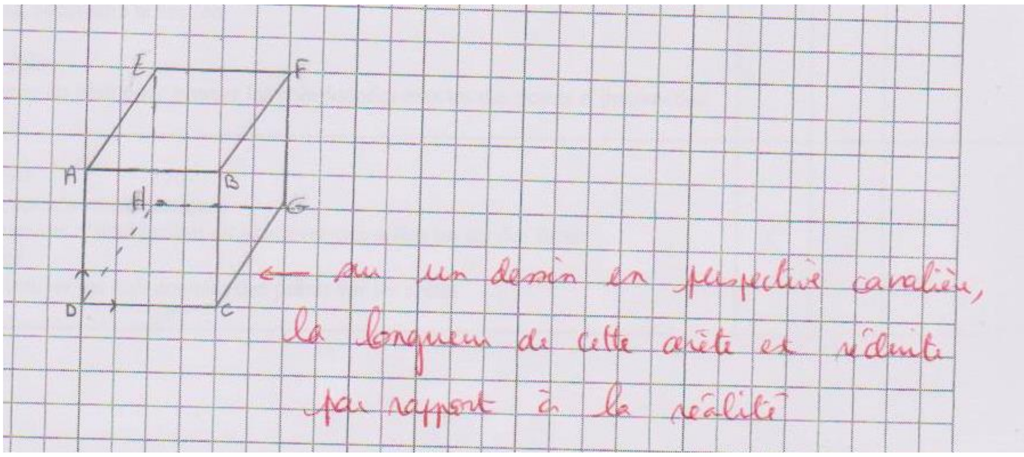
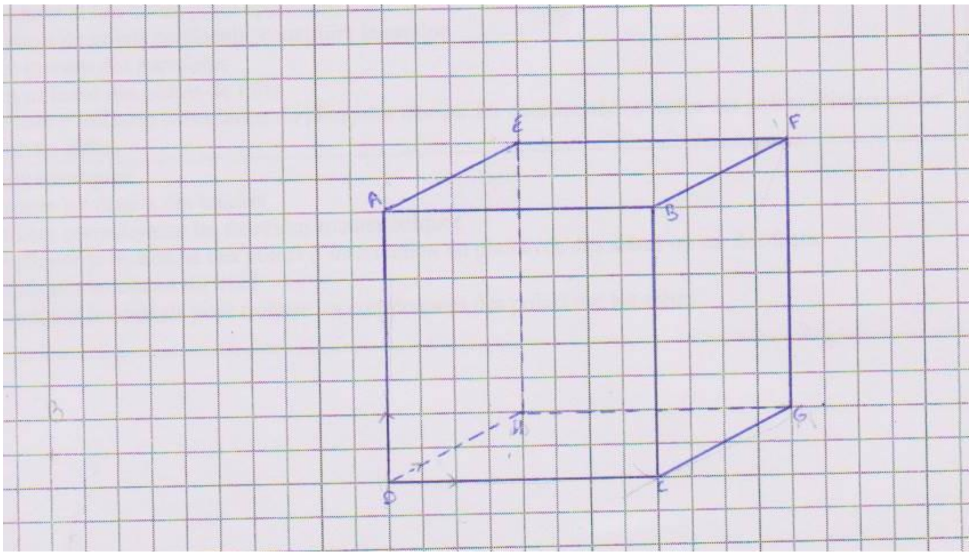
# Représenter le cube et le repère

Il faut construire une figure correcte …




et bien comprendre le repère donné




A(4 ; 0 ; 0) B(4 ; 4 ; 0)
C(0 ; 4 ; 0) D(0 ; 0 ; 0) E(4 ; 0 ; 4)
H(0 ; 0 ; 4) G(0 ; 4 ; 4)

# Utiliser l’équation du plan

Essayer de la résoudre ???

$9x - 5y + 12z - 15 = 0$

$\Leftrightarrow x - \frac{5}{9}y + \frac{12}{9}z = \frac{15}{9}$

$\Leftrightarrow \frac{5}{9}y - \frac{12}{9}z + \frac{15}{9} = x$

$\frac{9}{5}x - y + \frac{12}{5}z = \frac{15}{5}$

$\Leftrightarrow \frac{9}{5}x + \frac{12}{5}z - 3 = y$

$\frac{9}{12}x - \frac{5}{12}y + z - \frac{15}{12} = 0$

$\frac{9}{12}x - \frac{5}{12}y - \frac{15}{12} = -z$

$-\frac{9}{12}x + \frac{5}{12}y + \frac{5}{4} = z$

$$\begin{cases} \frac{5}{9}y - \frac{12}{9}z + \frac{15}{9} = x \\ \frac{9}{5}x + \frac{12}{5}z - 3 = y \\ -\frac{9}{12}x + \frac{5}{12}y + \frac{5}{4} = z \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \frac{9}{5}\left(\frac{5}{9}y - \frac{12}{9}z + \frac{15}{9}\right) + \frac{12}{5}z - 3 = y$

