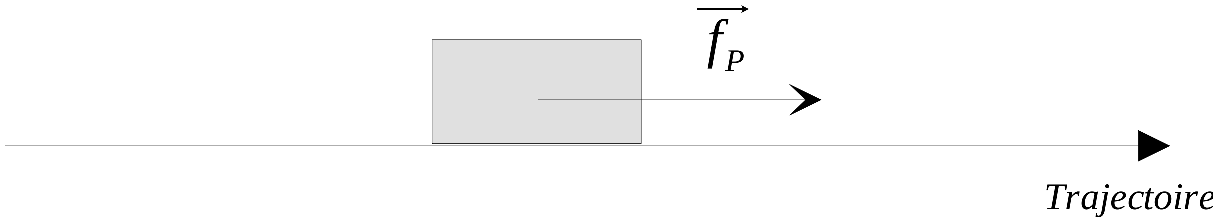
Produit scalaire

C'est quoi ?

Le mot « ***scalaire*** » désigne un ..réel..... On parle de produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ car le produit « scalaires » de ces deux « vecteurs » donne un ..réel..

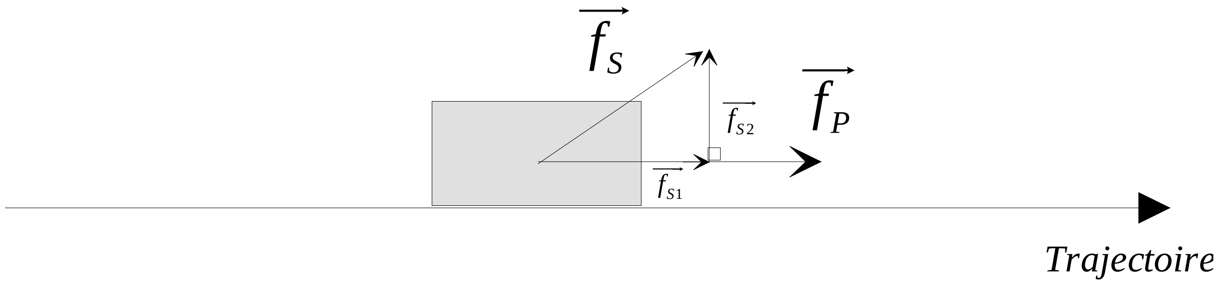
C'est donc une opération entre deux vecteurs qui donne un ..réel

Imaginons un solide en mouvement car il a été « poussé » par une force principale f_P symbolisée par un vecteur $\overrightarrow{f_P}$ qui porte donc les trois informations $\left\|\overrightarrow{f_P}\right\|$ = intensité de la force, direction de la force et sens de la force.
On considère que ce solide en mouvement ne peut pas être dévié de sa trajectoire



On applique maintenant, à ce solide en mouvement (qui on le rappelle ne peut se déplacer que suivant la direction de la trajectoire principale), une autre force secondaire f_S symbolisée par un vecteur $\overrightarrow{f_S}$.

Cas n°1 : $\left(\overrightarrow{f_P}\ ;\ \overrightarrow{f_S}\right)$ ***est un angle de mesure principale inférieure à*** $\frac{\pi}{2}$**.**



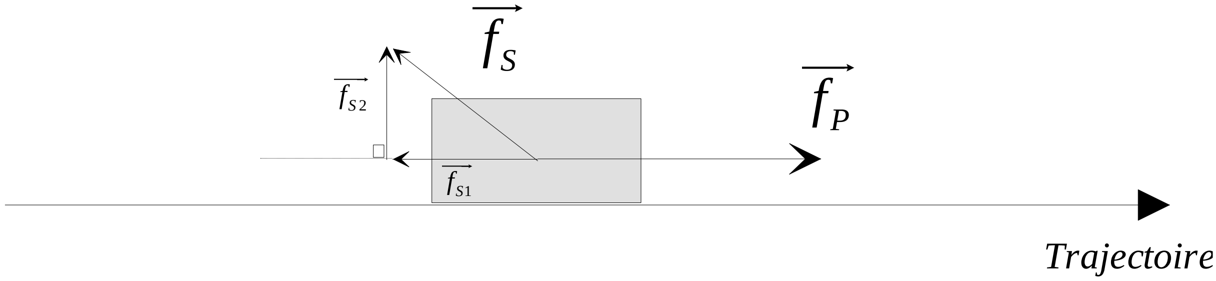
La force $\overrightarrow{f_S}$ peut se décomposer vectoriellement en $\overrightarrow{f_S} = \overrightarrow{f_{S1}} + \overrightarrow{f_{S2}}$, mais seule la composante $\overrightarrow{f_{S1}}$ de $\overrightarrow{f_S}$ contribue au déplacement du mobile sans contrarier la force $\overrightarrow{f_P}$.

