres
- …

Les choix de scénarios

Il serait intéressant de comparer les raisons de ces choix qui ont amené à :

- Commencer à établir la relation entre le nombre de carrés ajoutés à chaque étape et le numéro de l'étape puis faire établir la relation entre le nombre de carrés au total et le numéro de l'étape à partir de tableaux de valeurs.
- Partager la classe en deux, par groupes de 3, la moitié a le motif en « carré » et l'autre le motif en « pyramide ». Ce qui amène les élèves à comparer les deux séries et voir rapidement qu'elles fonctionnent de la même manière et donc que les résultats obtenus pour l'une sont valables pour l'autre. Crée aussi une sorte de « mystère » : pourquoi est-ce que cela est vrai ? On peut le prouver géométriquement par découpage et recollement de carrés (on utilise alors la conservation des aires, le nombre de carrés est confondu avec la mesure de l'aire de la surface en carrés unités d'aires) ou en utilisant le fait que si deux suites ont la même valeur d'origine et la même expression numérique pour la règle de génération, alors tout ce qu'on peut calculer pour l'une est valable pour l'autre.
- Commencer par chercher la règle de génération de la série en « carré » puis celle en « pyramide ». Ensuite amener à exprimer le nombre de carrés au total en fonction du numéro du motif.
- La même chose mais en commençant par la série en « pyramide ».

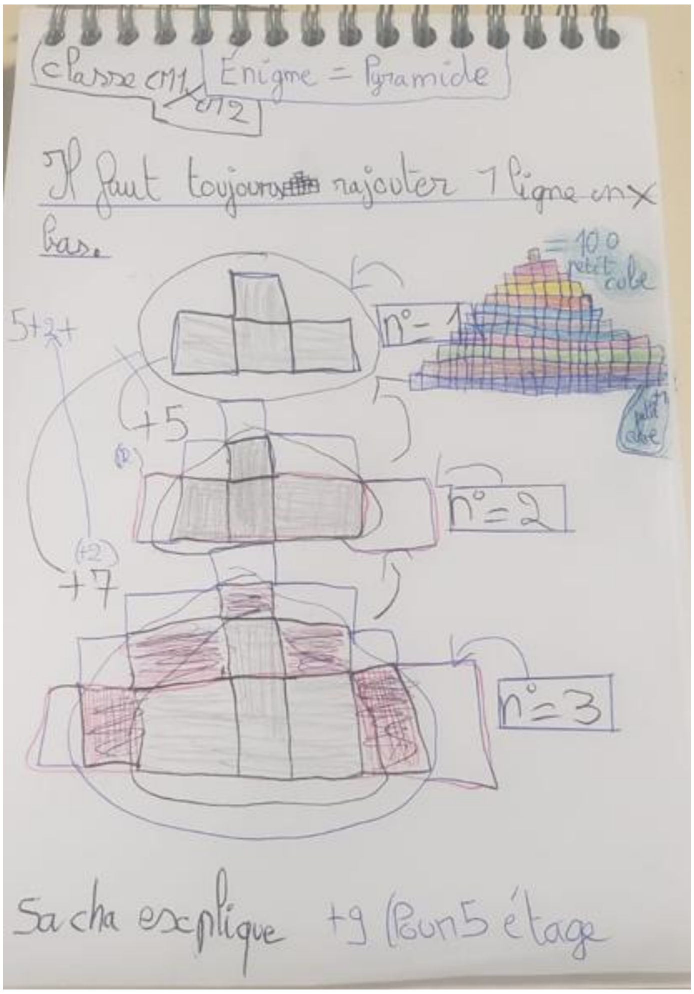
La secondarisation

Développer une pensée algébrique, c'est penser les relations entre les nombres non plus du point de vue des valeurs mais des relations entre ces valeurs. On s'intéresse à l'expression de ces relations à l'aide de nombres connus, d'autres inconnus et d'opératoires. Reste à savoir comment désigner un nombre inconnu. On voit que très vite des exemples sont pour les élèves des « exemples génériques » en ce sens que l'exemple sert de généralisation.

