Olivier PINSON – groupe TraAM Maths et TICE de l'académie de Nantes – Mai 2012

« Trajectoire de la balle »

Compétences mathématiques travaillées ou en lien avec ce problème :
Fonction du second degré, symétrie de la parabole, résolution d'un système d'équations du premier degré, résolution approchée d'une équation du second degré

Descriptif rapide :
Dans ce problème, une balle suit une trajectoire parabolique qu'il faut représenter. Les coordonnées du sommet d'une parabole sont données ainsi que celles d'un deuxième point de cette parabole. Les élèves ne connaissent pas la forme canonique d'une fonction du second degré.

Enoncé donné aux élèves :

Une personne lance une balle d'une hauteur de 1,50 mètre.
La balle suit une trajectoire parabolique dont le sommet est atteint 4 mètres plus loin avec une hauteur de 2,50 mètres.

1. *Déterminer avec une précision au mm près un encadrement de la distance parcourue par la balle lorsqu'elle retombe au sol.*
2. *Représenter la trajectoire de la balle à l'aide d'un logiciel traceur de courbe.*

Ce qui a été fait avant

Les élèves ont vu précédemment en cours qu'une fonction du second degré est définie par une expression du type $ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont des réels ($a \neq 0$), que la représentation graphique d'une telle fonction est une parabole de sommet $S(x_S; y_S)$ et d'axe de symétrie d'équation $x = x_S$.
En revanche la forme canonique n'est pas connue.
Les élèves ont appris en 3ème à résoudre un système de deux équations du premier degré et en seconde à utiliser leur calculatrice pour déterminer un encadrement de la solution d'une équation.
Le traceur de courbe « sinequanon », le tableur, le logiciel de géométrie dynamique « geogebra » et le logiciel de calcul formel « xcas » ont déjà été utilisés en classe.

Consignes données aux élèves

Après un temps d'appropriation individuelle, des groupes de proximité de 3 ou 4 élèves se constituent. Les élèves ont à leur disposition des ordinateurs équipés des logiciels de mathématiques et reliés à internet.

Objectifs

Cette activité posée sous une forme ouverte (ou tâche complexe) vise prioritairement à renforcer la maîtrise des compétences de résolution de problème.
Elle permet de donner sens au concept de parabole et de justifier l'utilisation d'un système de deux équations à deux inconnues.
L'automatisation de la technique de résolution d'un système linéaire peut ensuite être travaillée plus spécifiquement en fonction des besoins des élèves.

Textes de référence.

Programme de mathématiques, enseignement commun, seconde générale et technologique
arrêté du 23 juin 2009 - BO n°30 du 23 juillet 2009

Études de fonctions Fonctions polynômes de degré 2.	• Connaître les variations des fonctions polynômes de degré 2 (monotonie, extremum) et la propriété de symétrie de leurs courbes.	Les résultats concernant les variations des fonctions polynômes de degré 2 (monotonie, extremum) et la propriété de symétrie de leurs courbes sont donnés en classe et connus des élèves, mais peuvent être partiellement ou totalement admis. Savoir mettre sous forme canonique un polynôme de degré 2 n'est pas un attendu du programme.

Analyse des compétences calculatoires travaillées

L'objectif est de renforcer le concept de fonction du second degré chez les élèves :
-lien entre expression du second degré et parabole
-symétrie de la parabole, notion de sommet
-lien entre point sur une courbe et image d'un nombre par une fonction
-résolution d'un système de deux équations du premier degré
-valeur approchée d'une solution d'une équation du second degré par encadrements successifs avec la table de la calculatrice.

Scénario

Testé en classe de 2nde : 35 élèves.

