$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{5u_n}{2u_n+5} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

115 Exercice guidé – Une suite auxiliaire

On considère la suite (u_n) définie, pour tout e naturel n, par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \frac{5u_n}{2u_n+5}$$

On admet que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n > 0$.

1. a. Déterminer u_1 ; u_2 et u_3.
b. La suite (u_n) est-elle arithmétique ?
c. Calculer $\frac{1}{u_0}$; $\frac{1}{u_1}$; $\frac{1}{u_2}$ et $\frac{1}{u_3}$. Que constate-t-or

2. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{1}{u_n}$.
a. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique.
b. En déduire une expression de v_n, puis de u_n, en tion de n.

Pistes de résolution

1. b. Les premiers termes font-ils apparaître une relation de récurrence d'une suite arithmétique ?
2. a. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n, puis conclure.
b. Compte tenu de la nature de (v_n), on dispose d'une formule pour exprimer son terme général. Le lien entre les suites (v_n) et (u_n) permet d'obtenir le terme général de (u_n).

$u_1 = \frac{5u_0}{2u_0+5} = \frac{5}{2+5}$ $u_2 = \frac{5u_1}{2u_1+5} = \frac{5\times\frac{5}{7}}{2\times\frac{5}{7}+5} = \frac{5}{9}$

1-b) $u_{n+1} = u_n + r$

$\underbrace{u_{n+1} - u_n}_{\text{variat}^{\circ} \text{ de la suite}} = r$ $\forall n \in \mathbb{N}$

prouver que la suite est arithm.

115 1. a. $u_1 = \frac{5}{7}$; $u_2 = \frac{5}{9}$ et $u_3 = \frac{5}{11}$

b. $u_2 - u_1 = \frac{5}{9} - \frac{5}{7} = -\frac{10}{63}$ et $u_3 - u_2 = \frac{5}{11} - \frac{5}{9} = -\frac{10}{99}$

Donc $u_2 - u_1 \neq u_3 - u_2$. La suite n'est donc pas arithmétique.

c. $\frac{1}{u_0} = 1$; $\frac{1}{u_1} = \frac{7}{5}$; $\frac{1}{u_2} = \frac{9}{5}$ et $\frac{1}{u_3} = \frac{11}{5}$.

On constate que $\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_0} = \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} = \frac{1}{u_3} - \frac{1}{u_2} = \frac{2}{5}$.

2. a. Pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$$
$$= \frac{2u_n+5}{5u_n} - \frac{1}{u_n}$$
$$= \frac{2u_n+5}{5u_n} - \frac{5}{5u_n}$$
$$= \frac{2u_n}{5u_n}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2}{5}$$ réel raison

Ainsi, la suite (v_n) est arithmétique de raison $r = \frac{2}{5}$ et de terme initial $v_0 = \frac{1}{u_0} = 1$.

(v_n) est arithmétique de raison $r = \frac{2}{5}$ et de premier terme $V_0 = \frac{1}{u_0} = 1$

La forme explicite de (v_n) est donc

$\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = V_0 + n \times r$
$= 1 + \frac{2}{5}n$

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 + n \times r = 1 + \frac{2}{5}n = \frac{5+2n}{5}$.

Or $v_n = \frac{1}{u_n} \Leftrightarrow u_n = \frac{1}{v_n} \Leftrightarrow u_n = \frac{5}{5+2n}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$

or $V_n = \frac{1}{u_n}$ donc $u_n = \frac{1}{V_n}$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{1+\frac{2}{5}n}$

$u_1 = \frac{2}{1+u_0} = \frac{2}{1+3} = \frac{1}{2}$ $\quad u_2 = \frac{2}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{3}{2}} = 2\times\frac{2}{3} = \frac{4}{3}$

124 Exercice guidé – Une suite homographique

On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 3$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n}$. forme récurrente

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation de cette suite et sa limite éventuelle.
2. Calculer u_1 et u_2. Cette suite est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ? Justifier.
3. On admet que u est positive et on considère la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par :

suite auxiliaire → $v_n = 1 - \frac{3}{u_n+2} \quad (\star)$

a. Calculer les premiers termes de v puis conjecturer la nature de la suite v. Démontrer cette conjecture.

b. En déduire une expression de v_n en fonction de n.

c. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: forme explicite $u_n = \frac{3}{1-v_n} - 2$

En déduire une expression de v_n en fonction de n. Justifier alors que u bien une suite convergente.

