MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades nationales de mathématiques

Académie de Nantes

Mercredi 15 mars de 08 heures 30 à 12 heures 40

- Pause de 10 heures 30 à 10 heures 40

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de dix minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Les candidats ne sont pas autorisés à quitter les locaux avant 10 heures.

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Pour l'exercice 2 (série S), une annexe est à rendre avec la copie.

Exercices académiques

10h40 – 12h40

Les candidats traitent **deux exercices.** Ceux de la série S traitent les exercices numéros 1 (*Les chaussettes assorties*) et 2 (*Une histoire d'encerclement de pièces*), les autres traitent les exercices numéros 3 (*Les chaussettes assorties*) et 4 (*La baguette de pain ou le modèle de Hotelling*).

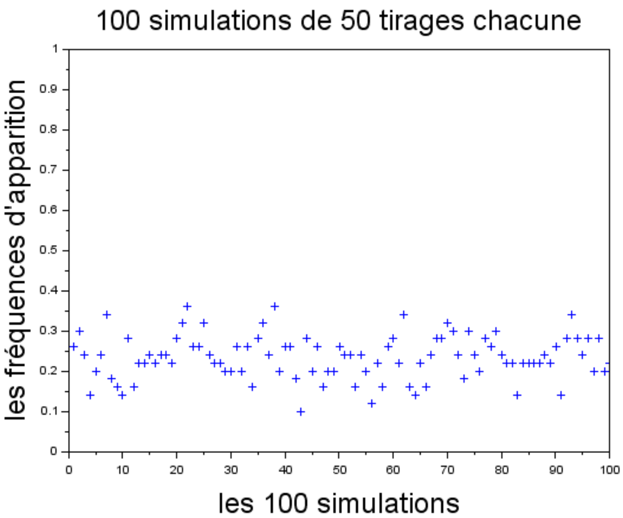
Exercice 1 : Les chaussettes assorties. **<u>(à traiter par les candidats de la série S)</u>**

Tom a dans le tiroir de sa commode un certain nombre de chaussettes grises et de chaussettes bleues, en vrac. Lorsqu'il en tire deux au hasard dans l'obscurité, l'une après l'autre, **une fois sur deux, elles sont grises toutes les deux**.

Le but de l'exercice est de déterminer le nombre de chaussettes contenues dans son tiroir.

1. Dans un premier temps, Tom suppose qu'avec 10 chaussettes bleues et 10 chaussettes grises dans son tiroir, la probabilité d'obtenir deux chaussettes grises serait $p = 0{,}5$.
   Pour tester son hypothèse, il réalise par ordinateur une simulation de 50 tirages de deux chaussettes, l'une après l'autre, dans un tiroir contenant 10 grises et 10 bleues.
   Avec cet échantillon, il calcule la fréquence des couples formés de deux chaussettes grises. Puis, il répète 100 fois cette simulation et obtient le nuage de points ci-contre.

   Selon vous, les résultats obtenus valident-ils l'hypothèse de Tom ?



2. On note g le nombre de chaussettes grises et b le nombre de chaussettes bleues dans le tiroir. On note p la probabilité que les deux chaussettes soient grises.
   a) Montrer que dans le cas $b = 4$ et $g = 12$ on a $p = 0{,}55$.
   b) Calculer p lorsque $b = 7$ et $g = 18$.
   c) Dans cette question, Tom sait que le tiroir contient 204 chaussettes bleues. Il se demande combien il doit avoir de chaussettes grises pour que la probabilité de tirer deux grises soit égale à 0,5. Calculer g lorsque $b = 204$ et $p = 0{,}5$.

3. Sachant que Tom a moins de 250 chaussettes bleues, trouver toutes les répartitions possibles de chaussettes grises et bleues qui conduisent à $p = 0{,}5$.

4. Finalement, Tom n'a, dans son tiroir, que des **paires** de chaussettes à doigts. Il lui faut donc trouver une chaussette grise gauche pour le pied gauche et une chaussette grise droite pour le pied droit.

   En tirant deux chaussettes au hasard de son tiroir, est-il possible que la probabilité d'obtenir une paire de chaussettes grises (une pour le pied gauche et une pour le pied droit) soit égale à 0,5 ?

Exercice 2 : Une histoire d'encerclement de pièces. <u>(à traiter par les candidats de la série S)</u>

Les constructions doivent être réalisées sur l'annexe page 4/6 à rendre avec la copie.

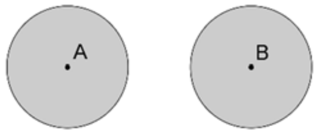
Partie A : *Encercler sans déplacer les pièces.*

On considère n pièces de 1 euro posées sur une table.

