Académie de Nantes

Session 2015

OLYMPIADES ACADÉMIQUES

DE MATHÉMATIQUES

Sujet destiné aux candidats des séries NON S

Mercredi 18 mars 2015 de 8h30 à 12h30

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

L’usage de la calculatrice est autorisé, à l’exclusion de tout autre appareil électronique.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d’exposer le bilan des initiatives qu’ils ont pu prendre.

L’épreuve comporte quatre exercices, tous à traiter dans le temps imparti. Il est conseillé de ne pas en privilégier trop fortement un sur les autres.

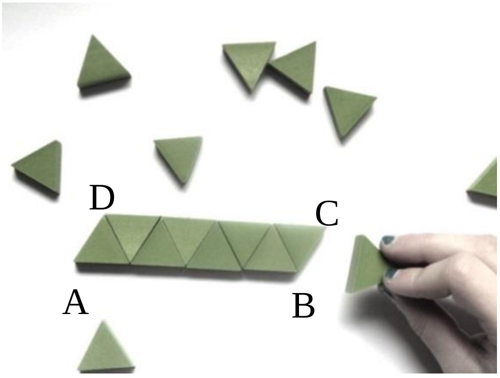
Durée de la composition : 4 heures

Sauf cas de force majeure, aucun candidat n’est autorisé à quitter définitivement la salle de composition moins d’une heure après le début. Un candidat qui quitterait la salle au bout de trois heures ou moins doit rendre sa copie et son exemplaire du sujet.

Exercice numéro 1 *(national)*

Défi entre sœurs

Patiemment, Clémence aligne les triangles équilatéraux identiques de son jeu de mosaïque en les juxtaposant comme le montre la photo ci-contre.



Sa sœur, Léa, qui est en première et toujours en quête de quelques calculs à effectuer, s'amuse à trouver la **valeur exacte** des longueurs des diagonales des quadrilatères obtenus.

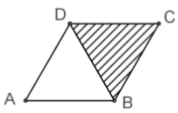
Chaque triangle équilatéral a pour côté 1. On note :

- ABCD un quadrilatère construit par Clémence ;
- L = AC la longueur de la diagonale [AC] ;
- l = BD la longueur de la diagonale [BD].

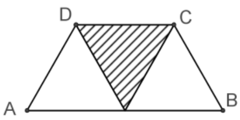
Partie A

1. Calculer la longueur d'une hauteur d'un triangle équilatéral de côté 1.

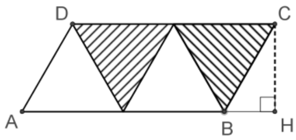
2. Calculer les longueurs l et L pour les cas suivants :



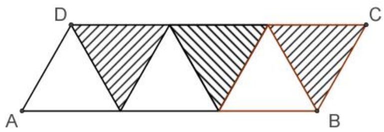
Deux triangles



Trois triangles



Quatre triangles



Six triangles

Partie B

Clémence continue à ajouter des triangles et défie sa sœur de poursuivre ses calculs de diagonales. Léa note n le nombre de triangles équilatéraux alignés (n est un entier supérieur ou égal à 2) et se met à chercher :

1. Lorsque le nombre n de triangles est **pair,** montrer que la longueur de la diagonale la plus grande est égale à $L = \sqrt{p^2 + p + 1}$, où $p = \frac{n}{2}$.

2. Si Clémence ajoute un triangle supplémentaire au cas précédent, que deviennent les longueurs l et L ?

3. Clémence a aligné 56 triangles. Déterminer les longueurs l et L calculées par Léa.

Partie C

Observant tous les calculs de longueur de diagonales effectués, Léa conjecture deux propriétés :

1re propriété : « Pour tout nombre n de triangles juxtaposés, L est la racine carrée d'un nombre impair ».

2e propriété : « Pour tout nombre n de triangles juxtaposés, L est la racine carrée d'un nombre premier ».

On rappelle qu'un nombre premier est un entier naturel divisible seulement par 1 et lui-même ; par exemple 2, 11, 29 sont des nombres premiers et 1, 8, 33 ne le sont pas.