$\Leftrightarrow y - \frac{12}{5}z - 3 + \frac{12}{5}z + 3 = y + \cancel{6} \Leftrightarrow y = -6.$

$\Leftrightarrow y = y$ ...!

Tester quelques points particuliers …

$D(0,0,0)$ ; $A(4;0,0)$ $H(0,0,4)$ $C(0;4,0)$

$9x - 5y + 12z - 15 = 0$

$\Leftrightarrow 9x = 5y - 12z + 15$

$\Leftrightarrow x = \frac{5y - 12z + 15}{9}$

$\frac{5y - 12z + 15}{9} - 5y + 12z - 15 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{5y - 45y}{9} - \frac{12z + 108z}{9} - 15$

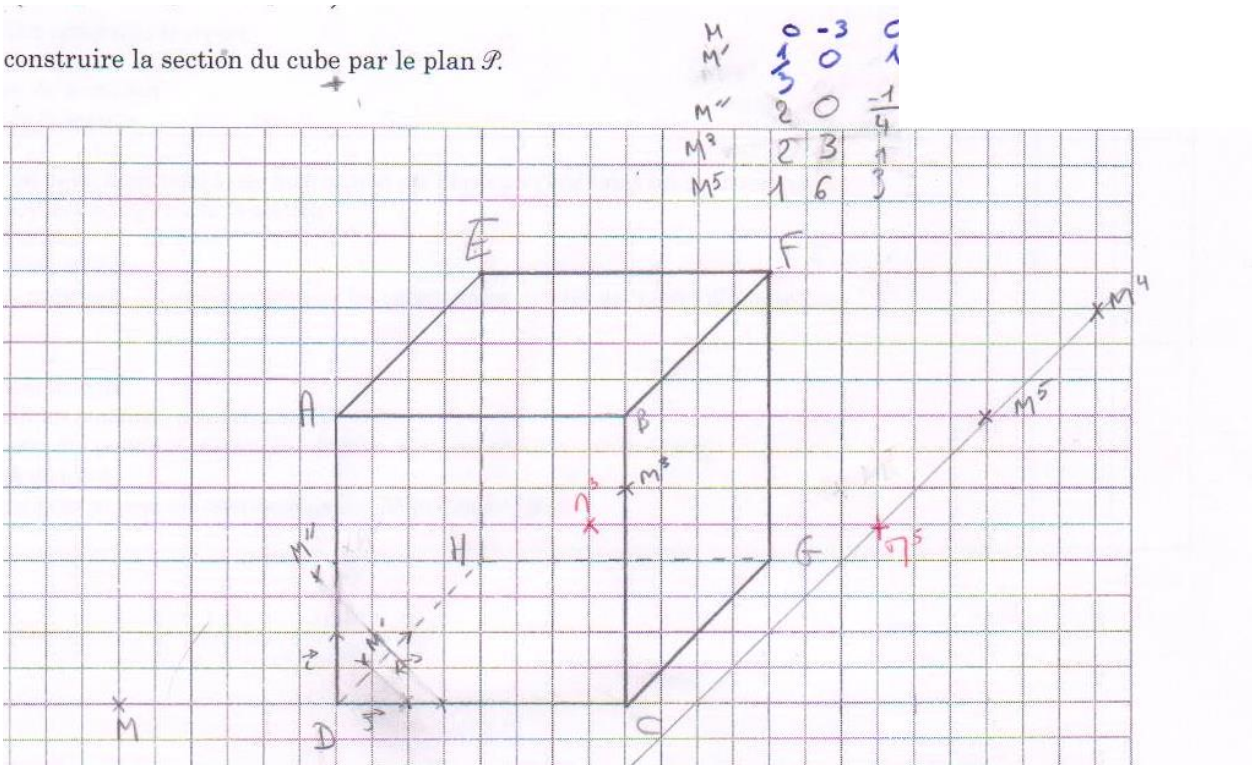
$\Leftrightarrow \frac{40y}{9} = \frac{-12z + 108z}{9} - 15$

