MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades nationales de mathématiques 2019

Métropole-Europe-Afrique-Orient-Inde

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de dix minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Les candidats ne sont pas autorisés à quitter les locaux avant 10 heures.

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

10 h 40 – 12 h 40

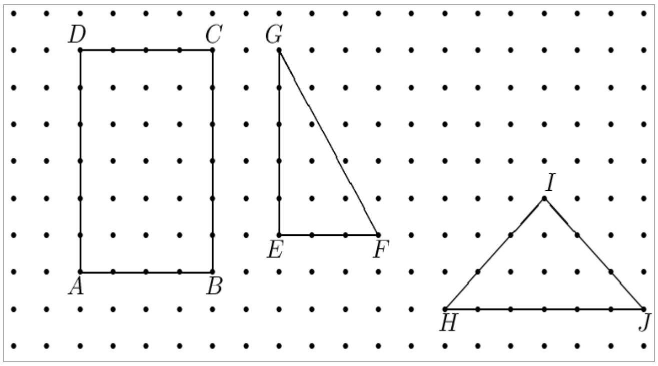
Les candidats traitent **deux exercices.** Ceux de la série S traitent les exercices numéros 1 (*Planche à clous*) et 2 (*Palindromes*), les autres traitent les exercices numéros 3 (*Planche à clous*) et 4 (*La manette défaillante*).

Exercice 1 : Planche à clous. **Série S**

Sur une planche en bois, on a pointé des clous espacés d'une unité sur des lignes et des colonnes. En posant un élastique autour des clous, on peut obtenir diverses figures : triangles, rectangles, ou autres polygones.

On considère n et p deux entiers naturels non nuls. On appelle $R_{n,p}$ un rectangle de dimensions n et p dont les côtés sont parallèles aux bords de la planche. De même, on appelle $T_{n,p}$ un triangle rectangle dont les côtés adjacents à l'angle droit sont de dimensions n et p et parallèles aux bords de la planche.

Par exemple :



- *ABCD est un rectangle $R_{4,6}$. On compte vingt clous situés sur le bord du rectangle, quinze clous à l'intérieur et trois clous sur chaque diagonale.*
- *EFG est un triangle $T_{3,5}$. On compte neuf clous situés sur le bord du triangle et quatre clous à l'intérieur.*
- *HIJ n'est pas un triangle $T_{n,p}$ car les côtés adjacents à l'angle droit ne sont pas parallèles aux bords de la planche.*

Partie A :

1. a) Combien y a-t-il de clous situés sur le bord d'un carré $R_{6,6}$?
   Combien y a-t-il de clous situés à l'intérieur de ce carré ?
   Combien y-a-t-il de clous situés sur une diagonale de ce carré ?
   b) Reprendre les questions précédentes pour un rectangle $R_{31,1}$.
2. Un rectangle $R_{n,p}$ de vingt-deux unités d'aire contient au moins un clou à l'intérieur.
   Combien y a-t-il de clous à l'intérieur et sur le bord de ce rectangle ?
3. a) Déterminer le nombre de clous situés sur le bord d'un rectangle $R_{30,24}$, puis le nombre de clous situés à l'intérieur.
   b) Quelle est la valeur de la variable D à la fin de l'exécution de l'algorithme ci-contre ? Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
   c) Combien y a-t-il de clous situés sur le bord d'un triangle $T_{30,24}$?
   d) Combien y a-t-il de clous situés à l'intérieur de $T_{30,24}$?

$D \leftarrow 0$
Pour i allant de 0 à 30 Faire
  Si $\frac{24}{30} \times i$ est entier
    Alors $D \leftarrow D+1$
  Fin Si
Fin Pour

Partie B :

On appelle I, B et D le nombre de clous situés respectivement à l'intérieur, sur le bord et sur une diagonale d'un rectangle $R_{n,p}$.

4. On veut démontrer que l'aire d'un rectangle $R_{n,p}$ est égale à $I+\frac{B}{2}-1$.
   a) Vérifier cette formule pour un rectangle $R_{30,24}$.
   b) Démontrer cette formule pour un rectangle $R_{n,p}$ quelconque.

5. Peut-on trouver deux entiers naturels non nuls n et p tels que le rectangle $R_{n,p}$ ait cinquante clous à l'intérieur et quatre-vingt-seize clous sur son bord ?

Partie C :

I' et B' désignent le nombre de clous situés respectivement à l'intérieur et sur le bord d'un triangle $T_{n,p}$.

6. Exprimer l'aire du triangle $T_{n,p}$ en fonction de I' *et* B'.
7. Pour un triangle $T_{n,p}$ quelconque, exprimer D en fonction de n et p.