1. Valider ou invalider chacune de ces propriétés.

2. Peut-on affirmer que la racine carrée de tout nombre premier est la longueur possible d'une diagonale d'un quadrilatère ABCD du type ci-dessus ?

3. Pourquoi n'est-il pas possible d'obtenir une diagonale de longueur $\sqrt{2\,015}$?

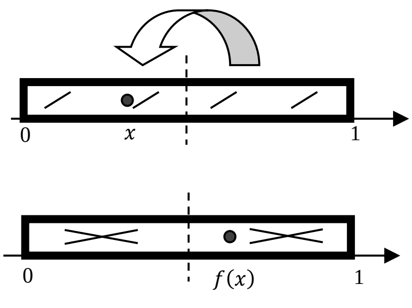
4. Clémence a construit un quadrilatère dont une diagonale mesure $\sqrt{1\,015\,057}$. Combien de triangles a-t-elle utilisés ? Donner toutes les réponses possibles.

5. Clémence dit à sa sœur : « sur les grands quadrilatères, à chaque fois qu'on ajoute deux triangles, la diagonale augmente d'environ 1 ». Le constatez-vous aussi ? (détailler la démarche). Si oui, le démontrer.

<u>Exercice numéro 2</u> *(national)*

On est les rois !

Le boulanger place une fève, replie la pâte (qu'il a, ici, préalablement striée) sur elle-même, et l'étale dans le sens de la longueur : celle-ci s'étire jusqu'à retrouver ses dimensions initiales. Cette transformation, que l'on peut répéter, a donné lieu à quelques études mathématiques, dont cet exercice s'inspire.



Partie A – La transformation du boulanger

On considère la fonction f définie sur $[0\,,1]$ par :

$$f(x) = 2x \text{ si } x \leq \frac{1}{2} \text{ et } f(x) = 2(1-x) \text{ sinon.}$$

1. Montrer que l'image par f d'un élément de [0, 1] appartient à [0, 1].

2. Justifier pourquoi cette fonction f modélise le déplacement de la fève.

Partie B – Parcours d'une fève : cycles et cible

Les images successives par f d'un élément x de $[0\,,1]$ sont notées $x_1 = f(x)$, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$ etc. Elles correspondent aux positions successives de la fève initialement placée à l'abscisse x.

1. Quelles sont les 9 positions qui suivent l'abscisse $\frac{1}{3}$? l'abscisse 0, 33 ? Commenter.

2. Est-il possible qu'une fève, placée à l'abscisse x, revienne à sa position de départ en un seul coup ? En deux coups (mais pas en un) ? En trois coups (mais ni en un ni en deux) ? Préciser à chaque fois toutes les valeurs de x pouvant répondre à la question.

3. Quand une fève placée à l'abscisse x vient, après un nombre fini d'étapes du processus, à occuper l'abscisse nulle, on dit que « x atteint sa cible ». Donner un exemple où x atteint sa cible, et un autre où x ne l'atteint pas.

4. Le nombre $\frac{2015}{2^{2015}}$ atteindra-t-il la cible ?

5. Déterminer tous les nombres de $[0\,,1]$ atteignant leur cible.

Partie C – Étude d'un algorithme

1. Soit un nombre x dont on suppose qu'il atteint la cible. Modifier l'algorithme proposé ci-dessous afin qu'il affiche, dans ce cas, le nombre d'étapes nécessaires pour rejoindre le réel 0 (on recopiera le nouveau code sur sa copie).

2. D'après les questions **B.5**. ou même **B.2.**, le nombre $\frac{1}{9}$ n'atteint pas sa cible. Comment devrait se comporter l'algorithme après avoir saisi $x = \frac{1}{9}$ en entrée ? Quand on le programme sur une machine de type PC ou calculatrice, toujours avec $x = \frac{1}{9}$ en initialisation, puis qu'on l'exécute, il affiche cependant en sortie obtenir $x = 0$ au bout d'une cinquantaine d'itérations. Avancer une explication.