$\Leftrightarrow y = 9\left(\frac{96z}{9} - 15\right) / 40 = \frac{96z - 135}{40}$

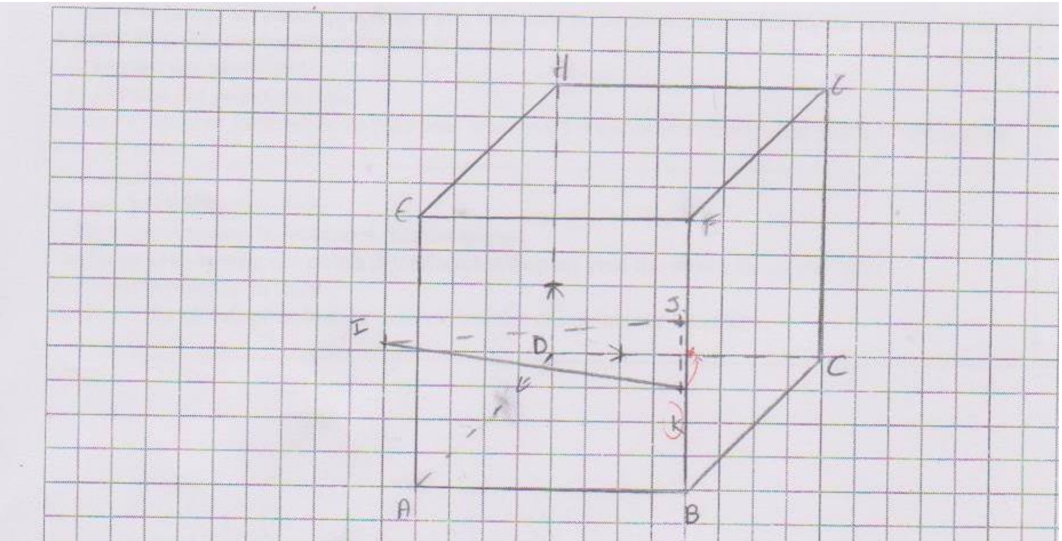
$z$ On essaye avec plusieurs points :

| | | |
|---|---|---|
| D → non | C → non | F → non |
| A → non | H → non | G → non ... |
| B → non | E → non | |

"Trouver" des points du plan …




et savoir ce que signifie "la section du cube par le plan P ".




$P : 9x - 5y + 12z - 15 = 0$

$\Leftrightarrow 9x - 5y + 12z = 15$

$9x = 15 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$

$-5y = 15 \Leftrightarrow y = -3$ $\quad I\left(\frac{5}{3} ; -3 ; \frac{5}{4}\right)$

$12z = 15 \Leftrightarrow z = \frac{5}{4}$

$x = 1 \rightarrow 9 - 5y + 12z = 15$

$y = 2 \rightarrow -1 + 12z = 15$ $\quad J\left(1 ; 2 ; \frac{4}{3}\right)$

$12z = 16 \Leftrightarrow z = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$