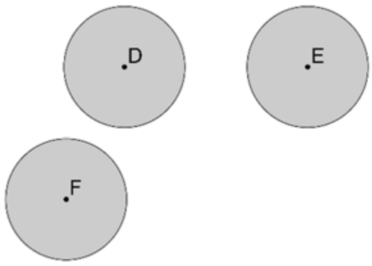
On modélise la position de ces pièces par une configuration dans le plan de n cercles de rayon 1 deux à deux disjoints ou tangents mais non sécants.

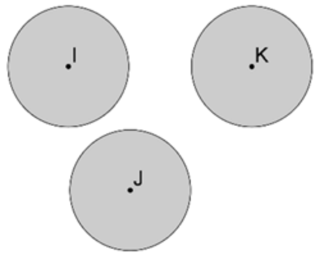
On cherche à tracer un cercle aussi petit que possible contenant les n pièces.

1. **Cas où $n = 2$** : Justifier qu'il existe un cercle de rayon minimal contenant les deux pièces puis le construire sur la figure 1 donnée en annexe.



2. **Cas où $n = 3$** : On pose trois pièces sur la table. Expliquer comment construire un cercle de rayon minimal contenant les trois pièces dans chacun des cas suivants, puis tracer ces cercles sur les figures 2 et 3 données en annexe.





Partie B : *Encercler au mieux en déplaçant les pièces.*

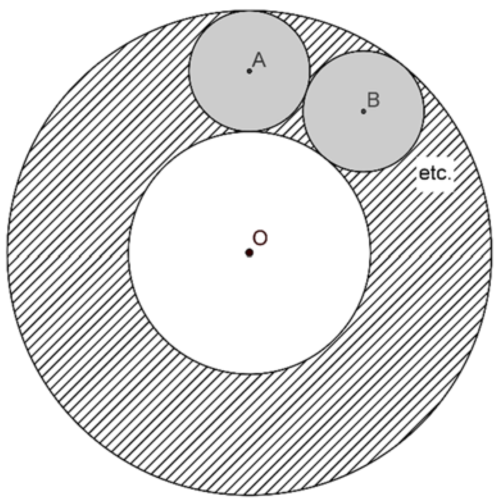
Dans cette partie on cherche à disposer les n pièces de telle façon qu'elles ne se chevauchent pas et qu'elles soient toutes contenues dans un cercle de rayon aussi petit que possible.

Conjecturer les dispositions répondant à la question pour deux, trois, quatre, cinq puis six pièces.

Partie C : C*alcul du rayon minimal.*

1. On donne deux cercles de même centre et de rayons respectifs r = 2 et R = 4.

   Combien de cercles de rayon 1 peut-on mettre à l'intérieur de la couronne hachurée de telle sorte que les cercles ne se chevauchent pas ?



2. Soit r un réel strictement positif. On donne deux cercles de même centre et de rayons respectifs r et r+2.

   À partir de quelle valeur de r peut-on placer cinq cercles de rayon 1 à l'intérieur de la couronne ?

3. Calculer les rayons des cercles conjecturés dans la partie B.

Annexe de l’exercice 2 (à rendre avec la copie).