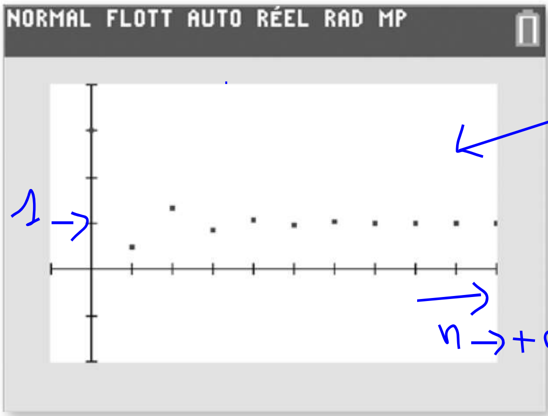
Pistes de résolution

3. a. Pour montrer que v est géométrique, on calcule, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de v_{n+1} en fonction de u_{n+1} puis on exploite la relation de récurrence de u. L'objectif à terme est d'aboutir à une relation du type $v_{n+1} = q \times v_n$ où q est la constante conjecturée.

3. b. Vu que v est géométrique, on sait exprimer son terme général v_n en fonction de v_0 et n.

3. c. On peut ici facilement isoler u_n dans $(\star)$.

124 1. La représentation graphique de la suite est :



1 →

$n \to +\infty$

suite non monotone

On peut conjecturer que cette suite n'est pas monotone mais semble converger vers 1.

2. $u_1 = \frac{1}{2}$ et $u_2 = \frac{4}{3}$.

- $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$ donc la suite n'est pas arithmétique.
- $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$ donc la suite n'est pas géométrique.

3. a. $v_0 = \frac{2}{5}$; $v_1 = -\frac{1}{5}$; $v_2 = \frac{1}{10}$

on conjecture que $V_{n+1} = V_n \times \left(-\frac{1}{2}\right)$

On peut conjecturer que la suite est géométrique de raison $q = -\frac{1}{2}$.

pour qu'une suite soit arithmétique il faut que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n =$ réel

La même chose pour géométrique il faut $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} =$ réel $\neq 0$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

Ici on prouve que (V_n) est géométrique

$$v_{n+1} = 1 - \frac{3}{u_{n+1}+2}$$

$$\Leftrightarrow v_{n+1} = 1 - \frac{3}{\frac{2}{1+u_n}+2}$$

$$\Leftrightarrow v_{n+1} = 1 - \frac{3}{\frac{2}{1+u_n}+\frac{2(1+u_n)}{1+u_n}}$$

$$\Leftrightarrow v_{n+1} = 1 - \frac{3}{\frac{4+2u_n}{1+u_n}}$$

$$\Leftrightarrow v_{n+1} = 1 - 3\times\frac{1+u_n}{4+2u_n}$$

$$\Leftrightarrow v_{n+1} = \frac{4+2u_n}{4+2u_n} - \frac{3+3u_n}{4+2u_n}$$

$$\Leftrightarrow v_{n+1} = \frac{1-u_n}{4+2u_n}$$

Passage difficile

$V_{n+1} = -\frac{1}{2} V_n$

on part de ça

Or

$$-\frac{1}{2}v_n = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{u_n+2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2u_n+4}$$

$$= -\frac{u_n+2}{2u_n+4} + \frac{3}{2u_n+4} = \frac{-u_n+1}{2u_n+4}$$

Ainsi $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n$.

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = -\frac{1}{2}$ et de terme initial $v_0 = \frac{2}{5}$.

au final