Exercice 2- Décomposer un entier en somme de palindromes **Série S**

Un entier naturel est appelé **palindrome** si son écriture décimale est la même que l'on lise le nombre de gauche à droite ou bien de droite à gauche.
Par exemple : 4 ; 77 ; 282 ; 6446 ; 50105 sont des palindromes. Le nombre 2019 n'est pas un palindrome.

1. Voici la liste des 15 premiers palindromes : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 11 ; 22 ; 33 ; 44 ; 55.

Compléter cette liste en donnant les 15 palindromes suivants.

On souhaite maintenant écrire tout nombre entier naturel n comme somme de palindromes (pas nécessairement distincts).

Exemples :
$n = 161$ est somme des deux palindromes 161 et 0.
$162 = 151 + 11 = 151 + 8 + 3$. On peut donc décomposer $n = 162$ comme somme de deux ou trois palindromes.

2. Montrer que tout nombre entier naturel est somme de palindromes.

Ce résultat acquis, on peut se demander avec combien de palindromes au minimum peut se décomposer un entier naturel quelconque n comme somme de palindromes.
Dans la suite, on examine le cas où n s'écrit avec deux ou trois chiffres.

Cas où n s'écrit avec deux chiffres.
On note $n = 10d + u$; $d \geq 1$ et u désignent respectivement les chiffres des dizaines et des unités de n.

3. Montrer que tout entier n compris entre 10 et 20 est somme de deux palindromes.

4. Décomposer $n = 53$ puis $n = 56$ en somme de deux palindromes.

5. Vérifier que si $d \leq u$ alors $n = p_1 + p_2$ où $p_1 = 11 \times d$ et $p_2 = u - d$ sont deux palindromes.

6. Proposer une décomposition analogue dans le cas où $d \geq u + 2$.

7. Montrer que $n = 54$ ne peut être la somme de deux palindromes.

8. Dresser la liste des entiers à deux chiffres qui ne peuvent être somme de deux palindromes. Peuvent-ils être somme de trois palindromes ?

Cas où n s'écrit avec trois chiffres.
On note maintenant $n = 100c + 10d + u$; $c \geq 1$, d et u sont les chiffres respectivement des centaines, dizaines et unités de n.

9. On suppose dans cette question que $c \leq u$.

Vérifier que $n = p_1 + p_2$ où $p_1 = 101c + 10d$ et $p_2 = u - c$ sont deux palindromes.

10. Déterminer une décomposition analogue dans le cas où $c \geq u + 1$ et $d \neq 0$.

11. Étudier les cas restants où $c \geq u + 1$ et $d = 0$, et déterminer ainsi l'unique entier de trois chiffres qui ne peut se décomposer comme somme de deux palindromes. En donner alors une décomposition minimale.

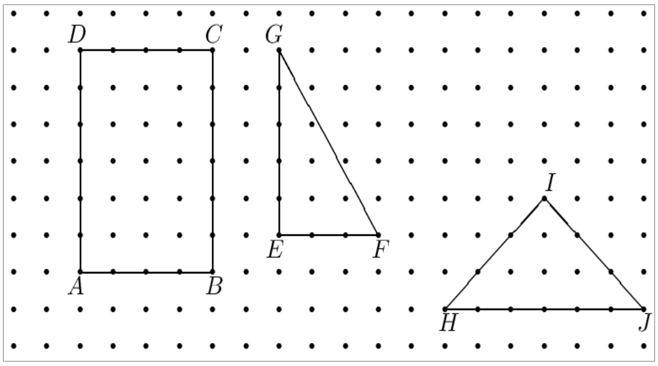
Note sur l'exercice : en 2017, l'équipe de mathématiciens formée de Javier Cilleruelo, Florian Luca et Lewis Baxter a démontré que tout entier naturel n peut s'écrire comme somme de trois palindromes en base b, $b \geq 5$ donc en base 10 pour l'exercice. Leur démonstration repose sur un algorithme de décomposition de tout entier n qui s'adapte à différentes caractéristiques que peut présenter l'écriture décimale de n.

Exercice 3 : Planche à clous. **Séries autres que S**

Sur une planche en bois, on a pointé des clous espacés d'une unité sur des lignes et des colonnes.
En posant un élastique autour des clous, on peut obtenir diverses figures : triangles, rectangles, ou autres polygones.

On considère n et p deux entiers naturels non nuls. On appelle $R_{n,p}$ un rectangle de dimensions n et p dont les côtés sont parallèles aux bords de la planche. De même, on appelle $T_{n,p}$ un triangle rectangle dont les côtés adjacents à l'angle droit sont de dimensions n et p et parallèles aux bords de la planche.