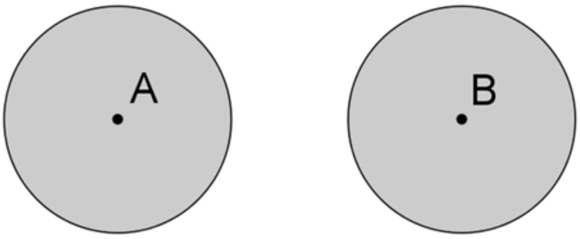


Figure 1

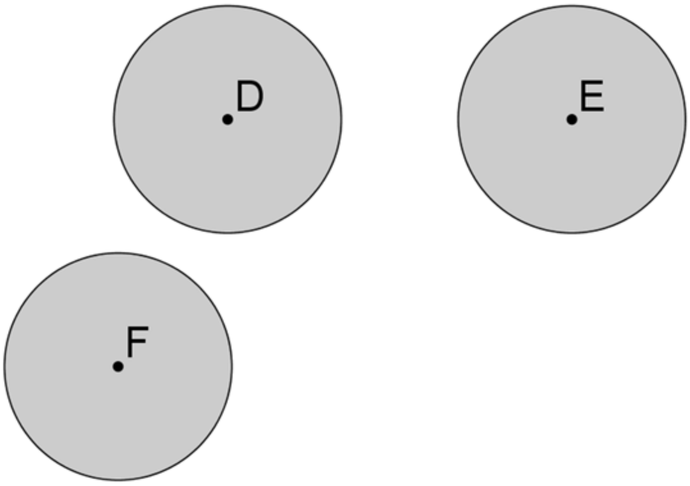


Figure 2

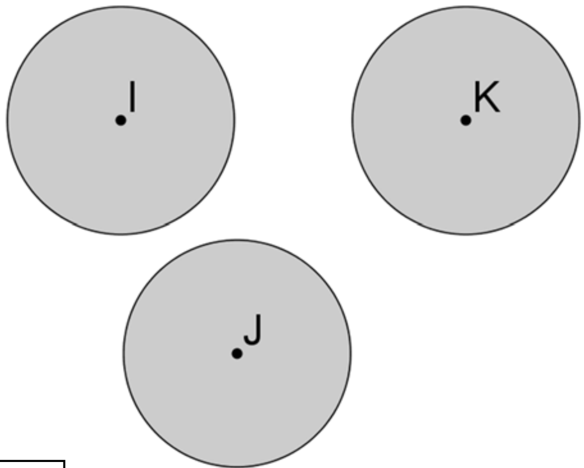


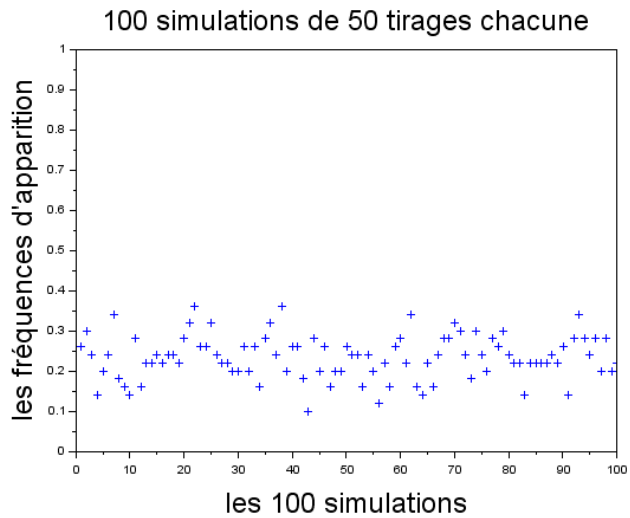
Figure 3

Exercice 3 : Les chaussettes assorties. **<u>(à traiter par les candidats des séries non S)</u>**

Tom a dans le tiroir de sa commode un certain nombre de chaussettes grises et de chaussettes bleues, en vrac. Lorsqu'il en tire deux au hasard dans l'obscurité, l'une après l'autre, **une fois sur deux, elles sont grises toutes les deux**.

Le but de l'exercice est de déterminer le nombre de chaussettes contenues dans son tiroir.

1. Dans un premier temps, Tom suppose qu'avec 10 chaussettes bleues et 10 chaussettes grises dans son tiroir, la probabilité d'obtenir deux chaussettes grises serait $p = 0{,}5$.
Pour tester son hypothèse, il réalise par ordinateur une simulation de 50 tirages de deux chaussettes, l'une après l'autre, dans un tiroir contenant 10 grises et 10 bleues.
Avec cet échantillon, il calcule la fréquence des couples formés de deux chaussettes grises. Puis, il répète 100 fois cette simulation et obtient le nuage de points ci-contre.



Selon vous, les résultats obtenus valident-ils l'hypothèse de Tom ?

2. On note g le nombre de chaussettes grises et b le nombre de chaussettes bleues dans le tiroir. On note p la probabilité que les deux chaussettes soient grises.
   a) Montrer que, lorsqu'il a 4 chaussettes bleues et 12 chaussettes grises, alors $p = 0{,}55$.
   b) Calculer p lorsqu'il a *7* chaussettes bleues et *18* chaussettes grises.
   c) Dans cette question, Tom sait que le tiroir contient 204 chaussettes bleues. Il se demande combien il doit avoir de chaussettes grises pour que la probabilité de tirer deux grises soit égale à 0,5.

   Pour cela, il fait tourner l'algorithme ci-dessous :

```
Initialisation      G prend la valeur 1
                                 P prend la valeur 0
Traitement          Tant que P < 0,5
                                        G prend la valeur G + 1
                                        P prend la valeur G/(G + 204) * (G – 1)/(G + 203)
                                 Fin Tant que
Sortie                     Afficher G, P
```

   Quelles sont les valeurs affichées par cet algorithme en sortie ? Justifier que l'algorithme répond bien au problème de Tom.