Si on multiplie $\left\|\overrightarrow{f_P}\right\| \times \left\|\overrightarrow{f_{S1}}\right\|$ c'est-à-dire deux « longueurs », on trouve donc un réel qui est plus ou moins grand en fonction des intensités de $\overrightarrow{f_P}$ et $\overrightarrow{f_S}$.

C'est ce réel qui est appelé produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{f_P}$ et $\overrightarrow{f_S}$.

On note « • » l'opérateur produit scalaire donc : $\overrightarrow{f_P} \cdot \overrightarrow{f_S} = k$ avec k réel positif ici.

Cas n°2 : $\left(\overrightarrow{f_P}\ ;\ \overrightarrow{f_S}\right)$ ***est un angle de mesure principale supérieure à*** $\frac{\pi}{2}$***.***



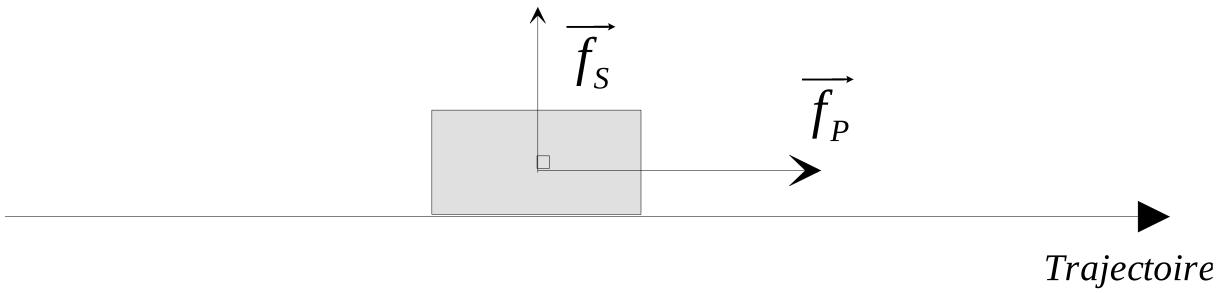
La force $\overrightarrow{f_S}$ peut se décomposer vectoriellement en $\overrightarrow{f_S} = \overrightarrow{f_{S1}} + \overrightarrow{f_{S2}}$, mais seule la composante $\overrightarrow{f_{S1}}$ de $\overrightarrow{f_S}$ vient perturber le déplacement du mobile en contrariant la force $\overrightarrow{f_P}$.

Si on multiplie $\left\|\overrightarrow{f_P}\right\| \times \left\|\overrightarrow{f_{S1}}\right\|$ c'est-à-dire deux « longueurs », on trouve donc un réel qui est plus ou moins grand en fonction des intensités de $\overrightarrow{f_P}$ et $\overrightarrow{f_S}$, mais auquel on va attacher un signe négatif pour montrer que la contribution de $\overrightarrow{f_S}$ s'oppose au sens de $\overrightarrow{f_P}$.

C'est ce réel qui est appelé produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{f_P}$ et $\overrightarrow{f_S}$.

On note « • » l'opérateur produit scalaire donc : $\overrightarrow{f_P} \cdot \overrightarrow{f_S} = k$ avec k réel négatif ici.

Cas n°3 : $\left(\overrightarrow{f_P}\ ;\ \overrightarrow{f_S}\right)$ ***est un angle de mesure principale égale à*** $\frac{\pi}{2}$***.***



La force $\overrightarrow{f_S}$ peut se décomposer vectoriellement en $\overrightarrow{f_S} = \overrightarrow{f_{S1}} + \overrightarrow{f_{S2}}$, mais ici la composante $\overrightarrow{f_{S1}}$ de $\overrightarrow{f_S}$ est nulle $\overrightarrow{f_{S1}} = \vec{0}$ car il n'y a pas de composante $\overrightarrow{f_S}$ associée à la trajectoire.

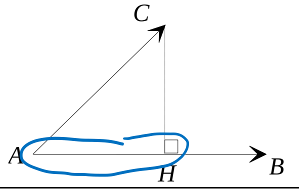
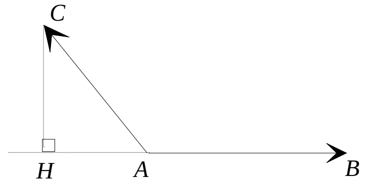
Si on multiplie, on obtient $\left\|\overrightarrow{f_P}\right\| \times \left\|\vec{0}\right\| = \left\|\overrightarrow{f_P}\right\| \times 0 = 0$ on trouve donc un réel nul.

On note « • » l'opérateur produit scalaire donc : $\overrightarrow{f_P} \cdot \overrightarrow{f_S} = 0$ avec k réel nul ici.