Par exemple :



- *ABCD est un rectangle $R_{4,6}$. On compte vingt clous situés sur le bord du rectangle, quinze clous à l'intérieur et trois clous sur chaque diagonale.*
- *EFG est un triangle $T_{3,5}$. On compte neuf clous situés sur le bord du triangle et quatre clous à l'intérieur.*
- *HIJ n'est pas un triangle $T_{n,p}$ car les côtés adjacents à l'angle droit ne sont pas parallèles aux bords de la planche.*

Partie A :

1. a) Combien y a-t-il de clous situés sur le bord d'un carré $R_{6,6}$?
   Combien y a-t-il de clous situés à l'intérieur de ce carré ?
   Combien y a-t-il de clous situés sur une diagonale de ce carré ?
   b) Reprendre les questions précédentes pour un rectangle $R_{31,1}$.
2. Un rectangle $R_{n,p}$ de vingt-deux unités d'aire contient au moins un clou à l'intérieur.
   Combien y a-t-il de clous à l'intérieur et sur le bord de ce rectangle ?
3. a) Déterminer le nombre de clous situés sur le bord d'un rectangle $R_{30,24}$, puis le nombre de clous situés à l'intérieur.
   b) Quelle est la valeur de la variable D à la fin de l'exécution de l'algorithme ci-contre ? Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
   c) Combien y a-t-il de clous situés sur le bord d'un triangle $T_{30,24}$?
   d) Combien y a-t-il de clous situés à l'intérieur de $T_{30,24}$?

> $D \leftarrow 0$
> Pour i allant de 0 à 30 Faire
> Si $\frac{24}{30} \times i$ est entier
> Alors $D \leftarrow D+1$
> Fin Si
> Fin Pour

Partie B :
On appelle I, B et D le nombre de clous situés respectivement à l'intérieur, sur le bord et sur une diagonale d'un rectangle $R_{n,p}$.

4. On veut démontrer que l'aire d'un rectangle $R_{n,p}$ est égale à $I+\frac{B}{2}-1$.
   a) Vérifier cette formule pour un rectangle $R_{30,24}$.
   b) Démontrer cette formule pour un rectangle $R_{n,p}$ quelconque.

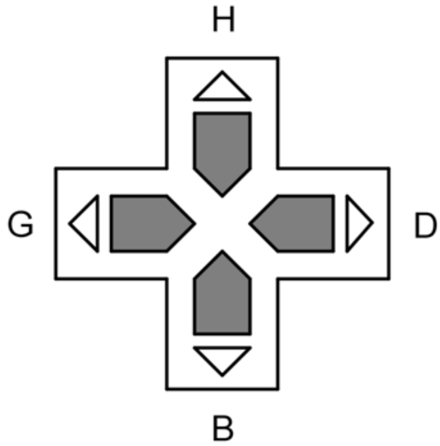
5. Peut-on trouver deux entiers naturels non nuls n et p tels que le rectangle $R_{n,p}$ ait cinquante clous à l'intérieur et quatre-vingt-seize clous sur son bord ?

Partie C

I' et B' désignent le nombre de clous situés respectivement à l'intérieur et sur le bord d'un triangle $T_{n,p}$.

6. Exprimer l'aire du triangle $T_{n,p}$ en fonction de I' *et* B'.
7. On considère un triangle LMN tel que le coté [LM] est positionné horizontalement avec L, M et N sur des clous. On suppose que le pied de la hauteur issue de N appartient au segment [LM].
   Déterminer une formule permettant d'obtenir l'aire du triangle LMN en fonction de I' *et* B'.

Le plan est muni d'un repère orthonormé.



On dispose de la manette de jeu ci-contre, comportant quatre touches B, G, H et D et permettant de contrôler le déplacement d'un point mobile M du plan.

En appuyant sur B, on soustrait une unité à l'ordonnée de M.
En appuyant sur G, on soustrait une unité à l'abscisse de M.
En appuyant sur H, on ajoute une unité à l'ordonnée de M.
En appuyant sur D, on ajoute une unité à l'abscisse de M.

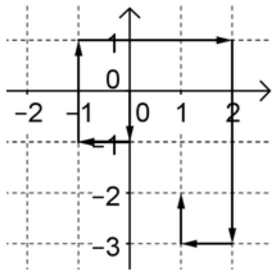
La manette est défaillante, en effet :

- on ne peut appuyer au départ que sur B ;
- si on appuie sur B, la touche suivante ne peut être que B ou G ;
- si on appuie sur G, la touche suivante ne peut être que G ou H ;
- si on appuie sur H, la touche suivante ne peut être que H ou D ;
- si on appuie sur D, la touche suivante ne peut être que D ou B.

On appelle séquence toute succession de touches répondant à ces cinq critères.

Exemples :

- La succession GG-HH-D n'est pas une séquence puisqu'on ne peut commencer que par B.
- La succession B-GG-HHH-G n'est pas une séquence puisque G ne peut pas succéder à H.
- La succession B-G-HH-DDD-BBBB-G-H est une séquence puisqu'elle répond à tous les critères.