$x = 2 \rightarrow 18 - 5y + 12z = 15$

$y = 3 \rightarrow 3 + 12z = 15$ $\quad K(2 ; 3 ; 1)$

$12z = 12 \Leftrightarrow z = 1$

**Il faut chercher des points intéressants, c'est-à-dire sur les axes du repère (qui prolongent des arêtes du cube).**

~~9x~~ On cherche un point sur l'axe $\vec{DA}$,

y et z sont $= 0$ — On a donc $9x - 15 = 0$

$$9x = 15$$

$$x = 5/3$$

On a alors le point $I(5/3\,;0\,;0)$

Le point J tel que $x=0$ et $z=0$ : $-5y - 15 = 0$

$$-5y = 15$$

$$y = -3$$

On a alors le point $J(0\,;-3\,;0)$

Le point K tel que $x=0$ et $y=0$ : $12z - 15 = 0$

$$12z = 15$$

$$z = 5/4$$

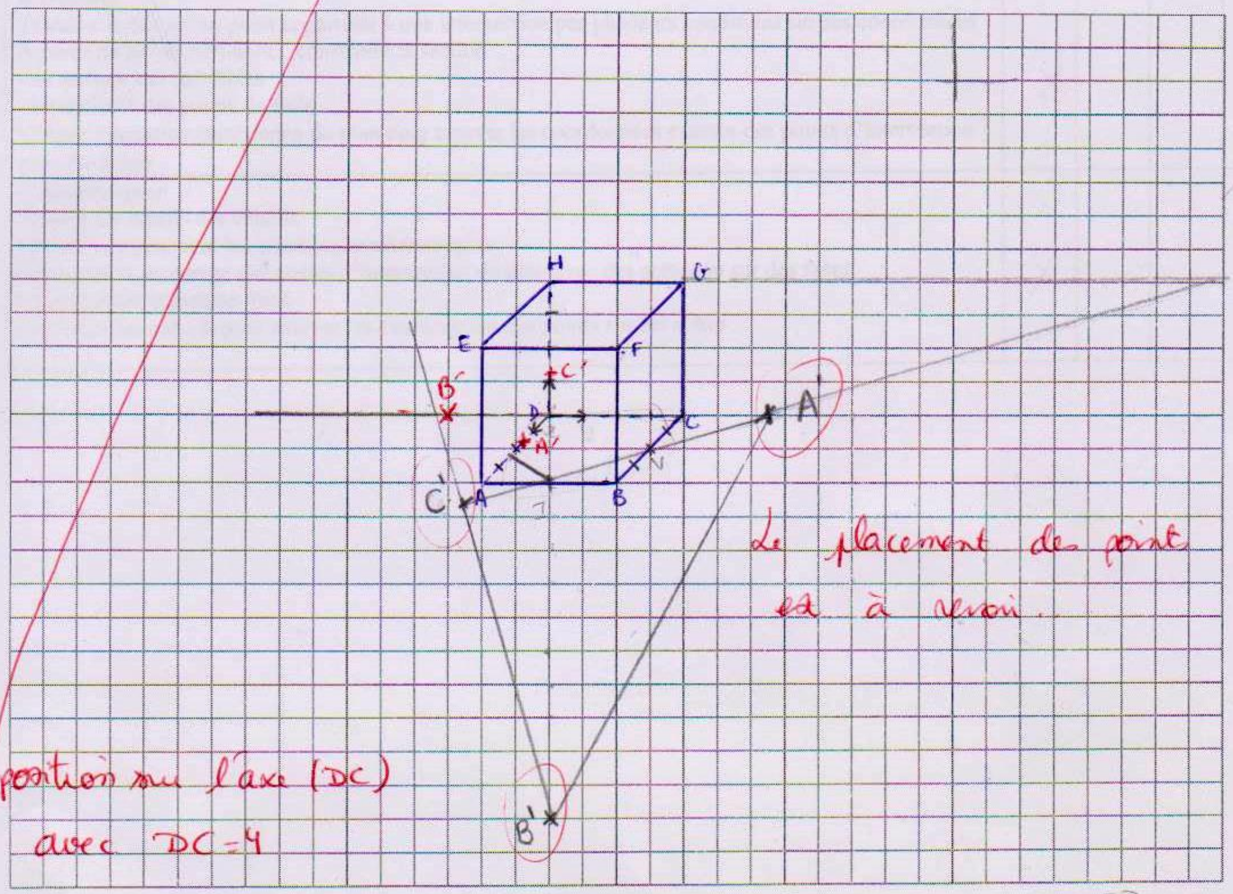
$K(0\,;0\,;5/4)$

Attention à bien placer les points !

*ABCDEFGH* est un cube d'arête 4.

Dans le repère $\left(D\,;\ \frac{1}{4}\overrightarrow{DA}\,;\ \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}\,;\ \frac{1}{4}\overrightarrow{DH}\right)$, on considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $9x-5y+12z-15=0$.

Déterminer et construire la section du cube par le plan $\mathcal{P}$.