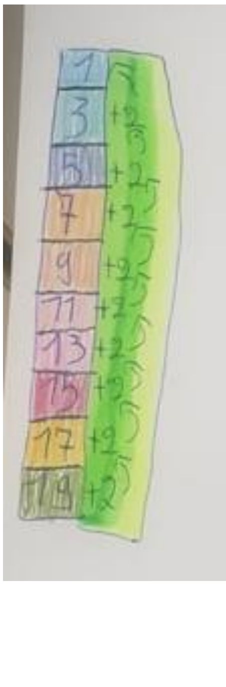
Le langage est alors essentiel et une analyse des contenus peut nous aider à repérer des traces d'une pensée algébrique chez les élèves, pour l'encourage, les aider à l'exprimer, permettre de comprendre les raisonnements des autres.

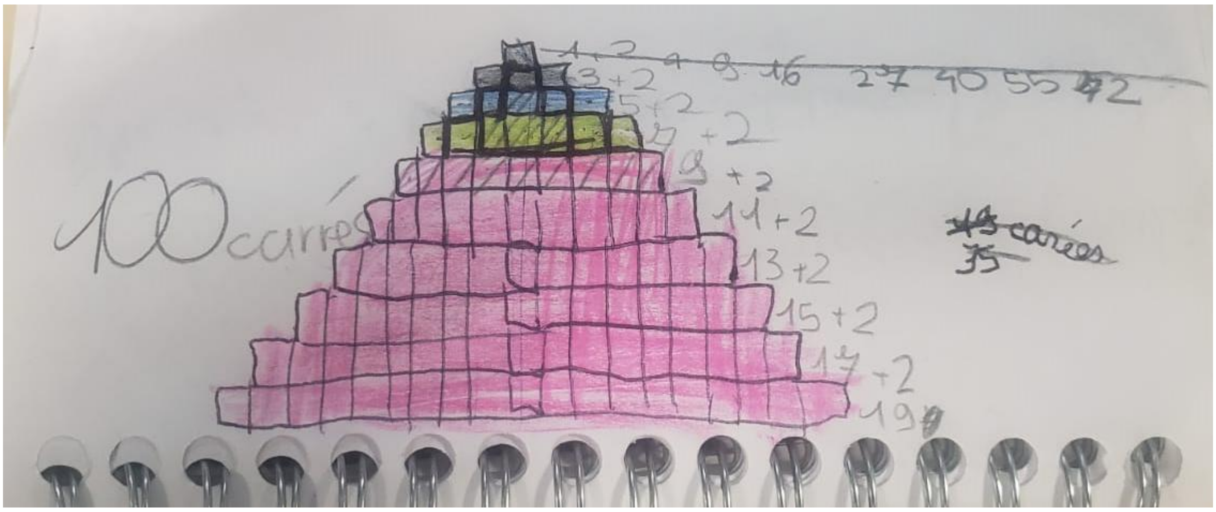
Il est intéressant de voir comment s'effectue la secondarisation (le passage du concret matériel à l'abstrait et la généralisation) en remarquant **de quoi** parlent les élèves :

- des objets matériels (carrés, pyramides, étages, lignes, colonnes…) : *« on ajoute une ligne », « j'ajoute un partout de chaque côté »…*



