Situation des allumettes

A l'étape n (n étant un entier), on construit une suite de maisons avec un certain nombre d'allumettes u_n.

On obtient une suite de nombres (u_n).

On rappelle que déterminer u_{n+1} à partir de u_n revient à trouver une **formule de récurrence** alors que déterminer u_{n+1} directement à partir du rang $n+1$ revient à trouver une **formule explicite**.

On peut considérer le premier terme de la suite comme étant u_1 (avec u_1= 5) car seule l'étape 1 est donnée sur le document distribué aux élèves, mais on peut aussi supposer qu'il existe une étape 0 pour laquelle u_0 est égal à 1 (la première allumette).

Analyse *a priori* :

Procédure	**Formule de récurrence**	**Formule explicite**
P11 : la première maison a 5 allumettes et les autres en ont 4.	On ajoute 4 allumettes à chaque étape. Il y en a 5 pour la première étape. $u_{n+1} = u_n + 4$ pour $n > 1$	$U_n = 5 + (n-1) \times 4$ pour tout $n > 0$ $99 \times 4 + 5$
P12 : Si on prend les maisons à une étape, on ajoute ensuite 4 allumettes à chacune des étapes suivantes	$u_{n+p} = u_n + p \times 4$ $u_{10} = 21 + 5 \times 4$	
P2 : On prend une allumette et on ajoute toujours 4 allumettes aux étapes suivantes	On ajoute 4 allumettes à chaque étape. Il y en a 1 une au départ. $100 \times 4 + 1$	$U_n = 1 + n \times 4$ pour tout $n > 0$

		
P3 : Chaque maison est construite avec 5 allumettes et quand on les accole, on retire les allumettes qui sont en doublon 	Le numéro de l'étape donne le nombre de maisons, on le multiplie donc par 5 et on retire une allumette pour chacune des étapes sauf la première. $5 \times 100 - 99$	$U_n = n \times 5 - (n\text{-}1)$ pour tout $n > 0$
P4 : Si je prends deux configurations et que je les accole, je dois retirer une allumette qui est en doublon à l'endroit où on les accole et on a l'étape qui correspond à la somme des deux étapes des configurations considérées.	La propriété générale peut s'écrire : $u_{n+p} = u_n + u_p - 1$ En particulier $21 + 21 - 1$ pour calculer le nombre d'allumettes à l'étape 10 en fonction du nombre d'allumettes à l'étape 5.	
P5 : Si je prends une étape, je peux multiplier par un coefficient le nombre d'allumettes et trouver le nombre d'allumettes à l'étape multipliée par ce même coefficient en retirant autant d'allumettes et en ajoutant 1 pour l'allumette supplémentaire de la maison de départ.	Pour 100, je peux prendre l'étape 10 et multiplier par 10 : $41 \times 10 - 10 + 1$ $u_{n \times k} = k \times u_n - k + 1$	
P6 : Pour une étape je considère les maisons centrales en disant qu'elles ont toutes 4 allumettes puis j'ajoute la première qui a 5 allumettes et la	$4 \times 98 + 5 + 5 - 1$	$U_n = (n - 2) \times 4 + 5 + 5 - 1$ pour tout $n > 2$

dernière qui a 5 allumettes moins 1 allumette pour l'accoler.		

Registres sémiotiques mobilisés par les élèves

On peut identifier différents registres et repérer quand la production est contextualisée (il est encore fait référence aux objets matériels : maisons, allumettes…) et quand elle est décontextualisée (il n'est plus question que de nombres). On peut repérer que certaines productions relèvent d'une généralisation mais elle peut se présenter sous différentes formes sans être dans un registre algébrique du fait d'une organisation de l'écriture (alignement des opérations par exemple).

A travers l'utilisation des registres on peut identifier des points de vue différents sur la situation :

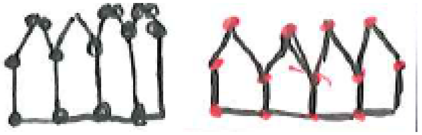
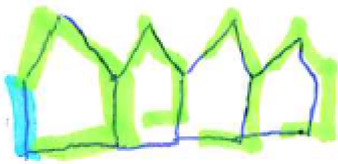
- Le point de vue fonctionnel met en relation le numéro de l'étape avec le nombre d'allumettes
- Le point de vue récurrent met en évidence la transformation d'une étape à l'autre
- Le point de vue explicite cherche à exprimer une règle générale permettant le calcul pour n'importe quelle étape directement
- Le point de vue propriété met en évidence des règles qu'il s'agirait sans doute de prouver

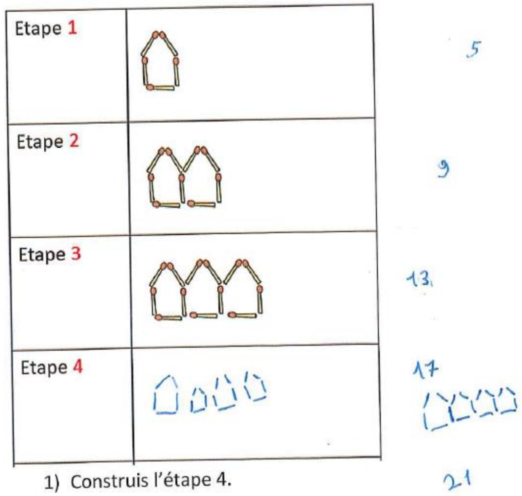
Le travail algébrique peut porter sur la comparaison de ces écrits et points de vue pour voir comment ils sont en lien, peuvent se déduire les uns des autres, peuvent donner des procédures plus efficaces dans certains cas etc.