$A'(x_A\,;0\,;0) \to 9x_A - 5\times0 + 12\times0 - 15 = 0$

$9x_A = 15$

$x_A = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$

$B'(0\,;y_B\,;0) \to 9\times0 - 5\times y_B + 12\times0 - 15 = 0$

$-5y_B = 15$

$y_B = -3$

$C'(0\,;0\,;z_B) \to 9\times0 - 5\times0 + 12z_B - 15 = 0$

$12z_B = 15$

$z_B = \frac{15}{12} = 1{,}25$

$(A', B'C') \in \mathcal{P}$

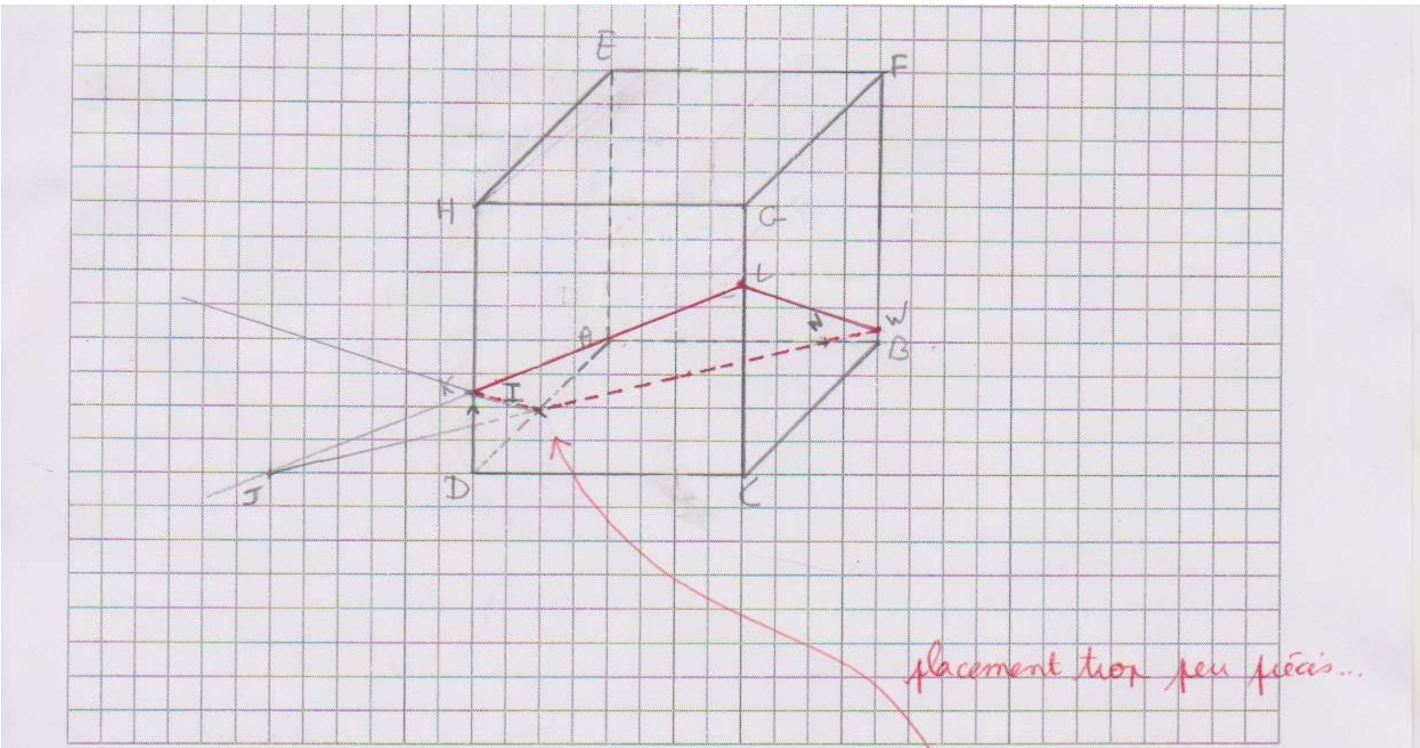
$\overrightarrow{DI} = 1\,\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}$

Attention à la précision de la construction !




On choisit un point appartenant à la droite (DA) tel que $y=0$ et $z=0$

On veut que ce point, I appartiennent au plan tel que $9x-5y+12z-15=0$

$9x-5\times0+12\times0-15=0 \Leftrightarrow 9x-15=0 \Leftrightarrow 9x=15 \Leftrightarrow x=\frac{5}{3}$

De la même façon on définit le point J appartenant à (DC) tel que $x=0$ et $z=0$. Pour que J appartienne à P il faut que $9x-5y+12z-15=0 \Leftrightarrow y=-3$

On réalise la même chose pour K tel que $x=0$ et $y=0$.