On appelle position finale d'une séquence le couple des coordonnées du point M à l'issue de la séquence, lorsque M est placé initialement à l'origine du repère.

Par exemple, la position finale de la séquence B-G-HH-DDD-BBBB-G-H est : $(1\ ;\ -2)$.

Étant donnée une séquence, on note :

- b_n le nombre de B consécutifs à la n-ième apparition d'une suite de B dans la séquence ;
- g_n le nombre de G consécutifs à la n-ième apparition d'une suite de G dans la séquence ;
- h_n le nombre de H consécutifs à la n-ième apparition d'une suite de H dans la séquence ;
- d_n le nombre de D consécutifs à la n-ième apparition d'une suite de D dans la séquence ;

où n est un entier naturel non nul.

Exemple :

Pour la séquence $\underbrace{B}_{b_1=1} - \underbrace{G}_{g_1=1} - \underbrace{HH}_{h_1=2} - \underbrace{DDD}_{d_1=3} - \underbrace{BBBB}_{b_2=4} - \underbrace{G}_{g_2=1} - \underbrace{H}_{h_2=1}$, on peut construire le tableau suivant :

n	b_n	g_n	h_n	d_n
1	1	1	2	3
2	4	1	1	

A. Questions préliminaires.

1) Donner la position finale de la séquence BBBB-GG-HHHH-D-B-GGG-HH-DDDDD-BB-GGG.

2) Donner une séquence dont la position finale est $(3\,;\,-4)$.

3) Une séquence est telle que :

n	b_n	g_n	h_n	d_n
1	3	2	1	4
2	1	5		

Quelle est cette séquence et quelle est sa position finale ?

4) *Dans la suite de l'exercice, on appelle* <u>*longueur d'une séquence*</u> *le nombre de touches qu'elle comporte.*

Par exemple, la longueur de la séquence B-G-HH-DDD-BBBB-G-H est 13.

Quelle est la longueur de la séquence étudiée à la question précédente ?

B. Longueur minimale.

5) Déterminer la longueur minimale d'une séquence de position finale $(2019\,;2019)$.

C. Spirale de rang N.

N désignant un entier naturel non nul, on appelle spirale de rang N la séquence telle que, pour tout entier non nul n inférieur ou égal à N, on a : $b_n = g_n = 2n-1$ *et* $h_n = d_n = 2n$ *.*

6) En calculant b_n, g_n, h_n et d_n pour n variant de 1 à 3, expliciter la spirale de rang 3.

Quelles sont sa position finale et sa longueur ?

7) Déterminer le rang de la spirale de position finale $(2019\,;2019)$ et déterminer sa longueur.

On pourra utiliser la formule valable pour tout entier naturel n non nul : $1+2+3+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ *.*

8) Déterminer le plus petit entier *N* tel que la spirale de rang *N* ait une longueur supérieure ou égale à 2019.

D. Séquence de longueur inférieure ou égale à 19.

9) *Soit n un entier naturel non nul.*

Exprimer en fonction de *n* le nombre de séquences de longueur *n.*

10) *On considère toutes les séquences de longueur inférieure ou égale à 19.*

On exécute l'algorithme suivant :

```
S ← 0
N ← 0
Pour k allant de 1 à 19 faire
    S ← S + k2^(k−1)
    N ← N + 2^(k−1)
Fin pour
M ← S/N
```

Quelle valeur contient la variable *M* ? Interpréter ce résultat.

E. La manette s'est encore détériorée !

En effet, les touches B et G ne fonctionnent plus. Désormais on ne peut appuyer au départ que sur H et ensuite seulement sur les touches H ou D.

On appelle séquence réalisable toute séquence de touches H et D répondant à ces critères.

Pour tous entiers naturels n et p, avec p non nul, on note $R(n;p)$ *le nombre de séquences réalisables dont la position finale est* $(n;p)$.

Par exemple, $R(1;2)=2$ *puisqu'il n'y a que deux séquences réalisables menant à la position finale* $(1\,;2)$*, à savoir H-D-H et HH-D.*

11) Compléter le tableau des valeurs de $R(n;p)$ (annexe 1 page 10/10 **à rendre avec la copie**) en expliquant la méthode.

À rendre avec la copie

<u>Exercice 4 : La manette défaillante. (Séries non S uniquement)</u>
Question 11)

Annexe 1

	p=1	p=2	p=3	p=4	p=5
n=0	1	1	1	1	1
n=1	1	$R(1;2)=2$	3	4	...
n=2	1	3	6	10	...
n=3	1	4	10	...	...
n=4	1	5	15	...	...
n=5	1	...	...	...	...