- des nombres et sans préciser « nombre de … » : *« on ajoute 3, 5, 7… »*

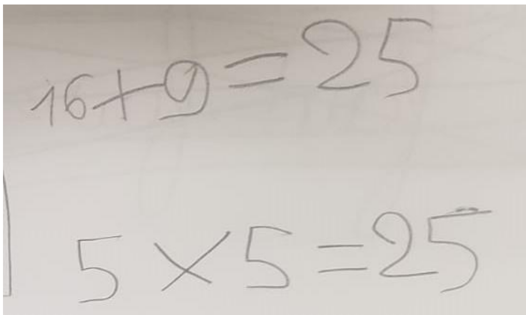




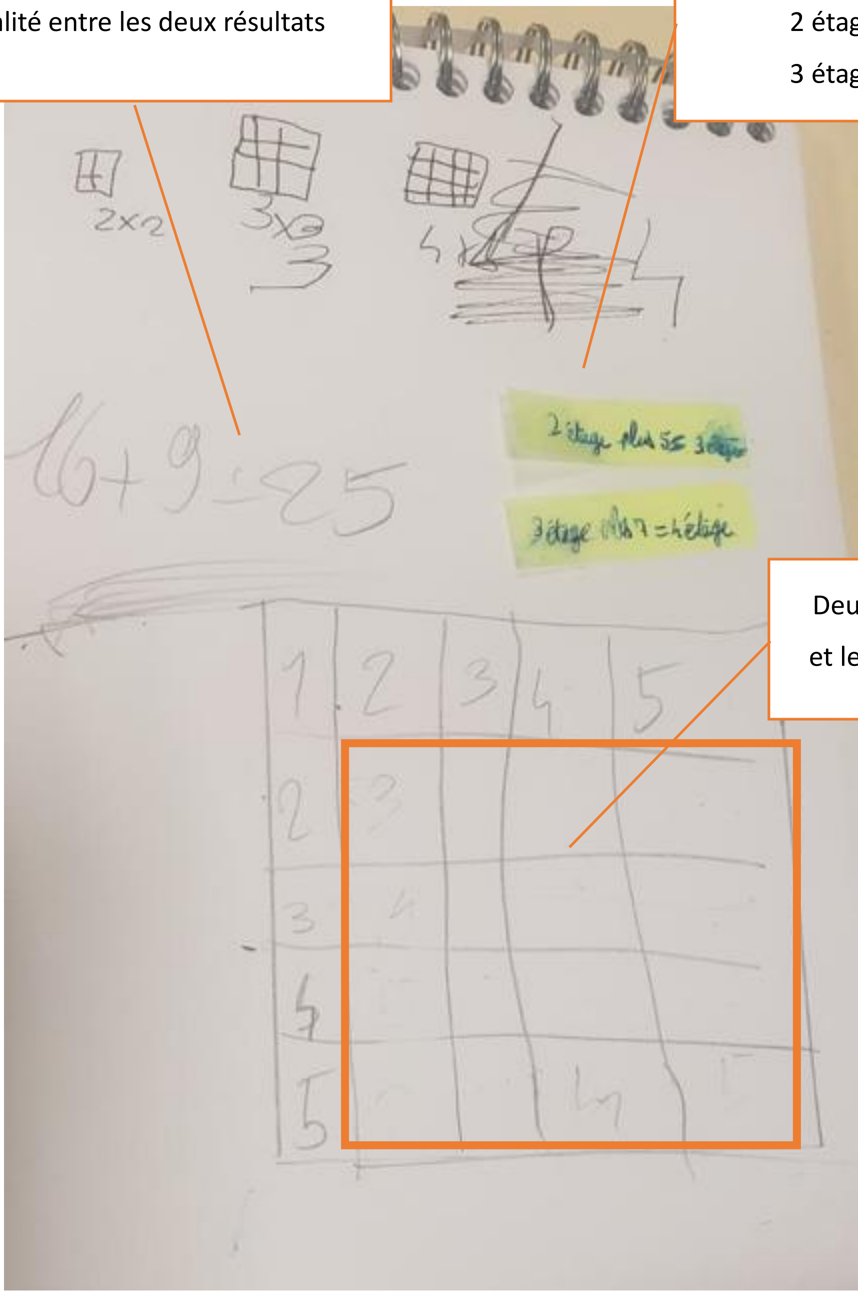
(Classe d'Ingrid, CM1) Ici on voit que la construction sert la conceptualisation, les informations sont portées mais pas assez bien organisées, si bien qu'en haut a été commencé la suite du nombre total de carrés : 4, 9, 16, … L'élève fait les sommes successives 1+3 = 4 ; 4 + 5 = 9 ; 9 +7 = 16 ; mais ensuite elle fait 16 + 11 au lien de faire 16 + 9 ce qui provoque une erreur dans la suite des résultats.

⇨ Peut amener à la nécessité d'organiser les données dans un tableau (tableau qui a été proposé dans la classe d'Emilie à la dernier étape).