Par exemple pour une étape très éloignée, si on ne connaît pas une étape proche, la forme explicite est préférable, par contre si on connaît le nombre d'allumettes pour une étape et qu'on cherche la précédente ou la suivante, la forme récurrence est plus rapide.

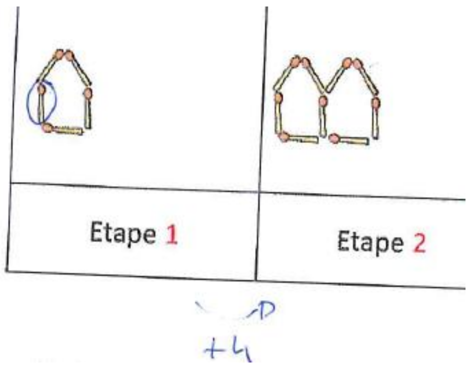
Quel que soit le point de vue, on peut essayer de repérer toute trace d'une pensée algébrique dans le fait que l'élève met en évidence un algorithme de calcul ou si des mots attestent d'une généralisation (« toujours », « pour tous… », « à chaque fois »…).

Dans le tableau ci-dessous des exemples dans les productions des élèves et leur interprétation.

Registre	Contextualisé	Décontextualisé	Erreurs, essais
Dessin			
Langage naturel	Parce il y a une maison d'allumette ou il y a 5 allumette et les autres il y a 4 allumette On fait toujour plus 4 allumette.	Il faut 41 allumettes et sa fini toujour par un chifre inpaire. à chaque fois +4 **Importance des mots « toujours », « à chaque fois » qui expriment la généralisation** On ajoute l'étape 5 à l'étape 5 puis on retire 1.	

Tabulaire			
Algorithme de calcul		On fait 4x10+1=41. 4x100+1=401 on met 5+ 4x49 = 201 étapes 100 5 + ~~99~~ 4x99 = 401 étape 300 5+4x299 = mille - deux - un 5+4x2099 =	~~42 car 2x5=10~~

Formule algébrique			
Fonction	1maison = 5 allumettes 5maison = 21 allumettes 10maisons = 41	1 = 5 2 = 9 ect... 5 = 21 Étape 5 21	
Raisonnement	Parce que 21 + 21 = 42 42 - 1 = 41 pourquoi parce que sinon on aura conte 2 fois 1 allumettes. Car il y a 17 + 4 = 21. **Utilisation de connecteurs logiques « parce que » et « car ».** Construis l'étape 4. je rajoute 4 a chaque foix donc 5x4=20 20+21=41 **Utilisation de « donc »**	21 ducou si a chaque foit on doi rajoutai 4 il frai frain 5x4+21 sa fait 41 **Connecteurs logiques « si » et « du coup »**	

Symbolique			

Analyse des procédures mobilisées :

Au niveau du nombre de procédures mobilisées suivant les différentes étapes :

Procédure	étape 4	étape 5	étape 10	étape 100
11	0	3	1	8
12	0	3	8	0
2	1	0	1	8
3	0	1	0	2
4	0	0	9	0
5	0	0	0	2
6	0	0	1	0
vide	22	16	3	3

On remarque que si un seul élève montre sa procédure pour l’étape 4 alors qu’il n’était demandé que de dessiner à cette étape, on voit que 7 élèves n’expliquent pas leur procédure à l’étape 5 (30%) alors qu’il n’y en a plus que 3 aux étapes 10 et 100 (87%) dont un qui n’a rien justifié, et deux autres qui semblent ne pas voir eu le temps de traiter le dernier cas.

Par ailleurs, 4 élèves utilisent plusieurs procédures sur une même étape (seule la première est répertoriée dans le tableau des procédures), cette démarche permet de valider ou invalider le résultat mais aussi elle permet de confirmer le changement de procédure. A chaque fois, c'est la procédure 11 qui est mobilisée pour vérifier une autre procédure.