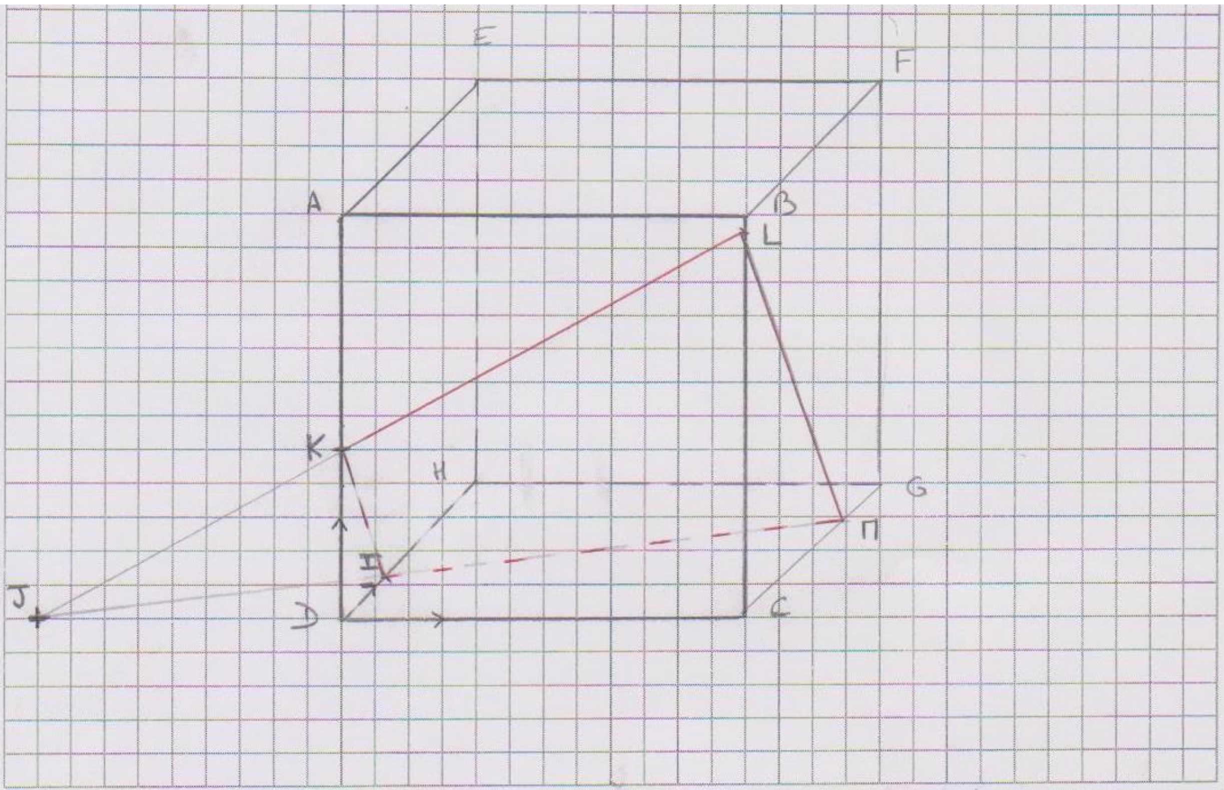
$9x-5y+12z-15=0 \Leftrightarrow 12z=15 \Leftrightarrow z=\frac{5}{4}$.

On nomme la section KINWL.

$(JK)\cap(GC)=L$ donc $P\cap(DCG)=(KL)$. Par parallélisme on construit (NW) →

(LW) est obtenu par parallélisme avec (KI). On a ensuite relié I et N. Nous ne sommes pas sûr que I, N et W sont alignés dans la réalité.

Un bon choix des dimensions de la figure peut faciliter le placement des points




$I(0;0;z)$ $\quad$ $I(0;0;\frac{5}{4})$

$J(0;y;0)$ $\quad$ $J(0;-3;0)$

$K(x;0;0)$ $\quad$ $K(\frac{5}{3};0;0)$

construction de L : $J \in (DC)$ donc $J \in (ADC)$
$K \in (AD)$ donc $K \in (ADC)$
donc $(JK) \subset (ADC)$

construction de M : $I \in (DH)$ donc $I \in (DCH)$
$J \in (DC)$ donc $J \in (DCH)$

Attention aux erreurs de calcul !

$P : 9x - 5y + 12z - 15 = 0$

$\ast \quad \left.\begin{array}{l} 9x = 15 \\ x = \dfrac{15}{9} = \dfrac{5}{3} \end{array}\right\}$ Intersection (DA) et P
$I\left(\frac{5}{3} ; 0 ; 0\right)$

$\ast \quad \left.\begin{array}{l} -5y = 15 \\ y = -3 \end{array}\right\}$ Intersection (DC) et P
$J(0 ; -3 ; 0)$

$\ast \quad \left.\begin{array}{l} 12z = 15 \\ z = \dfrac{15}{12} = \dfrac{5}{4} \end{array}\right\}$ Intersection (DH) et P
$K\left(0 ; 0 ; \frac{5}{4}\right)$