Théorème
Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

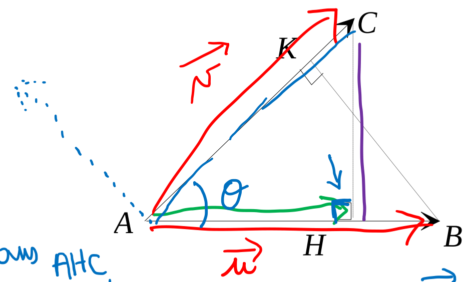
H est le projeté orthogonal de *C* sur *(AB)*

 $= \lVert\overrightarrow{AB}\rVert \times \lVert\overrightarrow{AC}\rVert$		
$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = AB \times AC$	$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = AB \times AH$	$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = -\,AB \times AH$

× 	∝ 
$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = -AC \times AB$ $= -CA \times AC$ $= -AB \times AC$	$\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AB} = AB \times AB = AB^2$ $\overrightarrow{AB}^2$ est appelé le carré scalaire.

Méthodes de calcul du produit scalaire (Partie 2)

Remarque :



ACH et ABK sont deux triangles rectangles donc :

$\cos(\widehat{CAB}) = \cos(\widehat{CAH}) = \dfrac{AH}{AC}$ et

$\cos(\widehat{CAB}) = \cos(\widehat{KAB}) = \dfrac{AK}{AB}$ donc $\dfrac{AH}{AC} = \dfrac{AK}{AB}$

dans AHC

$\cos\theta = \dfrac{AH}{AC} \Leftrightarrow AH = AC \times \cos\theta$

C'est-à-dire $AB \times AH = AC \times AK$

$\overrightarrow{AB} = \vec{u}$

$\overrightarrow{AC} = \vec{v}$

Or $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = AB \times AH$ et $\overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{AB} = AC \times AK$ donc $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = \vec{u}\,.\,\vec{v}$

$= AB \times AH$

Le produit scalaire de deux vecteurs est commutatif

(La « trajectoire » principale peut être celle de l'un ou de l'autre).

$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\theta$

Comme $\cos(\widehat{CAB}) = \dfrac{AH}{AC}$ donc $AH = AC \times \cos(\widehat{CAB})$ donc

$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = AB \times AH = AB \times AC \times \cos(\widehat{CAB})$ *Attention le cosinus peut être négatif !*

Ou en résumé à retenir : Si θ est l'angle formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, alors

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \lVert\vec{u}\rVert \times \lVert\vec{v}\rVert \times \cos\theta$$

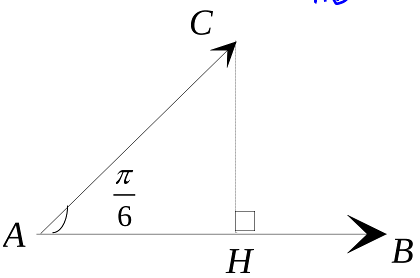
A quoi ça sert ?

Application 1 : Le produit scalaire permet de calculer des longueurs et des angles.

Exemple : Calcul de longueurs

$\|\vec{AB}\| = 3$ et $\|\vec{AC}\| = 2$.

Question 1 : Calculer AH



$\vec{AB}.\vec{AC} = AB \times AH$

$\vec{AB}.\vec{AC} = AB \times AC \times \cos\frac{\pi}{6} = 3 \times 2 \times \frac{\sqrt3}{2} = 3\sqrt3$

donc $AB \times AH = 3\sqrt3$

donc $AH = \frac{3\sqrt3}{AB} = \frac{3\sqrt3}{3}$

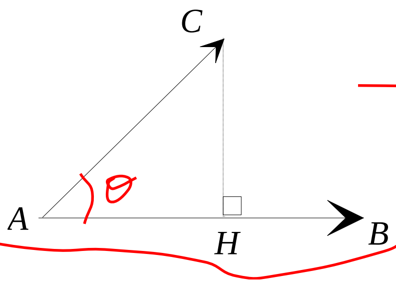
donc $AH = \sqrt3$

Exemple : Calcul d'angles

$\|\vec{AB}\| = 3$, $\|\vec{AC}\| = 2$ et $AH = \sqrt2$

$\vec{AB}.\vec{AC} = AB \times AH = 3\sqrt2$

$\vec{AB}.\vec{AC} = AB \times AC \times \cos\theta$ donc



$3\sqrt2 = AB \times AC \times \cos\theta$

donc $3\sqrt2 = 6\cos\theta$

donc $\cos\theta = \frac{3\sqrt2}{6}$

$\cos\theta = \frac{\sqrt2}{2}$

Question 2 : Calculer l'angle θ entre les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$

ici $\theta = \frac{\pi}{4} + k \times 2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Quelques propriétés et conséquences

Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et pour tout réel k, on a :

$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2$ $\qquad \vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$	$(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2 \quad (1)$
$\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$	$(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2 \quad (2)$
$(k\times\vec{u}).\vec{v} = k\times\vec{u}.\vec{v}$	$(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

De (1) on obtient $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\times\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right]$

De (2) on obtient $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\times\left[\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right]$

Dans les manuels !

Résumé : Méthodes de calcul

1. projeté orthogonal $\vec{AB}.\vec{AC} = AB \times AH$
2. formule $\vec{AB}.\vec{AC} = AB \times AC \times \cos\theta$
3. Equivalents des identités remarquables.