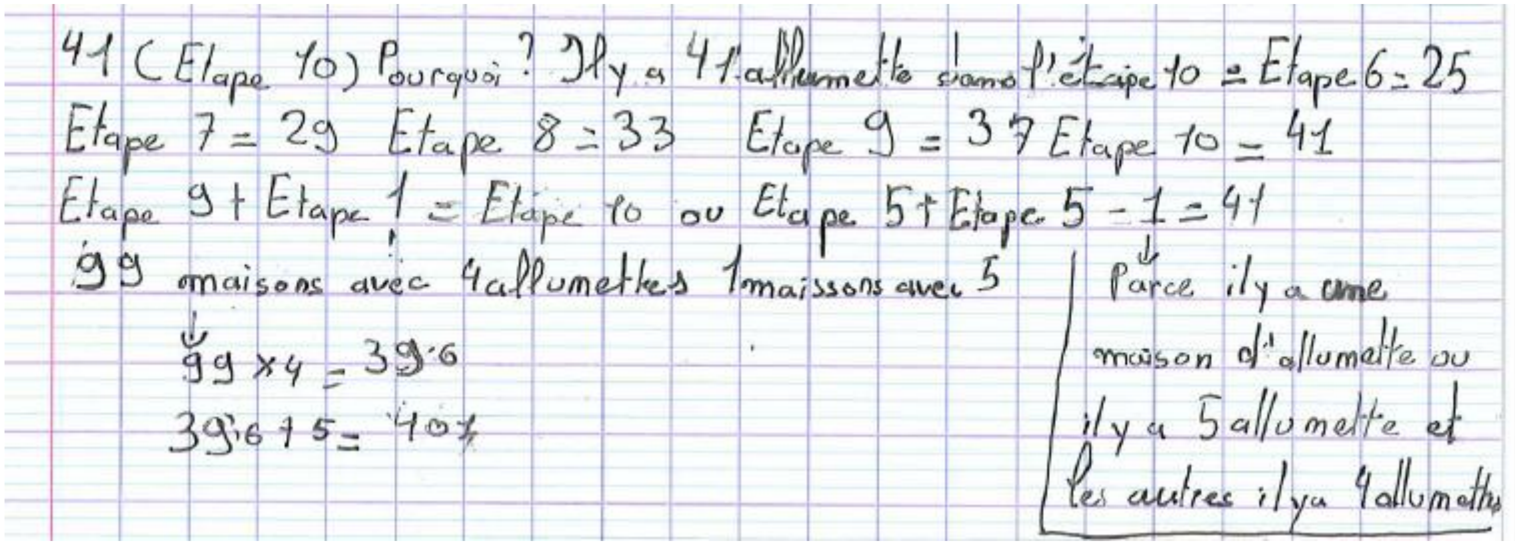
Il est remarquable de voir que 74% des élèves ont mobilisé différentes procédures, ils ont changé de procédure entre les étapes. En particulier on voit que la procédure 1 (que ce soit 11 ou 12) est mobilisée pour les premiers cas, mais pour l'étape 100, les élèves préfèrent la procédure 2 (26%).

Qu'est-ce qui induit un changement de procédure ?

Traiter l'étape 5 après l'étape 4 et ayant les étapes précédentes, induit une procédure par récurrence, en remarquant qu'on ajoute 4 à chaque étape (Procédure 12).

Pour traiter l'étape 10, les élèves peuvent avoir envie de continuer sur le même principe :

- Un élève calcule chaque étape successivement :



41 (Etape 10) Pourquoi ? Il y a 41 allumette dans l'étape 10 = Etape 6 = 25
Etape 7 = 29 Etape 8 = 33 Etape 9 = 37 Etape 10 = 41
Etape 9 + Etape 1 = Etape 10 ou Etape 5 + Etape 5 − 1 = 41
99 maisons avec 4 allumettes 1 maissons avec 5
99 × 4 = 396
396 + 5 = 401
Parce il y a une maison d'allumette ou il y a 5 allumette et les autres il y a 4 allumettes

- Parfois la répétition d'une même procédure permet de percevoir une règle générale en cherchant une procédure explicite permettant d'exprimer le nombre d'allumettes à partir de l'étape 1 (Procédure 11). Les autres considèrent le nombre d'étapes à ajouter pour donner directement le nombre total d'allumettes à ajouter au dessin de l'étape 5.

Peu reviennent à l'étape 1 pour calculer le nombre d'allumettes à l'étape 10 car il reste relativement simple de se représenter mentalement l'ajout de 4 allumettes à chaque étape de la 5 à l'étape 10. Par contre, lorsque les élèves cherchent le nombre d'allumettes à l'étape 100, ils reviennent majoritairement à la forme explicite (formule générale du nombre d'allumettes en fonction du numéro de l'étape).

La procédure qui consiste à ajouter le nombre d'allumettes de deux étapes et de retirer une allumette n'est mobilisée que dans le cas de l'expression à l'étape 10 en la considérant comme le double de l'étape 5. Elle est mobilisée par 40% des élèves (mais il faudrait savoir quel discours a été mené en classe au sujet de cette procédure pour savoir si elle a été mobilisée spontanément ou induite par une explication de la procédure en plénière). Lorsque les élèves modélisent l'étape 100 comme étant 10 fois l'étape 10, ils peuvent rester bloqués sur le nombre de doublons à retirer :

Pour arriver à l'étape 100 on fait fois dix à l'étape 10, on arrive a + 10 allumettes donc on enlève 10 et après on fait +1, ça fait donc 401 allumette

100 10 maisons = 41 => 41 x 10 = 410 => 410 - 10 = 400 + 1 = 401

Pour l'étape 100 c'est 10 x 10 donc 41 x 10 = 410 alors il y a 410 allumettes dans l'étape 100