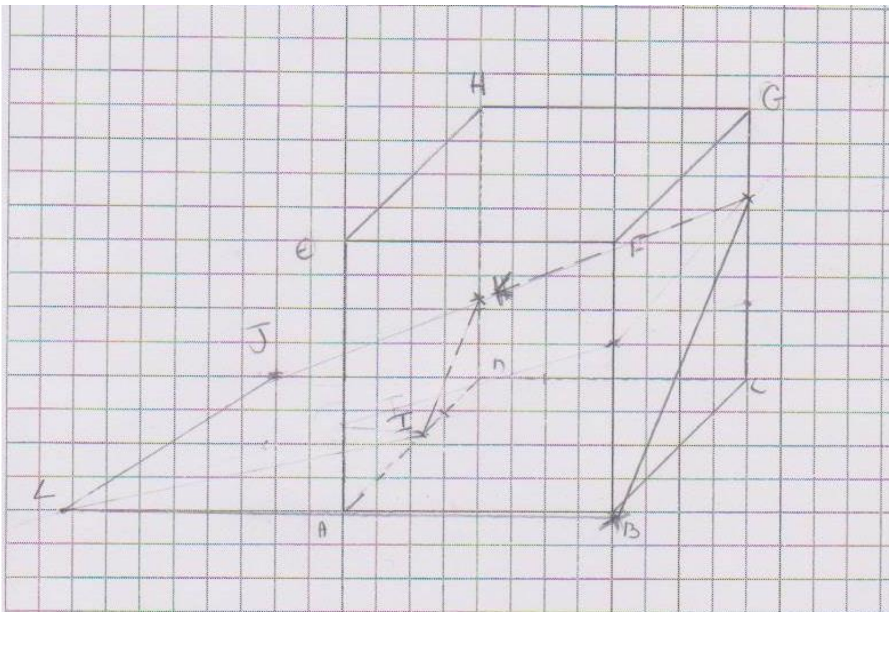
$\ast$ Intersection de (AB) et P :