3. Sachant que Tom a moins de 250 chaussettes bleues, trouver toutes les répartitions possibles de chaussettes grises et bleues qui conduisent à $p = 0{,}5$.

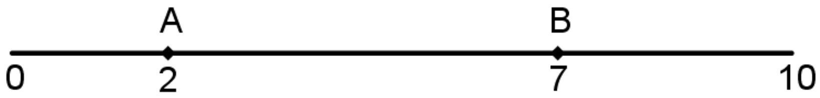
4. Finalement, Tom n'a, dans son tiroir, que des **paires** de chaussettes à doigts, il lui faut donc trouver une chaussette grise gauche pour le pied gauche et une chaussette grise droite pour le pied droit.

   En tirant deux chaussettes au hasard de son tiroir, est-il possible que la probabilité d'obtenir une paire de chaussettes grises (une pour le pied gauche et une pour le pied droit) soit égale à 0,5 ?

Exercice 4 : La baguette de pain ou le modèle de Hotelling. **<u>(à traiter par les candidats des séries non S)</u>**

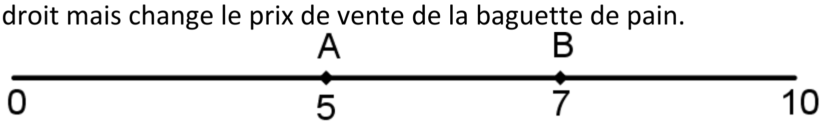
Partie A: Deux boulangeries A et B sont situées sur une route de 10 km de longueur. Dans cette région, la population dont l'effectif total est de 1001 personnes est répartie le long de cette route à raison d'un habitant tous les dix mètres avec une personne à chaque extrémité. Chaque personne achète quotidiennement une baguette de pain dans l'une des deux boulangeries de manière à ce que ce soit le plus économique financièrement, en tenant compte des frais de déplacement aller-retour depuis la résidence de la personne.
Les coûts de transports sont de 5 centimes par kilomètre.
Le coût de fabrication supporté par chaque boulangerie est de 30 centimes par baguette de pain.

1. On suppose que les boulangeries A et B sont situées respectivement à 2 km et 7 km d'une même extrémité de la route et vendent leurs baguettes de pain 1 € et 1,2 € respectivement.



   a) Monsieur Castanier habite à 3km et 2km respectivement des boulangeries A et B. Dans quelle boulangerie doit-il acheter sa baguette de pain afin que cela soit financièrement le plus économique pour lui ?
   b) Existe-t-il une position pour laquelle une personne peut choisir indifféremment la boulangerie A ou B pour acheter sa baguette de pain ? Si oui, on supposera par la suite que celle-ci choisit la boulangerie la plus proche.
   c) Quel est le bénéfice journalier réalisé pour chaque boulangerie ?

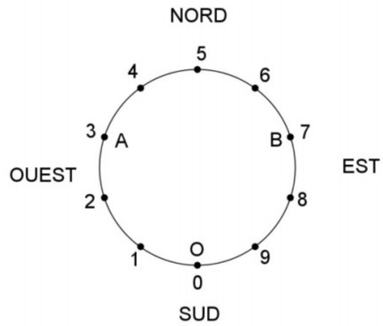
2. Pour gagner de la clientèle, le boulanger A décide de déménager et de se mettre à mi-chemin. Le prix de vente d'une baguette de pain pour la boulangerie est inchangé, c'est-à-dire 1€ l'unité. La boulangerie B reste au même endroit mais change le prix de vente de la baguette de pain.



   On suppose, pour des raisons économiques et commerciales, que le prix d'une baguette choisi par la boulangerie B est compris entre 1 euro et 1, 5 euros.
   Quel doit-être, dans la boulangerie B, le prix de vente d'une baguette de pain afin de réaliser un bénéfice maximal ? Arrondir au centime.

Partie B :
Un périphérique sur lequel la circulation est à double sens est modélisé par un cercle de 10 km de circonférence. O est le point du périphérique le plus au sud.

Comme indiqué sur le schéma ci-contre, les boulangeries A et B sont placées le long du périphérique respectivement à 3 km et 7 km en le parcourant dans le sens des aiguilles d'une montre à partir du point O. La première boulangerie vend la baguette 1 €, tandis que la seconde la vend 1,2 €.



La population habite autour de ce périphérique et le coût de transport est de 0,05 € par km. Chaque habitant achète une baguette de pain de la manière la plus économique pour lui, en tenant compte des frais de transport aller-retour depuis sa résidence.

Existe-t-il une ou plusieurs positions sur le périphérique pour lesquelles un consommateur peut choisir indifféremment les deux boulangeries pour acheter une baguette ?