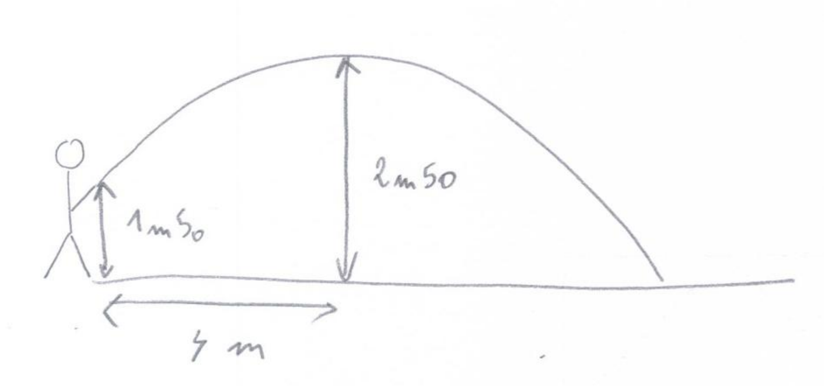
En salle de cours – des postes informatiques disponibles dans une salle annexe.

Séance 1 (40 mn)

La séance se déroule dans une salle de classe à 35 élèves, sans possibilité d'utiliser les ordinateurs. L'énoncé ne pose pas de problème de compréhension.

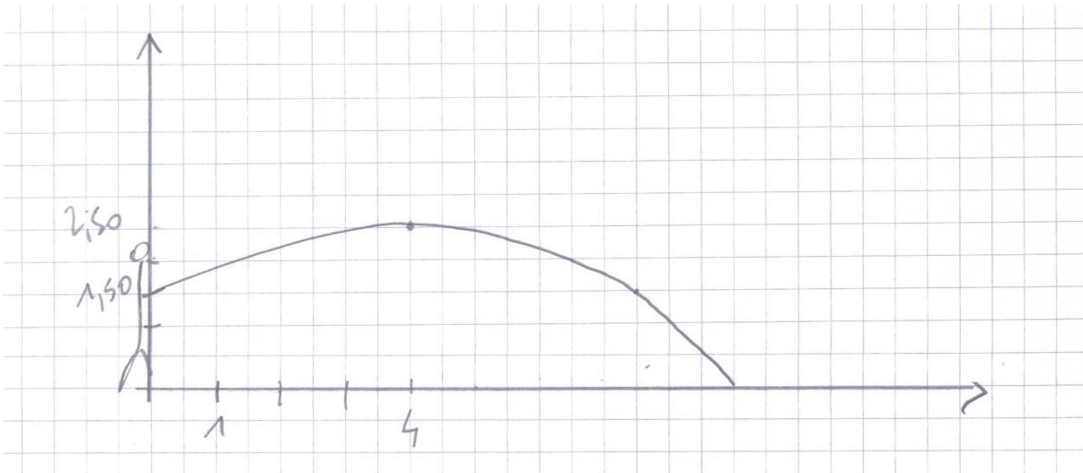
Presque tous les élèves commencent par schématiser la situation.

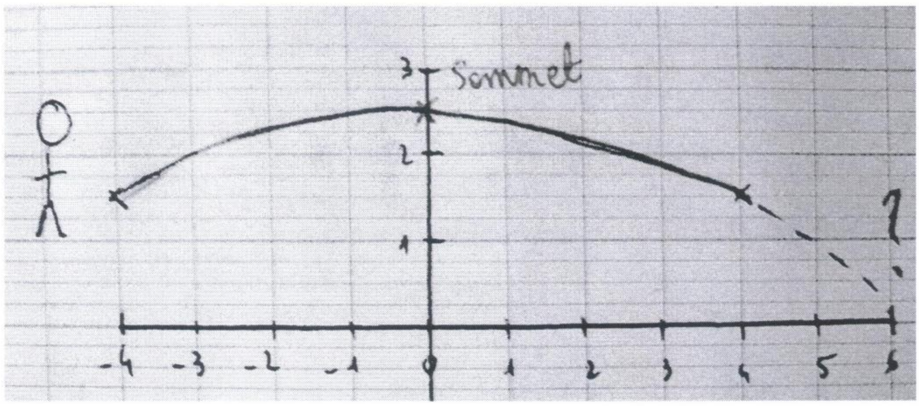
Exemple :



Certains font une représentation plus élaborée en représentant une trajectoire dans un repère.