Algorithme

Variables
    x est un élément de $[0\,,1]$
Début
    Saisir le nombre x compris entre 0 et 1
    Tant que $x \neq 0$ **faire**
        Si $x \leq \frac{1}{2}$ **alors**
            x **prend la valeur** $2\,x$
        Sinon
        x **prend la valeur** $2(1-x)$
        Fin Si
    Fin tant que

Exercice numéro 3 *(académie de Nantes)*

Nombres palindromes

Définition :
Un nombre **palindrome** est un nombre qui peut se lire indifféremment de gauche à droite et de droite à gauche.

Exemple : 16461 est un nombre palindrome.

N.B. *Toutes les questions sont indépendantes*.

1. Nous sommes en 2015. Quelle sera la prochaine année palindrome ?

2. Trouver le plus petit nombre palindrome à 6 chiffres utilisant à la fois le chiffre 2 et le chiffre 3 (et uniquement ces deux chiffres).

3. Trouver le plus petit nombre palindrome utilisant tous les chiffres de 0 à 9.

4. Si p_1 et p_2 sont deux nombres palindromes à au moins 2 chiffres et ayant le même nombre de chiffres, quel est le plus petit écart que l'on peut trouver entre p_1 et p_2 ?

5. Le **retournement** d'un nombre est le nombre obtenu en inversant l'ordre de ses chiffres. Par exemple, le retournement de 2015 est 5102, celui de 2010 est 102.
On considère un nombre à deux chiffres et on lui ajoute son retournement. Dans quel(s) cas obtient-on un nombre palindrome ?

6. Combien y a-t-il de nombres palindromes à 2015 chiffres ?

Exercice numéro 4 *(académie de Nantes)*

Au pays de *Mathami*, la monnaie s'appelle le *zed*. Pour payer une somme *à valeur entière* on ne dispose que de deux sortes de billets *(en nombre illimité)* de montants respectifs *a zeds* et *b zeds* (*a* et *b* sont des entiers naturels).

Dans tout l'exercice, les sommes considérées seront à valeurs entières.

Partie A : on peut rendre la monnaie.

1. On suppose *a* = 3 et *b* = 5. Cela signifie que le pays ne dispose que de billets de 3 *zeds* et 5 *zeds*.
Exemple : on peut payer une somme de 17 *zeds* : on donne quatre billets de 5 *zeds*, on nous rend un billet de 3 *zeds*.
   a) Montrer qu'il est possible de payer une somme égale à 301 *zeds*.
   b) Montrer qu'il est possible de payer une somme égale à 1 *zed*.
   c) Montrer que l'on peut payer toute somme à valeur entière.

2. On suppose $a = 6$ et $b = 10$.

a) Comment payer 14 *zeds* ?

b) Quelles sont les sommes entières qui ne peuvent pas être payées ?

Partie B : on ne peut pas rendre la monnaie.

On considère le cas $a = 3$.

Soit b un entier strictement plus grand que 3 et non multiple de 3.
On note M(b) la somme maximale ne pouvant pas être payée avec les billets de montants respectifs 3 *zeds* et b *zeds*.

1. On suppose $b = 5$.

a) Montrer qu'il est possible de payer des sommes de 8, 9 et 10 *zeds*.

b) Montrer qu'il est possible de payer toute somme supérieure ou égale à 8 *zeds*.

c) Que vaut M(5) ?

2. On suppose $b = 7$.

a) Montrer qu'il est possible de payer toute somme supérieure ou égale à 12 *zeds*.

b) Que vaut M(7) ?

3. Que vaut M(8) ?

4. Placer dans un repère du plan les points de coordonnées (5 ; M(5)), (7 ; M(7)), (8 ; M(8)).
Proposer (sans justifier) une relation donnant M(b) en fonction de b.

On considère le cas $a = 5$.

Soit b un entier strictement plus grand que 5 et non multiple de 5.

5. Montrer que l'on ne peut pas payer la somme $4b - 5$ *zeds* avec des billets de montants 5 *zeds* et b *zeds*.