- des propriétés de ces nombres, ce qui suppose de les mettre en relation : *« ils sont tous impairs », « on en a 16 parce que 4 fois 4 »…*
- des relations d'équivalence :



- d'une généralisation mettant en évidence une opération sur des nombres inconnus qui sont remplacés par un mot qui « condense » en fait toutes les valeurs possibles : « ***le nombre d'étages** multiplié par le nombre d'étages* » qui se transforme en *« c'est **étage** fois étage »* (le mot « étage » remplace « nombre d'étages » et pourra ensuite être réduit par exemple en « e fois e » et « e × e ».
- d'une recherche de relation entre des nombres « *pour le 1 c'est 1 fois 1, pour le 2, c'est 2 fois 2, pour le 3 c'est 3 fois 3 »* (classe d'Emilie, CM2).
- De la recherche de la preuve « Explique pourquoi tu es sûr que cette règle est toujours juste » (Classe d'Emilie, CM2) qui est prévue dans la continuité.



Exemple (Classe d'Ingrid, CM1) : on a une évolution des procédures allant du calcul automatisé du nombre de carrés au total à la prise de conscience de l'évolution du motif et de l'équivalence entre les deux procédures : ajouter 9 carrés aux 16 carrés du motif 4 ou calculer 5 × 5 pour obtenir 25 carrés au total pour le motif 5. Les post-it ajoutés sont une première tentative d'écriture d'une formule à partir d'une structure qu'on retrouve entre les deux (les deux post-it sont collés l'un en dessous de l'autre).

Les savoirs mathématiques construits

- Pour trouver une règle, il faut observer la série commencée en comparant les premiers motifs.
- On peut utiliser la couleur pour mieux repérer les différences et les points communs.
- En mathématiques, une règle est valide à condition qu'elle soit toujours vérifiée.
- Une règle peut être formulée à partir de variations et de relations qu'on peut écrire avec des symboles mathématiques (des nombres et des signes opératoires).
- Pour indiquer que la formule est valable quel que soit le motif qu'on considère dans la série, on peut l'exprimer avec des mots et des opérations.
- Une même règle peut s'exprimer de différentes manières suivant le point de vue qu'on a sur le motif et son évolution. (On pourra voir au cycle 4 que les expressions correspondantes sont équivalentes du fait qu'on peut appliquer les règles du calcul algébrique pour les transformer).

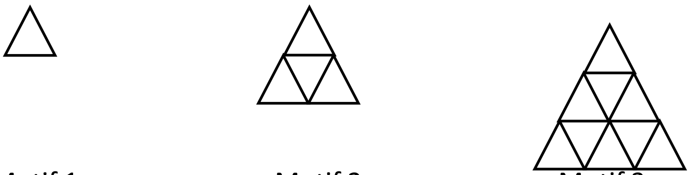
- Une série de motifs évolutifs peut être une modélisation d'une autre série si : les deux motifs commencent par le même motif et la règle de construction est la même. Ici le motif en « carré » peut servir de modélisation du motif en « pyramide ».
  « Visuellement c'est pas pareil mais mentalement c'est pareil » (Sacha,CM2)
  « C'est le même départ et après c'est le même nombre de carrés. » (Elève, CM2)
  « On en ajoute autant à chaque fois » (Elève, CM2)
- Le numéro des motifs augmente de 1 en 1 mais le nombre de carrés augmente de 3, 5, 7… ce n'est pas une valeur constante, il n'y a pas proportionnalité entre le nombre de carrés ajoutés et le numéro du motif. On peut aussi le vérifier parce que pour le motif 2 on a ajouté 3 carrés et pour le motif 4 qui est le double de 2, on a ajouté 7 carrés or 7 n'est pas le double de 3.
- Si on connaît la règle, on n'a pas besoin de dessiner pour compter le nombre de carrés d'un motif quelconque.
- Si on peut calculer une valeur de deux manières différentes on peut écrire l'égalité entre les deux expressions (ici 19 + 6 = 5 × 5)

⇨ Ces savoirs ne vont sans doute pas faire l'objet d'une « leçon » écrite mais ils sont institutionnalisés au cours de la séance et devront être réactivés dans les futures séances.

Une propriété élève est apparue, qu'il s'agit de remettre en question :

« *Ils commencent tous de la même chose, si ça avait été un triangle ça n'aurait pas été pareil. » (Classe Emilie, CM2).*

On peut imaginer repartir de cette affirmation pour relancer l'activité avec l'évolution du motif suivante :



Motif 1 Motif 2 Motif 3