Exemples :





Quelques-uns ont écrit que la trajectoire serait la courbe représentative d'une fonction du second degré définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$, une élève précisant que a était négatif.

Après 20 minutes de réflexion individuelle, les élèves sont invités à présenter leurs idées à l'ensemble du groupe. Les différentes pistes sont commentées et quelques idées fortes sont dégagées du débat qui dure environ une vingtaine de minutes :

- Un repère est nécessaire pour représenter la courbe d'une fonction
- Il faudra déterminer les valeurs de a, b et c.
- Par symétrie on peut déterminer les coordonnées d'un autre point de la parabole
- Il doit être facile de trouver la valeur de c.
- Une fois l'expression de $f(x)$ trouvée, il faudra résoudre l'équation $f(x) = 0$.

Séance 2 (50 mn)
Les élèves poursuivent la recherche à partir des idées dégagées lors de la séance 1 en petits groupes de proximité de 3 ou 4 élèves.
Tous les groupes sont arrêtés par la résolution du système qu'ils n'identifient pas comme étant un système de 2 équations du premier degré puisqu'ils ne simplifient pas les équations écrites :

$$\begin{cases} a \times 4^2 + b \times 4 + 1{,}5 = 2{,}5 \\ a \times 8^2 + b \times 8 + 1{,}5 = 1{,}5 \end{cases}$$

Une mise au point collective est alors nécessaire pour faire apparaître un système ressemblant aux systèmes résolus en classe de 3ème. Toutefois les élèves ne se rappellent plus comment faire. Il est alors décidé de chercher des ressources sur internet pour poursuivre et terminer la recherche.

A le fin de cette 2ème séance, aucun groupe n'a encore réussi à déterminer a et b.

Séance 3 (50 mn)
Les groupes reprennent la recherche où ils l'avaient laissée et terminent la résolution du problème sur des brouillons. Chaque élève est invité à rédiger un compte-rendu de sa recherche qu'il termine à la maison.
Quelques extraits de compte-rendus sont proposés ci-dessous :

EXTRAIT N°1

$16a+4b+1.5=2.5$
$64a+8b+1.5=1.5$

$32a+8b+3=5$
$64a+8b+1.5=1.5$

$32a+8b+3-(64a+8b+1.5)=5-1.5$
$32a+8b+3-64a-8b-1.5=3.5$
$-32a+1.5=3.5$
$-32a=2$
$a=-2/32=-1/16=0.0625$

•On remplace a par sa valeur :

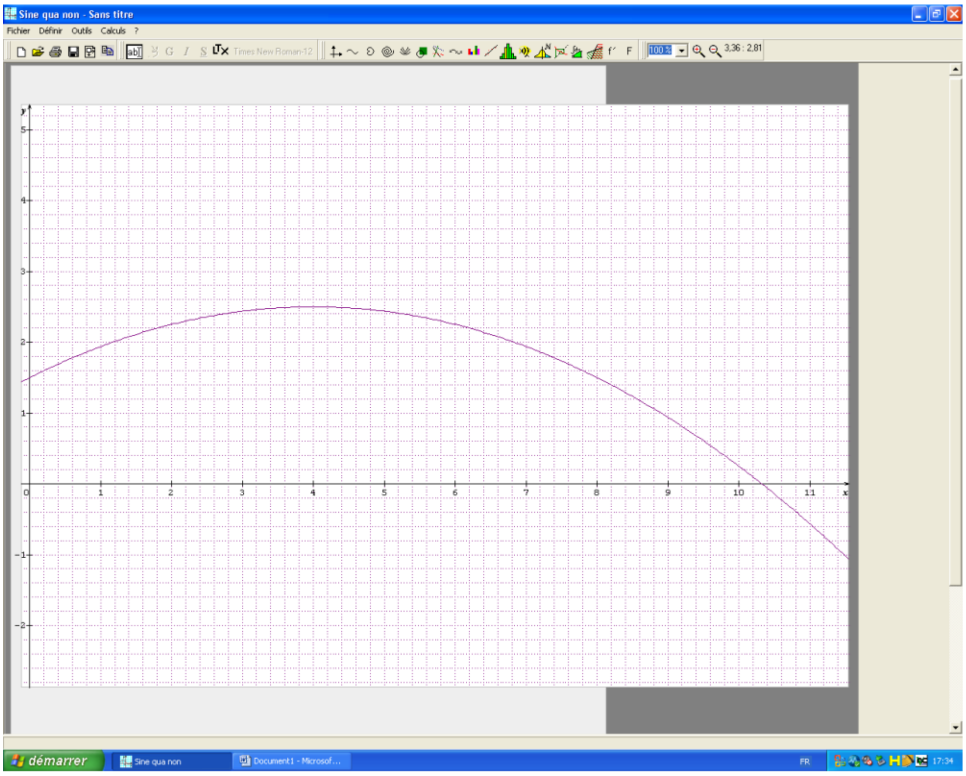
$16*(-2/32)+4b+1.5=2.5$
$-1+4b=1$
$4b=2$
$b=2/4=1/2=0.5$