$x = 4 \Rightarrow 9 \times 4 - 5y = 15$

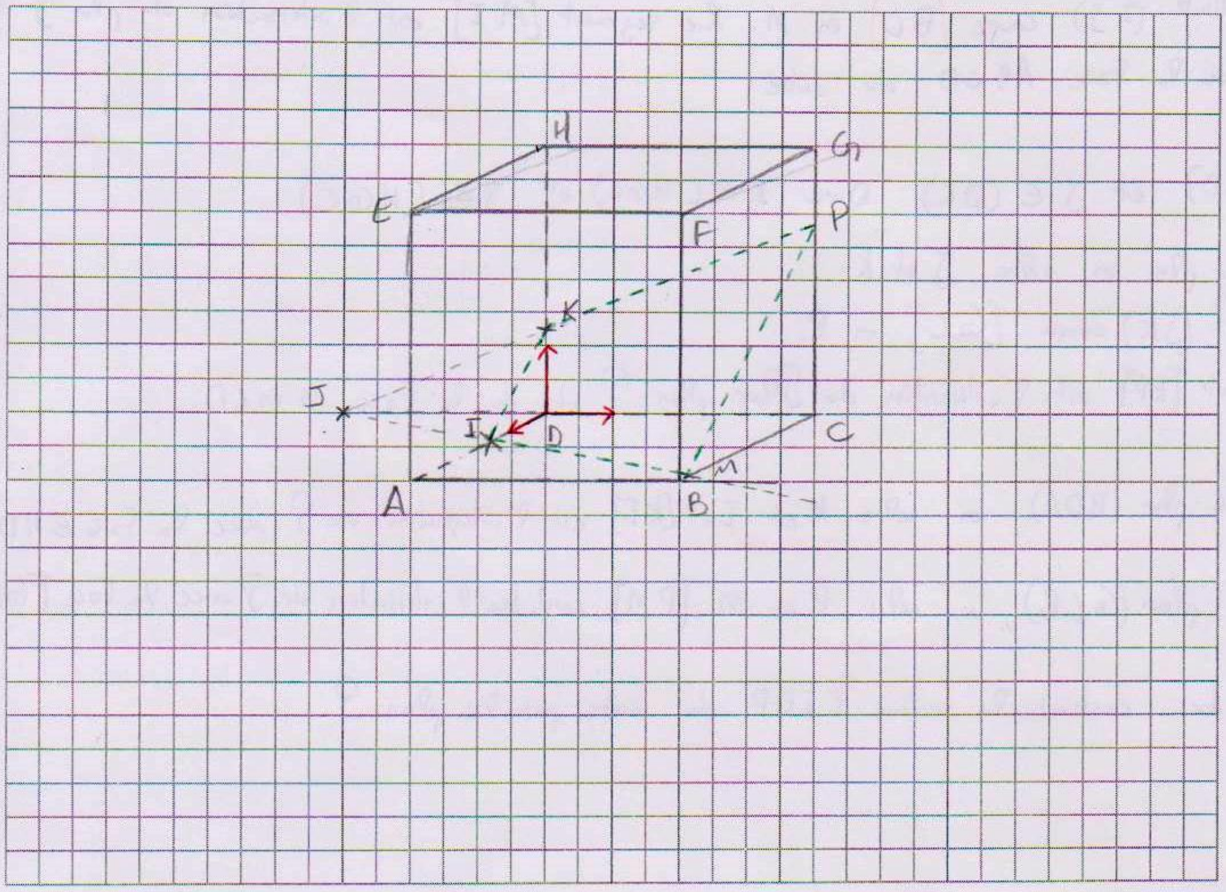
$-5y = -21$

$y = \dfrac{+21}{5}$

On peut les détecter sur la figure …



# Voici un travail (presque) complet et bien rédigé :




On cherche les points I, J et K appartenant respectivement à l'axe $Ox$ ; $Oy$ ; $Oz$ et tous 3 appartenant au plan $\mathcal{P}$. Donc $I(x;0;0)$ $J(0;y;0)$ $K(0;0;z)$

On a donc pour I : $\begin{cases} 9x-5y+12z-15=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x-15=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{3} \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow I\left(\frac{5}{3};0;0\right)$

J : $\begin{cases} x=0 \\ 9x-5y+12z-15=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ -5y-15=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-3 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow J(0;-3;0)$

K : $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ 9x-5y+12z-15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ 12z-15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow K\left(0;0;\frac{5}{4}\right)$.

On place les points I, J et K dans le repère $\left(D; \frac{1}{4}\vec{DA}; \frac{1}{4}\vec{DC}; \frac{1}{4}\vec{DH}\right)$

$I \in (AD)$ et $J \in (DC)$ Donc $I \in (ADC)$ et $J \in (ADC)$.

Dans ce plan on peut donc relier J et I.
La droite (IJ) coupe [BC] en M. Le segment [MI] est l'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la face ABCD du cube.

$K \in (HD)$ et $J \in (DC)$ Donc $K \in (HGC)$ et $J \in (HGC)$

Dans ce plan on relie J et K.
La droite (JK) coupe [GC] en P.
Le segment [KP] est l'intersection du ~~plan~~ plan $\mathcal{P}$ et de la face HGCD.

Dans le plan (HDA), on relie K et I. [KI] est l'intersection de $\mathcal{P}$ avec la face EHDA.

Dans le plan (GCB), on relie P et M. [PM] constitue l'intersection de $\mathcal{P}$ avec la face FGCB.

On a donc construit la section KIBP du cube par le plan $\mathcal{P}$.

# Il reste à déterminer précisément les coordonnées des points M et P …

**Pour le point M**

La droite (BC) est caractérisée par $\begin{cases} y=4 \\ z=0 \end{cases}$

<u>Méthode 1</u> : utiliser une représentation paramétrique de la droite (IJ)

· $I\left(\frac{15}{9} ; 0 ; 0\right)$ et $J(0 ; -3 ; 0)$

$\Rightarrow \overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} -\frac{15}{9} \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

une représentation paramétrique passant par J et ayant $\overrightarrow{IJ}$ comme vecteur directeur s'écrit :

$$\begin{cases} x = -\frac{15}{9} t \\ y = -3 - 3t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$$

$9 \times \left(-\frac{15}{9} t\right) - 5(-3 - 3t) + 12 \times 0 - 15$

$= -15t + 15 + 15t - 15 = 0$

(IJ) ∈ ~~à l'intersection~~ du plan P d'équation $9x - 5y + 12z - 15 = 0$

On résout le système $\begin{cases} x=-\frac{5}{3}t \\ y=-3-3t=4 \\ z=0 \end{cases}$ On obtient $\mathbf{M}\left(\frac{35}{9};4;0\right)$

<u>Méthode 2</u> : utiliser l'équation cartésienne du plan P

On résout le système $\begin{cases} 9x-5y+12z-15=0 \\ y=4 \\ z=0 \end{cases}$ On obtient $\mathbf{M}\left(\frac{35}{9};4;0\right)$

**Pour le point P**

On résout (par exemple) le système $\begin{cases} 9x-5y+12z-15=0 \\ x=0 \\ y=4 \end{cases}$ On obtient $\mathbf{P}\left(0;4;\frac{35}{12}\right)$