Session 2015 S
Corrigés

Corrigé de l'exercice 3 : nombres palindromes (S)

1. 2112 (il est trop tard pour les années en <u>200x</u> !)

2. a) Il n'y en a qu'un : 99
   b) On écrit p = $\overline{a_0 a_1 a_0}$ avec $2a_0 + a_1 = 9k$ soit $a_1 = 9k - 2a_0$.
   Si $k = 1$ alors on peut avoir $a_0 = 1$ et donc *p* = 171 ou bien $a_0 = 2$ et donc *p* = 252 ou bien $a_0 = 3$ et donc *p* = 333 ou bien $a_0 = 4$ et *p* = 414.
   Si $k = 2$ alors on peut avoir $a_0 = 5$ et donc *p* = 585 ou bien $a_0 = 6$ et *p* = 666 ou bien $a_0 = 7$ et *p* = 747 ou bien $a_0 = 8$ et *p* = 828 ou bien $a_0 = 9$ et *p* = 909
   Si $k = 3$ alors on peut avoir $a_0 = 9$ et *p* = 999
   Il y en a donc 10. {171 ; 252 ; 333 ; 414 ; 585 ; 666 ; 747 ; 828 ; 909 ; 999}.

3. a) $8 - 7 + 6 - 6 + 5 - 3 + 2 - 4 + 2 - 3 = 0$ qui est divisible par 11.

   b) Soit *n* un nombre pair et *p* un nombre palindrome à *n* chiffres. *p* s'écrit :
   p = $\overline{a_0 a_1 a_2 \dots \dots a_{\frac{n}{2}-1} a_{\frac{n}{2}} a_{\frac{n}{2}} a_{\frac{n}{2}-1} \dots \dots a_2 a_1 a_0}$. Dans cette écriture, a_0 est à la fois de rang impair (chiffre des unités) et de rang pair. On fera donc à un moment $a_0 - a_0$. Même chose pour a_1, a_2 etc jusqu'à $a_{\frac{n}{2}}$. La somme de ses chiffres de rang pair diminué de la somme de ses chiffres de rang impair sera donc égale à 0 qui est divisible par 11.

   c) C'est clair, car d'après la question précédente, *p* doit être premier *et* multiple de 11.

4. a) 101 – 99 = 2. Il est clair qu'on ne peut pas améliorer (sauf à considérer des nombres à un chiffre)

   b) On suppose $p_2 > p_1$ et on cherche à minimiser la différence $p_2 - p_1$.
   - Si p_1 et p_2 ont deux chiffres, la différence minimale est de 11.
   - S'ils ont trois chiffres, on simplifie le chiffre des centaines et 10 est la plus petite différence, par exemple 131 – 121 ou 212 – 202 (l'écart entre les chiffres des dizaines ne doit pas dépasser 1).
   - S'ils ont quatre chiffres, on doit simplifier le chiffre des milliers, donc p_2 s'écrit <u>*acca*</u> et p_1 s'écrit <u>*abba*</u>, de sorte que la différence vaut 110(*c* – *b*), donc au moins 110.
   - La discussion se poursuit de la même manière à cinq chiffres et au-delà :
     <u>*abcba*</u> – <u>*abdba*</u> = 100*d,* etc.

     La plus petite différence entre deux nombres palindromes distincts d'au moins deux chiffres et ayant le même nombre de chiffres est 10.

5. Les 1007 premiers chiffres doivent être égaux aux 1007 derniers.
   - On a 9 choix pour le premier chiffre et 10 choix pour les 1006 autres ;
   - On a également 10 choix pour le 1008ième chiffre ;

   Il y a donc $9 \times 10^{1006} \times 10 = 9 \times 10^{1007}$ nombres palindromes à 2015 chiffres.

Corrigé de l'exercice 4 : les cinq signes

1. Il suffit de choisir $f(x) = (x - 2014)^2 + 2015$.
2. On suppose $f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$.
   Par lecture du tableau de variations, $a > 0, c = f(0) > f(2014) = 2015$ donc $c > 0$.
   Enfin, $\frac{-b}{2a} = 2014$, donc $b = -2a \times 2014 < 0$.
3. Pour tout réel x, $f(x) = (ux^2 + vx + w)^2$.
   $$f(x) = u^2x^4 + 2uvx^3 + (v^2 + 2uw)x^2 + 2vwx + w^2.$$
   On en déduit $a = u^2$; $b = 2uv$; $c = v^2 + 2uw$; $d = 2vw$ et $e = w^2$.
   $u \neq 0$ donc $a > 0$.
   $e = f(0) > 2015$ donc $e > 0$.
   Pour tout réel x, $f(x) \geq 2015 > 0$ donc le trinôme $p(x)$ garde un signe constant sur $\mathbb{R}$.
   Plus précisément, ou bien pour tout réel x, $p(x) \geq \sqrt{2015}$, ou bien pour tout réel x, $p(x) \leq -\sqrt{2015}$.
   Dans les deux cas, l'extremum de p est atteint pour $x = 2014$. On en déduit $\frac{-v}{2u} = 2014$ donc u et v sont de signes contraires (et non-nuls). Ainsi, $uv < 0$. Mais $b = 2uv$ donc $b < 0$.
   On a dit que le trinôme $p(x)$ garde un signe constant sur $\mathbb{R}$. Son discriminant Δ est strictement négatif. Cela s'écrit : $v^2 - 4uw < 0$. Il vient : $uw > \frac{v^2}{4} > 0$. Donc u et w sont de même signe et comme u et v sont de signes contraires, il en va de même pour w et v.
   On a $d = 2vw$. Donc $d < 0$.
   On a $c = v^2 + 2uw$, somme de deux termes strictement positifs, donc $c > 0$.

   Remarque.
   On peut utiliser le signe de la dérivée de *f* mais il faut justifier que $f'(x)$ ne s'annule pas en dehors de 2014.
   Pour tout réel x, $f'(x) = 2p'(x)p(x)$.
   Mais $f(x) \geq 2015$ montre que $p(x) \neq 0$ pour tout x. Donc $f'(x) = 0$ si et seulement si $p'(x) = 0$. Mais $p'(x) = 2ux + v$ est affine et ne s'annule qu'une fois. On en déduit que $f'(x) = 0$ pour la seule valeur $x = 2014$. Par lecture du tableau de variation, pour $x < 2014$, on a $f'(x) < 0$. En particulier, $f'(0) = 0$ donc $d < 0$.
   Toujours d'après le tableau, $f'(2014) = 0$ donc $p'(2014) = 0$ donc $2u \times 2014 + v = 0$ donc u et v sont de signes contraires : $b < 0$.
   Le signe des autres nombres a, c, e se retrouve comme précédemment.