Partie I

a. $\frac{5}{13} = 0,\overline{384615}$, $\frac{4}{17} = 0,\overline{2352941176470588}$.

b. La longueur maximale est de 148 et dans ce cas la longueur est effectivement de 148.

c. Dans la division de *a* par *b* il y a au plus *b - 1* restes non nuls possibles. Au plus tard au bout de la $(b-1)^e$ décimale on retrouve un reste déjà rencontré.

d. $5,\overline{0} = 5$; $5,\overline{0} - 4,\overline{9} = 0,\overline{0} = 0$; $5,\overline{0} = 4,\overline{9} = 5$ et plus généralement, tout nombre décimal a deux écritures décimales illimitées périodiques minimales distinctes.

Partie II

a. $x = 3,\overline{117}$; $1000x = 3117,\overline{117}$; $1000x - x = 3117,\overline{117} = 3114$ et $x = \frac{3114}{999} = \frac{346}{111}$.

b. $y = 0,\overline{96} = \frac{96}{99} = \frac{32}{33}$.

c. $(z - 2,357) \times 10^3 = 0,\overline{81}$. Or en appliquant la même méthode qu'à la question précédente, on a $0,\overline{81} = \frac{81}{99}$.

Ainsi, $z = \frac{81}{99000} + \frac{2357}{1000}$ soit $z = \frac{233424}{99000}$.

d.

__Etude préliminaire :__ Si $x = 0,\overline{a_1a_2\ldots a_p}$, où $p \in \mathbb{N}^*$, alors $10^p x = a_1\ldots a_p, \overline{a_1a_2\ldots a_p}$. D'où $(10^p - 1)x = a_1\ldots a_p$ puis $x = \frac{a_1\ldots a_p}{10^p - 1}$ (car $p \neq 0 \Rightarrow 10^p - 1 \neq 0$). Or $a_1\ldots a_p \in \mathbb{N}$, $10^p - 1 \in \mathbb{N}^*$ donc $x \in \mathbb{Q}$.

__Cas général__ : Soit *y* un nombre ayant une écriture décimale illimitée périodique. Notons *p* la longueur de la période. On désignera par $\overline{a_1a_2\ldots a_p}$ la période de *y*.

Deux cas peuvent se présenter :

__1er cas__ : La période dans l'écriture décimale illimitée est la partie décimale.

Autrement dit, en utilisant les notations précédentes, il existe $y_0 \in \mathbb{N}$ et $x = 0,\overline{a_1a_2\ldots a_p}$ tels que $y = y_0 + x$.
D'après l'étude préliminaire, $x \in \mathbb{Q}$. Or $y_0 \in \mathbb{Q}$ et la somme de deux rationnels est un rationnel donc $y \in \mathbb{Q}$.

__2nd cas__ : La période dans l'écriture décimale illimitée n'est pas la partie décimale. Alors il existe un entier naturel *q* non nul, *q* chiffres $y_1, \ldots, y_q$ et $y_0 \in \mathbb{N}$ tels que :
$y = y_0 + x'$ avec $x' = 0,y_1\ldots y_q\overline{a_1a_2\ldots a_p}$.

Or $10^q x' = y_1\ldots y_q + 0,\overline{a_1a_2\ldots a_p}$ donc, en posant $x'_0 = y_1\ldots y_q$, et $x = 0,\overline{a_1a_2\ldots a_p}$ on a $10^q x' = x'_0 + x$, avec $x_0 \in \mathbb{N}$ et l'étude du premier cas nous assure que $10^q x'$ est rationnel. On en déduit que x' est aussi rationnel puis que $y_0 + x'$ également. Par conséquent $y \in \mathbb{Q}$.

__Conclusion__ : Les parties I et II donnent une caractérisation des nombres rationnels par leur écriture décimale illimitée :
Un nombre est rationnel si et seulement si il admet une écriture décimale illimitée périodique.