•Donc :

$f(x)=(-1/16x^2)+0.5x+1.5$
Tu rentre la formule dans la calculatrice et tu regarde le x quand le y=0
Sa met : x=10.325

Conclusion :

Avant de tomber au sol la balle parcourt 10m 32centimetre et 5 millimetre



EXTRAIT N°2

A la suite des hypothèses faites en classe, j'ai décidé de résoudre le problème avec l'équation suivante : $y=a*x^2+b*x+c=1,5$

Calcul de la valeur de a et b sachant que $c=1,5$.

$a*4^2+b*4+1,5=2,5$

$a*8^2+b*8+1,5=1,5$

$16a+4b+1,5=2,5$

$64a+8b+1,5=1,5$

$32a+\underline{8b}+3=5$

$64a+\underline{8b}+1,5=1,5$

$-32a+1,5=3,5$

$-32a=2$

$a=-2/32=-1/16=-0,0625.$

pour trouver b :

$16a+4b+1,5=2,5$

$64a+8b+1,5=1,5$

$\underline{64a}+16b+6=10$

$\underline{64a}+8b+1,5=1,5$

8b+4,5=8,5 > 8,5−4,5=4

b=4/8=0,5

On rentre la formule dans notre calculatrice et on cherche pour quelle valeur de X , y=0 avec le tableur (pas de 0,001),

Résultat et conclusion :

Grâce à la calculatrice on sait que le résultat recherché est compris entre 10,32 et 10,33.

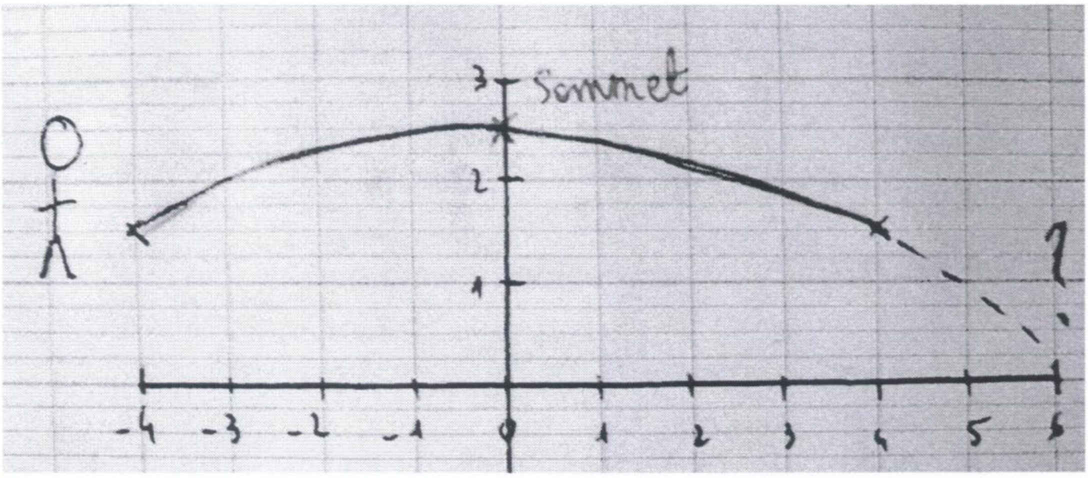
La balle aura donc parcouru entre 10,32 et 10,33 mètres.

EXTRAIT N°3

- Je sais que la balle suit une trajectoire parabolique, donc on peut considérer que la trajectoire de la balle est **une fonction du second degré**, donc de forme :

$$\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}$$

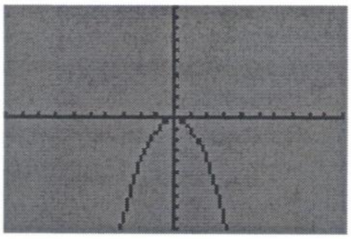
- J'ai commencé par réaliser un schéma représentant la trajectoire de la balle sur un axe :



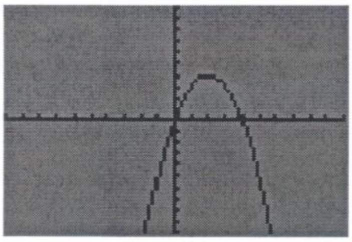
- J'ai donc décidé d'**utiliser la fonction « Graphique » de ma calculatrice** afin de trouver les nombres b et c. Premièrement, je sais que la parabole est en forme de « U-inversé », donc :

$$\mathbf{x < 0}$$

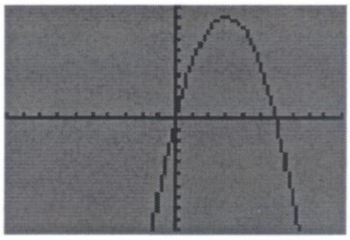
- Il s'agit maintenant de trouver b . Pour cela, j'ai essayé différentes combinaisons avec ma calculatrice, en ne faisant varier que le nombre b :



$Y = -x^2 + 0x + 0$



$Y = -x^2 + 4x + 0$



$Y = -x^2 + 6x + 0$

- Maintenant que nous avons l'équation qui correspond à la trajectoire de la balle, **on doit trouver quand la balle retombe au sol**, c'est-à-dire quand f(x) = 0.

- On fait donc une équation :

$$f(x)=0$$

$$\frac{-1}{16}x^2+2{,}5=0$$

$$\frac{-1}{16}x^2=-2{,}5$$

$$x^2=-2{,}5\div(\frac{-1}{16})$$

$$x^2=40$$

$$x=\sqrt{40}$$

$$x\approx 6{,}324$$

- On peut donc dire que la balle retombera au sol environ 6,324 mètres après le sommet. Ledit sommet étant à 4 mètres du point de lancer, on peut conclure ainsi :

CONCLUSION : La balle retombera au sol après avoir parcouru une distance d'environ 10,324 mètres.

Ce qui a été fait après

Quelques exercices d'entrainement à la résolution de systèmes d'équations du premier degré sont proposés en classe et à la maison. Les élèves les plus lents ont acquis l'habileté calculatoire suffisante pour résoudre le problème donné. Les plus rapides se sont vus proposer des systèmes plus compliqués (solutions rationnelles par exemples).

Plus tard, un exercice de recherche d'une fonction du second degré connaissant les coordonnées du sommet de la parabole qui la représente, ainsi que celles d'un autre point, est à nouveau donné en classe.

L'énoncé est donné ci-dessous :

f est une fonction dont la courbe représentative est une parabole de sommet $S(5; 12)$ et qui passe par le point $A(0; 7)$. Déterminer l'expression $f(x)$ de cette fonction. Détailler les différentes étapes du raisonnement.